『学習院大学　経済論集』第47巻　第2号（2010年7月）

# 債券数学のビジュアルな教授法

白田由香利*　橋本隆子**

**要旨**

本稿では，債券に関する数学，債券数学（Bond Mathematics）をビジュアルなアプローチで教授する方法について述べる．題材は，確定利付き債券の価格関数の特徴説明，および，イミュニゼーションである。これらは金融工学の基礎知識として重要なものである。ビジュアルアプローチの導入により，債券価格関数を多変数関数から次元を落として説明していくことで，学生は体系的な理解が得られる。また，イミュニゼーションの連立方程式もビジュアルな教材により，デュレーションおよびコンベキシティを説明すると，理解が深まる。

## 1. はじめに

複雑な構造や概念を説明する場合，視覚的に見せると理解が容易になる。白田は10年間経済学部経営学科で経営数学を教えてきたが，そこで視覚的教授法の重要性を認識し，数学ソフトウェアによって3次元2次元のグラフィクスにより国民所得決定問題，最適化問題などを教えてきた。代数学的解法では理解できない学生も，ビジュアルアプローチによる解法によって理解できるようになる。

本稿では，債券に関する数学，債券数学(Bond Mathematics)にビジュアルなアプローチを導入した教授法について述べる。題材は，確定利付き債券の価格関数の特徴説明，および，イミュニゼーションである。これらは金融工学の基礎知識として重要なものである。内容としては，教案を要約して説明した後，その教授法のポイントを述べる，という方式をとる。内容的には新規な点は無いが，教授法という観点からすると，ビジュアルアプローチの導入による新しい教授法と言える。

次章では，債券価格関数の教授法について述べる。第3章では，イミュニゼーションのテーラー展開による解法の教授法について述べる。第4章は，同じくイミュニゼーションについて連立方程式のビジュアルな解説という立場から教授する方法を述べる。

## 2．債券価格関数のビジュアルな教授法

本章では，債券価格関数をビジュアルなアプローチでどのように教授するか，その方法を述

*　学習院大学経済学部経営学科
**　千葉商科大学商経学部

べる。価格の関数は，P = P (c, y, F, n)の多変数関数となる。債券は確定利付き債券のみを対象とする。

c: クーポン率

y: 利回り

F: 額面(100に固定)

n: 満期

債券価格関数は，4つの独立変数からなる多変数関数として扱うと，学生がその特徴を体系的に理解しやすい。表示するためには，独立変数を２つ選択して，債券価格の3次元曲面として，グラフィクス表示することが必要となる。

グラフィクスは3次元以上の高次元は表示できないので，独立変数は2個に制限しなくてはならない。4個の独立変数のうちから2個を選択する組み合わせは，${}_4C_2$で6通りある。しかし額面は100に固定して考えると，独立変数は3個に減るので，${}_3C_2$で3通りとなる。以下では，債券価格関数を教示する場合，この3通りをグラフィクスを用いてどのように教えているかを説明する。

### (1)　独立変数をyとnとした場合

P = P (c = 4%，y，F = 100, n) の関数を描いて見る。次にその曲面上で，nを固定した場合，yを固定した場合の2種類の曲線を以下で示す。

#### (1A)　P=　P(c=4%，y，F=100，n={1，5，9})

債券価格の3次元曲面は，点で表してある。異なる3種類のnの値でこの曲面を切断したインターセクション部が3本のカーブとなる。曲面のようすが分かるように，視点を変えて2つのグラフィクスを以下に示した。

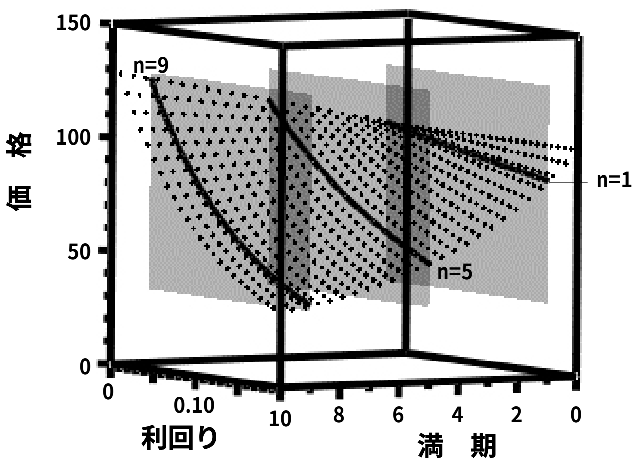



**図１：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面**

P = P ( c = 4%, y,  F = 100, n = {1, 5, 9} )

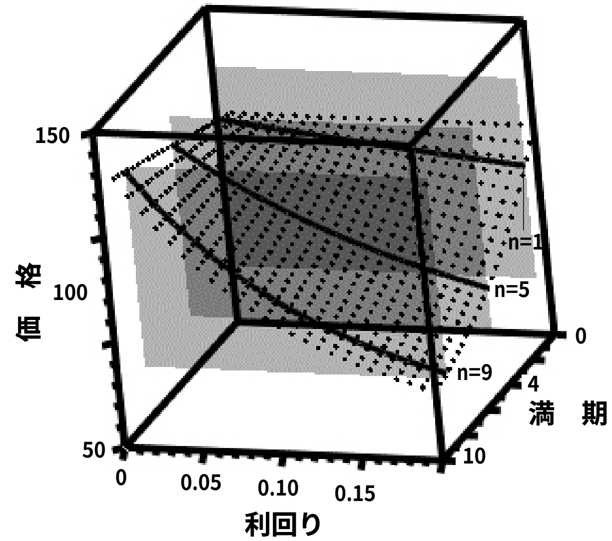



**図２：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面**
P = P（c = 4%, y, F = 100, n = {1, 5, 9}）

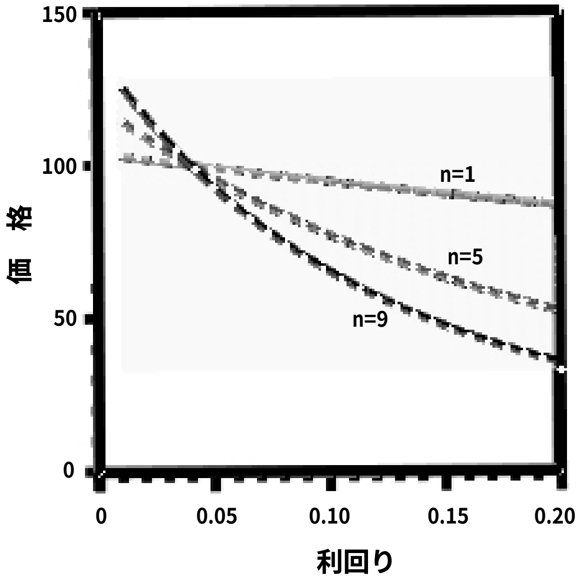



**図３：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面を、3種類のn値で切断。そこでできたカーブ3本を2次元平面に投影した様子。**
P = P（c = 4%, y, F = 100, n = {1, 5, 9}）

図3に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(利回り~価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリーが読み取れる。

■他の条件が同じであれば，満期(残存期間)が長いほど，価格の変化率は大きい。

(1B)　P =　P(c = 4%，y = {2%，4%，6%}，F =100，n)

次に，異なる3種類のyの値で同じ曲面を切断する。曲面のようすが分かるように，視点を変えて2つのグラフィクスを以下に示した。

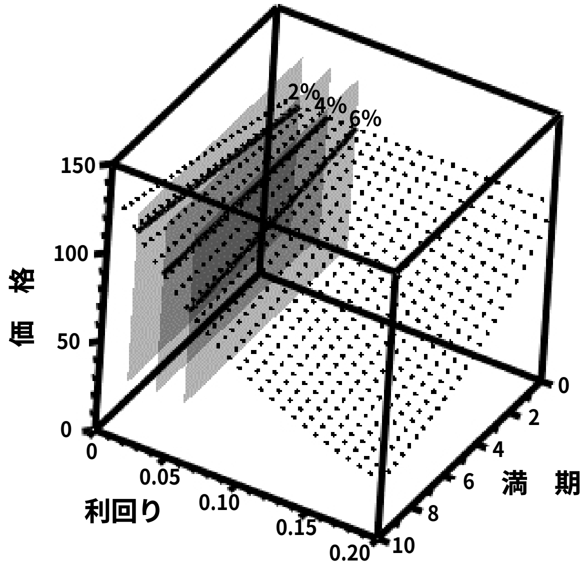



**図4：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面。**
P = P（c = 4%, y = {2%, 4%, 6%}，F = 100, n）

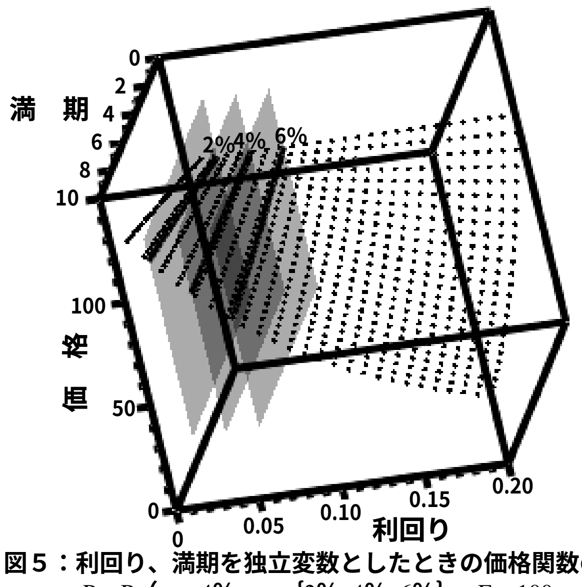



**図5：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面。**
P = P（c = 4%, y = {2%, 4%, 6%}，F = 100, n）

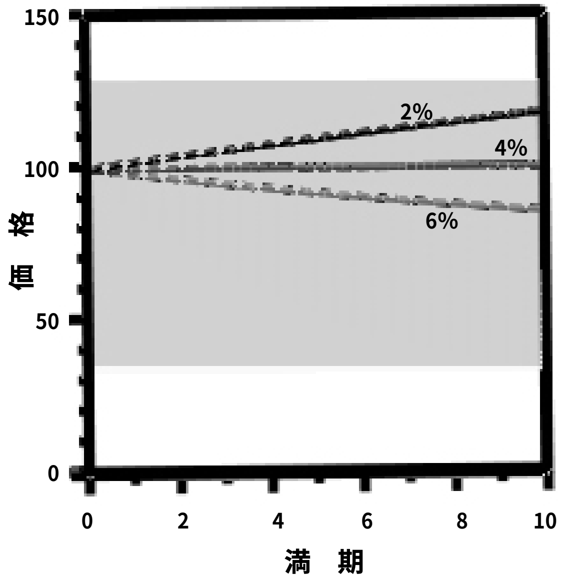



**図６：利回り、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面を、3種類のy値で切断。そこでできたカーブ3本を2次元平面に投影した様子。**
P = P（c = 4%, y = {2%, 4%, 6%}，F = 100, n）

図6に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(満期~価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリー「満期までの年限と債券価格」が読み取れる。

■満期利回り＜クーポン率の場合，満期の年限が減少するにつれて，価格は減少して満期ゼロで額面となる。満期利回りとクーポン率が等しい場合，価格は常時，額面に等しい。

### (2) 独立変数をｃとｙとした場合

次にcとyを独立変数として，価格関数のグラフィクスを描いて見る。

P=　P(c，y，F=100, n=10) の関数である。この曲面上で，nを固定した場合，yを固定した場合の2種類のグラフィクスを以下で示す。

(2A)　P=　P(c={2%，4%，6%}，y，F=100，n=10)

クーポン率と利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面を，3種類のc値で切断。そこでできたカーブ3本を2次元平面に投影したようすを描く。

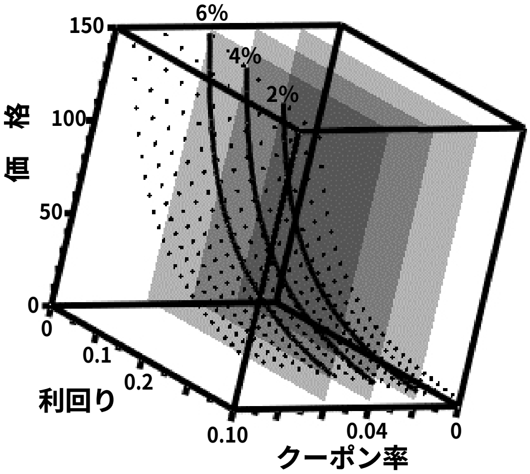



**図７：クーポン率、利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面。**
P = P(c = ｛2%, 4%, 6%｝, y, F = 100, n = 10 )

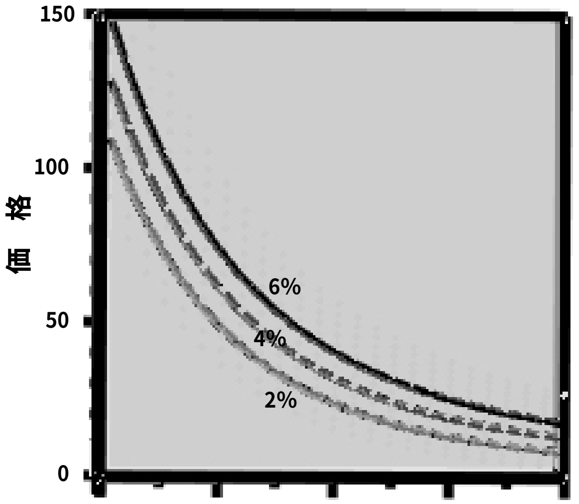



**図８：クーポン率、利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面を切断したカーブを2次元平面に投影した様子。**
P = P(c = ｛2%, 4%, 6%｝, y, F = 100, n = 10 )

図8に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(利回り～価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリーが読み取れる。

■他の条件が同じであれば，クーポン率の高い方が，価格が大きい。

(2B)　P=　P(c，y={2%，4%，6%}，F=100，n=10)
次に，異なる3種類のy値で同じ価格の曲面を切断する。

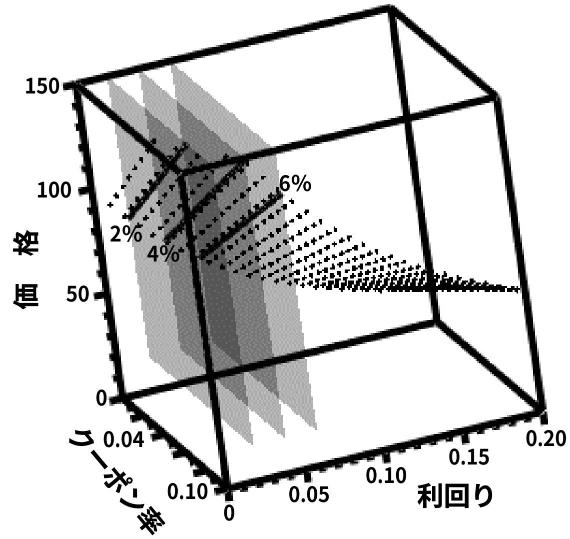



**図９：クーポン率、利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面。**
P = P(c, y = {2%, 4%, 6%}, F = 100, n = 10 )

図10に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(クーポン率~価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリーが読み取れる。

■他の条件が同じであれば，満期利回りが小さいほうが，価格が大きい。

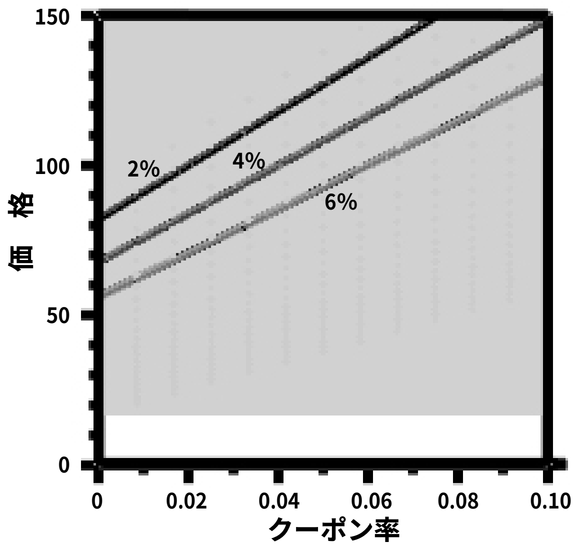



**図10：クーポン率、利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面。**
P = P(c, y = {2%, 4%, 6%}, F = 100, n = 10 )

### (3)　独立変数をｃとｎとした場合

次に２つの独立変数として，ｃとｎを選択する。

(3A)　P=　P(c={2%，4%，6%}，y=4%，F=100，n)

異なる3種類のｃの値で，価格の曲面を切断する。

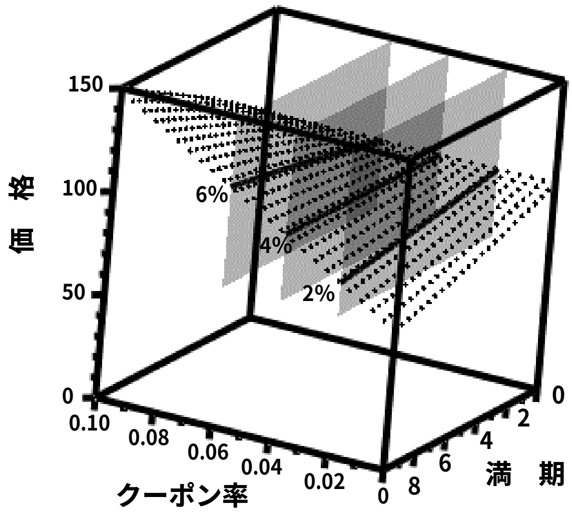



**図11：クーポン率、利回りを独立変数としたときの価格関数の曲面。**

P = P(c = {2%, 4%, 6%}, y = 4%, F = 100, n )

図12 に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(満期~価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリーが読み取れる。

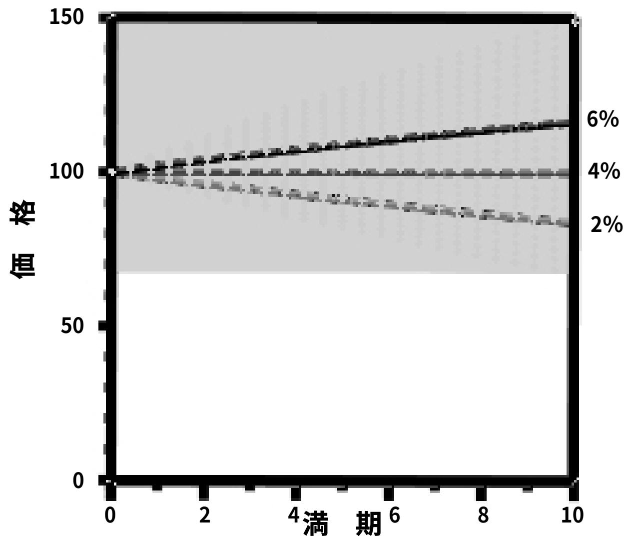



**図12：クーポン率、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面。**

P = P(c = {2%, 4%, 6%}, y = 4%, F = 100, n )

■満期利回り＜クーポン率の場合，満期の年限が減少するにつれて，価格は減少して満期ゼロで額面となる。満期利回りとクーポン率が等しい場合，価格は常時，額面に等しい。

(3B)　P=　P(c，y=4%，F=100，n={1,5,9} )

異なる3種類のnの値で同じ価格の曲面を切断する。

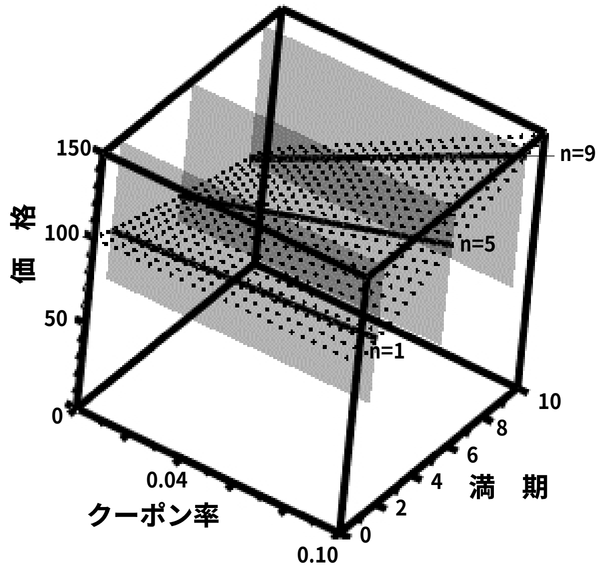



**図13：クーポン率、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面。**

P = P(c, y = 4%，F = 100，n = ｛1, 5, 9｝)

図14に，3本のインターセクションによるカーブを2次元平面(クーポン率~価格)へ投影した様子を示した。グラフィクスから，以下の金融工学のセオリーが読み取れる。

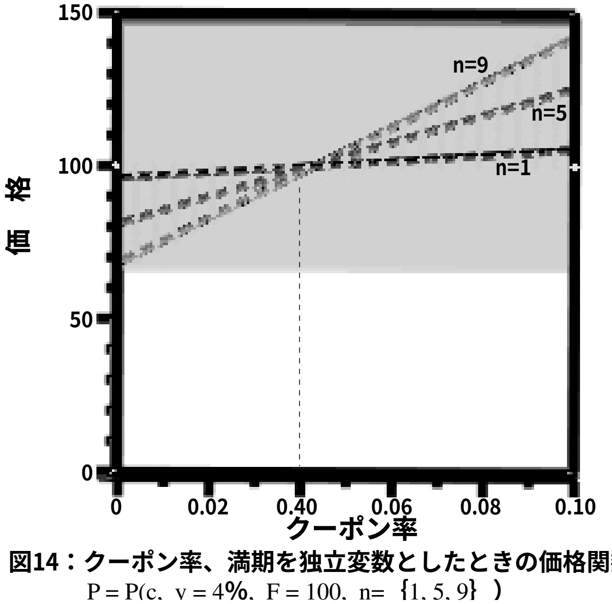



**図14：クーポン率、満期を独立変数としたときの価格関数の曲面。**

P = P(c，y = 4%，F = 100，n= ｛1, 5, 9｝)

■満期が長いほど，クーポン率に関する価格変化率が大きい。すべてのカーブはクーポン率４%(＝満期利回り)の点で交わる。

この，価格関数の3次元表示による教示法の効果は，債券価格関数という多変数関数の存在を認識することで，メタレベルで債券価格の特徴を考えられる視点が養える点である。

個々の独立変数の変化をいくつもの2次元表示で解説するだけでは，学生の頭のなかで，断片的な知識が集積されるのみで，統一的な理解をすることが難しいのではないか，と我々は考える。帰納的推論ができる一部の学生であれば，個々の2次元グラフィクスから，全体像を帰納的に推論し，イメージすることが可能であろう。しかし，殆どの学生は，個々の2次元グラフ上で，第3番目の独立変数の値が異なるカーブを，どうしてそうなるのか，理解しないで，特徴だけ見て覚える，という段階に留まってしまうのではないか，全体的な視野に欠けるのではないか，と思う。

数学ソフトウェアで3次元グラフィクスが描ける最大のメリットは，誰もが，簡単に任意のドメインで関数の3次元曲面を描けることである。債券価格関数は，30年ものであると，30次関数になってしまい，人手で描くことは不可能に近い。しかし，今のテクノロジーでは，それが容易に可能となった。このグラフィクス技術は，債券価格関数表示にも適用すべきである。我々も初めて債券価格関数の3次元曲面を描いて見た時は，詳細な値の変化のようすが分かり理解度が飛躍的に向上した。我々は，債券価格関数は3次元グラフィクス描画を使って教授することを強く提唱したい。

最近の数学ソフトウェアのグラフィクス機能には，3次元曲面の断面(インターセクション部)を計算し，描画する機能がある。これを用いることで，選択した2個の独立変数のうちどちらかを特定の値に固定した場合の価格の値の変化が分かる。

3次元曲面の断面を用いる教授法は，制約付き最適化問題の解説においても効果がある。図

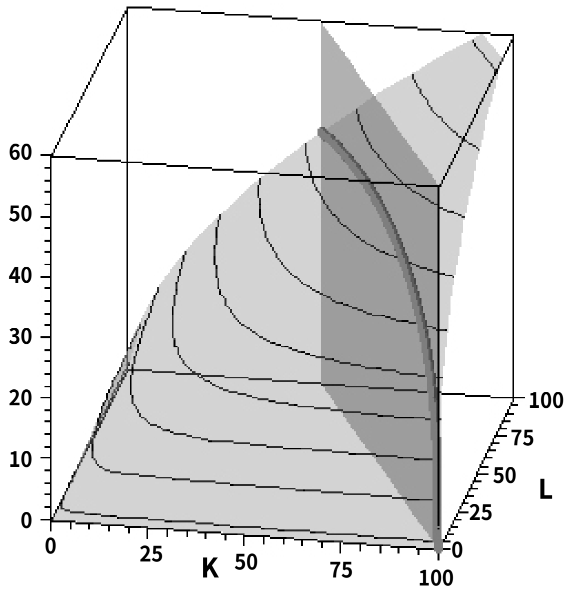


**図15：制約付き最適化問題において、制約条件の平面でターゲット関数を切断した様子（［1］より引用）。**

15に制約条件の作る平面で，ターゲット関数を切断するようすを示した。

断面を作るオペレーションは，その行為自体がおもしろいので，学生が興味をもってくれる。そして，インターセクション部を，回転させることで2次元平面に投影させることで，テキストに載っている，見慣れた2次元グラフになると，メタレベルな多変数関数から，変数固定による2次元平面への投影という，一連の流れが深く理解できるようになる。学生が数学ソフトウェアで最も感動する箇所である。

債券価格関数の3次元グラフィクス表示による教授法のメリットをまとめる。

(1) 個々の特徴を断片的に見るのではなく，多変数関数という高い視点からスタートし，注目する独立変数を選択して調べる，という統一的な視点が養われる。

(2) 断面によるインターセクション部を見ることで，変数値を固定するという，偏微分的考えが体で理解できる。

(3) 3次元曲面の2次元平面への投影により，2次元平面上でカーブの変化を起こした，根本的原因が，理解できる。

上記(3)に関するメリットであるが，国民所得決定問題において，2次元平面上での関数シフトを説明する際にも，3番目の変数を含めて3次元グラフィクスを描いて説明したところ，学生がよく理解してくれた(図16参照)。

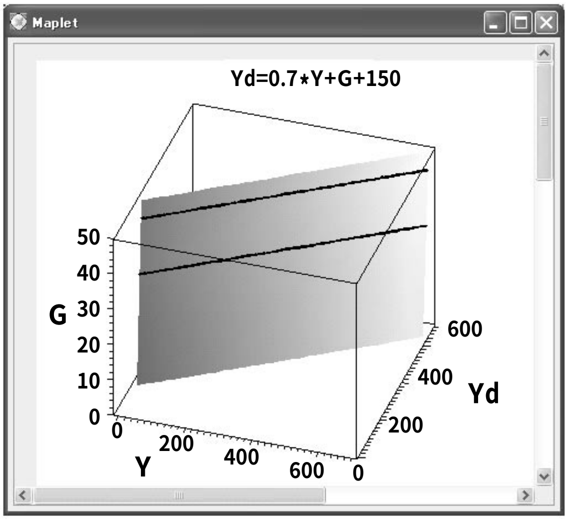



**図16：国民所得決定問題で、総需要の平面を、2通りの政府支出Gの値の平面で切断した様子。（［1］より引用）。**

こうした多変数関数の3次元表示を講義の中に取り入れていくことを我々は強く提唱したい。

## 3.　イミュニゼーションのビジュアルな教授法

本章では，イミュニゼーションについてのビジュアルな教授法について述べる。

イミュニゼーションは，債務などの返済計画が予想と離れないようにするため，債券などでポートフォリオを組み，金利変動に対して，債務と同じ動きをすることで，備えるものである。

イミュニゼーションでは，テーラー近似を用いて関数近似を行っている。テーラー近似の概念を学生に教えるには，ビジュアルアプローチが最も効果的である。最近の数学ソフトウェアは，テーラー近似のライブラリが整備されていて，何次までの近似をするのか指定すると，アニメーションで近似の精度が上がるようすを表示してくれる(例えば，Maple の TaylorApproximation ライブラリがある)。テーラー近似の公式を教える際には，まず，グラフィクスを使うことを強く推奨したい。

テーラー展開では，ある関数が与えられたときに，その y= λ の周辺で，その関数に似た形の関数を作ろうとする。そのときに，テーラー展開により関数は以下のように近似できる。

$$P(y)=P(\lambda)+\frac{P'(\lambda)}{1!}(y-\lambda)+\frac{P''(\lambda)}{2!}(y-\lambda)^2+\cdots$$
$$+\frac{P^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(y-\lambda)^{n-1}+\frac{P^{(n)}(c)}{n!}(y-\lambda)^n$$
$$(c\text{は}\lambda\text{と}y\text{との間の値})$$

以下では，債券数学のイミュニゼーションに特定した，ビジュアルアプローチについて述べていく。まず，典型的な確定利付き債券の価格関数をテーラー近似する様子を図17に示す。イミュニゼーションにおいて，教案のポイントとしては，以下がある。これらについてもグラ

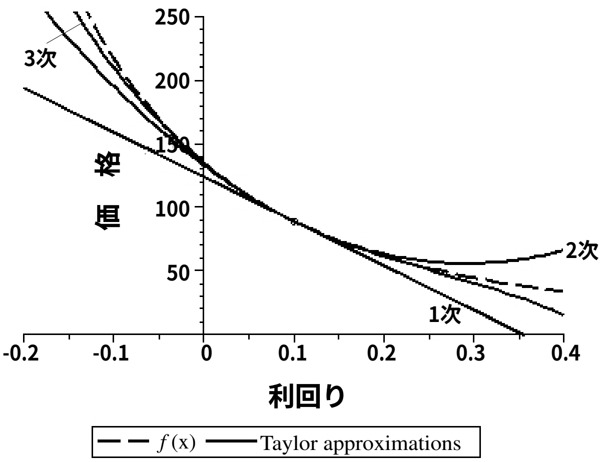



**図17：債券の価格関数を3次までテーラー近似した様子。P(c=7%, y, F=100, n=5)を y=10%で展開した。y<10%の領域では、3次までの近似が最もターゲット関数に値が近いことが図から分かる。**

フィクス表示を見せることで，学習効率が高まると，我々は考える。

1. 債務の何と，ポートフォリオの何をどのような関係にしたいのかを，理解させる。

   現在の利回りの近傍で，債務の現在価値のカーブと，ポートフォリオの価格のカーブを近づけたい，ということを理解させる。これは，何と何を近似しようとしているのか，理解しないまま，イミュニゼーションの計算を行う学生がいるためである。イミュニゼーションの意味を理解させることが必要である。

2. 一度の金利変動をイミュニゼーションで回避できても，大幅に利回りが変動した場合は，再度，イミュニゼーションが必要であることを理解させる。

   これは，利回りの変動が大きく，債務の現在価値とポートフォリオの価格が大きくずれていても，気付かないで平気でいる学生がいるためである。

3. デュレーション，コンベキシティとは，1階の導関数，2階の導関数に相当する概念であること理解させる。

   これは，これらの概念に対して，金融工学のセオリーと数学の概念とが連携していない学生がいるためである。微分は価格の利回り変動に関する感度に相当する，ということを理解させ，次にデュレーションの定義とは，同様に感度を意味することを理解させ，よって，デュレーションが微分によって計算できること，を三段論法的に理解させる。

以下では，著名な金融工学のテキストにある，イミュニゼーションの問題をビジュアルアプローチで解説する様子を示す[2],[3]。問題の文章は要約してあるが，文章題で与えたデータは同じにしてある。

**□問題　２種類の債券によるポートフォリオでイミュニゼーション（ルーエンバーガー金融工学、例３－10）**

10年後の債務100万ドルがあるとする。この債務に対して２種類の債券によってポートフォリオを組むとする。使える債券は以下の３種類で，いずれも満期利回りは9%である。

債券１　P(c=6%,  y=9%, F=100, n=30年)

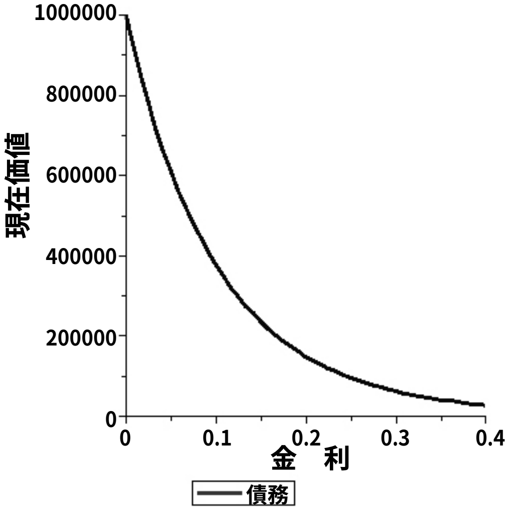
債券２　P(c=11%,  y=9%, F=100, n=10年)

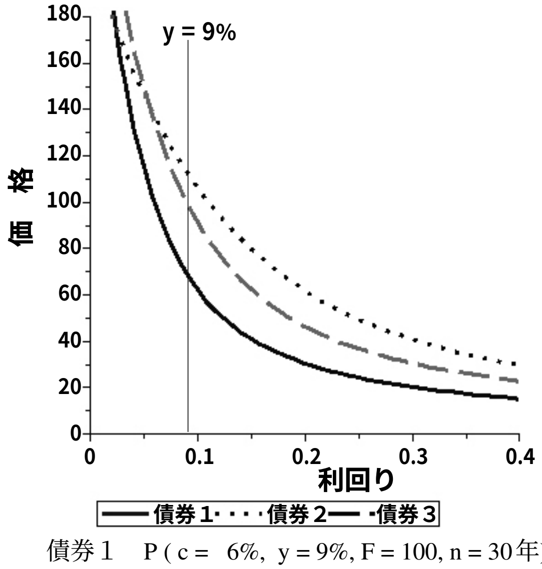
債券３　P(c=9%,  y=9%, F=100, n=20年)

どの債券を選べばよいか。また，それぞれの債券の購入量をいくらにすればよいか，求めよ。クーポン支払いは半年ごとに行われる。複利の計算もS.A.(半年ごと)で行うとする。クーポン率は年利率で与えられている。

以下に我々のビジュアルアプローチによる解説を示す。我々の教授法の部分は以下の枠で囲った部分である。

まず，債務と，債券１，２，３の価格の関数のグラフを以下に示す。



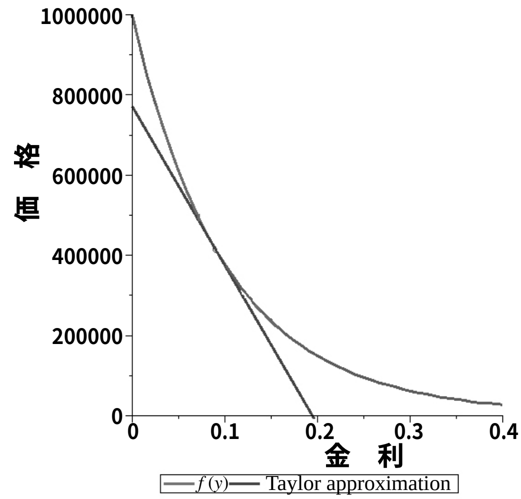




債券１　P ( c = 6%, y = 9%, F = 100, n = 30年) = 69.04

債券２　P ( c = 11%, y = 9%, F = 100, n = 10年) = 113.01

債券３　P ( c = 9%, y = 9%, F = 100, n = 20年) = 100.00

イミュニゼーションとは，金利が変動しても，債務側の現在価値の変動とポートフォリオ側の現在価値の変動が等しくなるようにすることである。債券を組み合わせることで，債務の関数の形を現在の利回りを中心にして，ポートフォリオで近似する。以下に債務のカーブと，現在の利回り9%の点で接線を引いた図を示す。1次の近似では，ポートフォリオによって，価格の点を一致させること，接線の傾きの角度を一致させることを目標とする。




次に現在の利回り9%での，価格，修正デュレーション，コンベキシティの値を計算して表にする。ルーエンバーガーの本では，マコーレーのデュレーションで計算しているが，ここでは修正デュレーションを使っているので，値が少し小さくなっている。

| | 価格・現在価値 | 修正デュレーション | コンベキシティ |
|---|---|---|---|
| 債務 | 4.146・100000 | 9.569 | 96.150 |
| 債券 1 | 69.040 | 10.950 | 206.340 |
| 債券 2 | 113.010 | 6.250 | 53.110 |
| 債券 3 | 100.000 | 9.200 | 131.330 |

修正デュレーションの9.569を達成しようとした場合，6.250と9.200の値では9.569は作れない。よってここで候補は（債券１と２のペア），（債券１と３のペア）となった。

■債券１と２のポートフォリオで債務をイミュニゼーション

まず連立方程式を作る。xとyは購入量である。連立方程式の立て方は次節で説明する。

69.04296697x+113.0079365y = 4.146428597 × 100000

756.1532144x+706.7544662y = 3.967874255 × 1000000

連立方程式を解くと，以下のxとyを得る。

x = 4238.195569

y= 1079.793745

イミュニゼーションした結果のポートフォリオの価格式は，以下のようになる。P1とP2は債券1と2の価格，PP1はそのポートフォリオの価格を表す。

PP1 ＝ 4238.195569 P1 + 1079.793745 P2

■債券１と3のポートフォリオで債務をイミュニゼーション

連立方程式は以下のようになる。

69.04296698x+100.00y = 4.146428597 × 100000

756.1532146x+920.0792208y = 3.967874255 × 1000000

連立方程式を解くと，以下の x と y を得る。

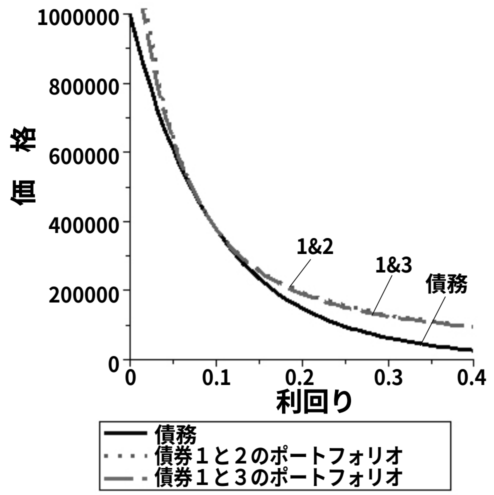
x = 1264.080964

y= 3273.669595

イミュニゼーションした結果のポートフォリオの価格式は，以下のようになる

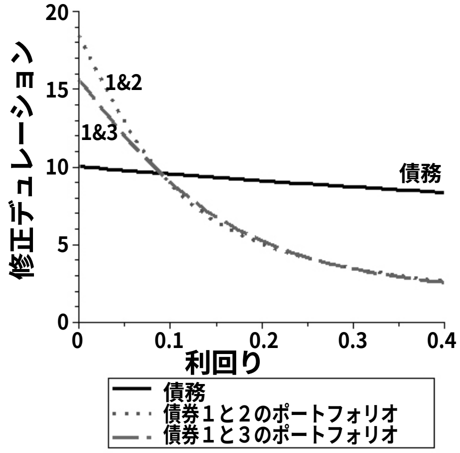
PP2 ＝ 1264.080964 P1 + 3273.669595 P3

以下の図は，債券１と２のポートフォリオと債務の価格関数のグラフである。まず現在の利回り 9% では，価格および修正デュレーションの値が，一致していることが目で確認できる。

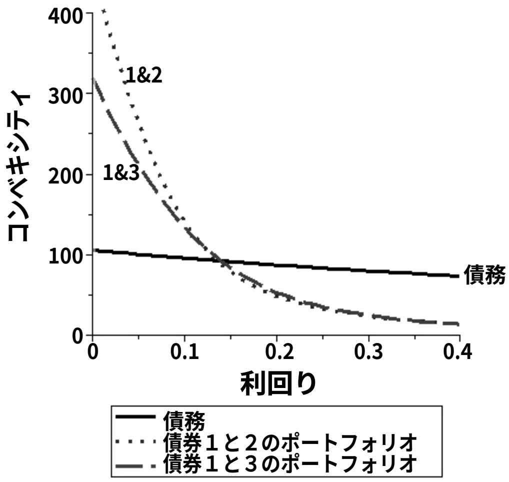



2種類のポートフォリオを並べてみると，若干，債券１と3のポートフォリオのほうが低めの価格値をとることが分かる。債務の関数に近似するのであるから，単純に，近似，という点だけからみると，債券1と3のポートフォリオの方が良い。

債務と2種類のポートフォリオの修正デュレーションの関数の動きは以下の図のようになる。利回り９%の点で，２つのポートフォリオの修正デュレーションは，債務の修正デュレーション値と一致していることが視覚的に分かる。利回りが低下した場合，債券１と２のポートフォリオのデュレーションが次第に高めに離れていくことが分かる。

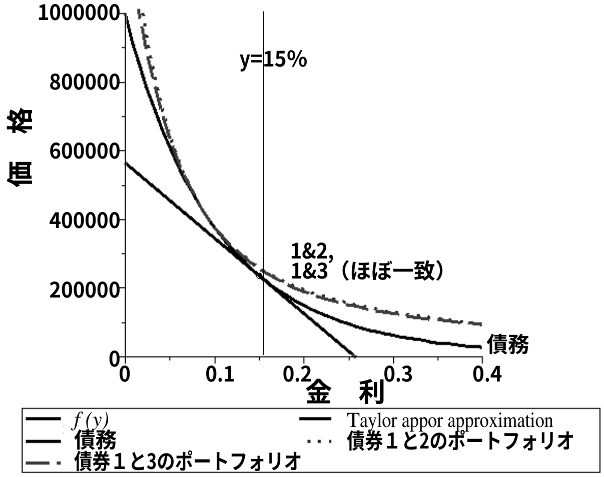



コンベキシティの動きも見ておこう。




債券１と２のポートフォリオのコンベキシティのほうが，利回り9%の時，高めに離れている。利回りが9%より低い時，その乖離は次第に大きくなっている。
1次近似のイミュニゼーションの結論としては，債券１と３のポートフォリオが関数の形の近似として，最も適切であると言える。

次に，金利が変動した場合を分析する。下記の図は，金利15％として，債務の現在価値と15％における接線を描いた。既に9%でイミュニゼーションした結果とかなり乖離していることが見て取れる。




上記の教授法の中のポイントは以下のようにまとめることができる。

1.債務の現在価値と金利の関係をグラフィクスで提示し，近似する対象を明確にする。１次のテーラー近似の接線を引くことで，この傾きを作るように債券をブレンドすればよい，と目標が明確に提示する。

2.利用可能な債券の特徴をグラフィクスで表示し，どれを組み合わせるべきか，考える材料とする。デュレーション，コンベキシティの現在の利回りの値を見れば，どのペアではイミュニゼーションが達成できないかは，即，発見できる。学生には，やみくもにペアを作っても無駄であることを，理解させ，可能性のあるペアだけで，試行することを教える。

3.１次までの近似ができても，現在の利回りから離れるに従って，どの程度，債務のカーブと離れてしまうかを視覚的に確認する。この視覚的確認によって，ポートフォリオの候補の中から最適と思われるものを選択する，ことを学ばせる。

4.利回りが変動すると，テーラー展開する近傍がずれるということをビジュアルに確認させる。

## ４．イミュニゼーションにおける連立方程式

前章では，イミュニゼーションにおけるビジュアルアプローチの効果を述べたが，イミュニゼーションにおいては，連立方程式の概念の重要性を説明することも重要である。

これは，そもそも，テーラー近似の何に対して，連立方程式を立てているのかも理解しないで，やみくもに手続きだけを記憶する学生がいるからである。また，そもそも解が無い場合もあるのであるから，解こうとしている方程式に解が存在するのかどうかを始めに考える，という態度を養成したい。

我々は，以下のようにイミュニゼーションの連立方程式を説明する。

(説明スタート)

テーラー展開で，1次までで近似すると，Pの変化量は以下のように表される。修正デュレーションは$D_m$で表す。

$$P(\lambda+\Delta y)-P(\lambda)=P'(\lambda)\cdot(\Delta y)$$
$$\Delta P=-D_m(\lambda)\cdot P(\lambda)\cdot(\Delta y)$$

既にP(λ)の値は，0次までの近似で等しい。よって，⊿yに対して，⊿Pを同じにするには，Dm(λ)P(λ)を同じにすればよい。

テーラー展開の2次までで近似すると，Pの変化量は以下のように表される。Cはコンベキシティを表す。

$$P(\lambda+\Delta y)-P(\lambda)=P'(\lambda)(\Delta y)+\frac{P''(\lambda)}{2}(\Delta y)^2$$
$$\Delta P=-D_m(\lambda)\cdot P(\lambda)\cdot(\Delta y)+\frac{1}{2}C(\lambda)\cdot P(\lambda)\cdot(\Delta y)^2$$

⊿yに対して，⊿Pを同じにするには，C(λ)P(λ)を同じにすればよい。

以上より，連立方程式の立て方をまとめると以下となる。

◇債券のポートフォリオの連立方程式

**<2種類ポートフォリオの場合>**

１次までの近似を行う。債務の現在価値をPbとする。ポートフォリオにおける債券1と2の購入量をx, yとする。

$$x\cdot P_1+y\cdot P_2=P_b$$
$$x\cdot P_1\cdot D_{m1}+y\cdot P_2\cdot D_{m2}=P_b\cdot D_{mb}$$

この方程式におけるGiven DataとUnknownは以下の通りである。

Given Data: $P_b, D_{mb}, P_1, P_2, D_{m1}, D_{m2}$

修正デュレーション$D_{m1}$と$D_{m2}$は債券の価格関数が与えられれば，計算できるので，givenとした。債務の修正デュレーションも同様である。

Unknown: $x, y$　(ともに正の値)

**<3種類のポートフォリオの場合>**

3次までの近似式を使って、3種類の債券によるポートフォリオを作る。債券の購入力は$x, y, z$とする.

$$x\cdot P_1+y\cdot P_2+z\cdot P_3=P_b$$
$$x\cdot P_1\cdot D_{m1}+y\cdot P_2\cdot D_{m2}+z\cdot P_3\cdot D_{m3}=P_b\cdot D_{mb}$$
$$x\cdot P_1\cdot C_1+y\cdot P_2\cdot C_2+z\cdot P_3\cdot C_3=P_b\cdot D_b$$

Given Data: $P_b, D_{mb}, C_b\ P_1, P_2, P_3, D_{m1}, D_{m2}, D_{m3}, C_1, C_2, C_3$

コンベキシティ $C_1, C_2, C_3$ は債券の価格関数が与えられれば求められるので，given とした。債務の修正デュレーションも同様である。

Unknown: $x, y, z$ (ともに正の値)

イミュニゼーションは，学生に連立方程式という概念を理解させる恰好の題材であると，我々は考える。

例えば，連立方程式を解く際に，「変数がn個あるときは，式がn本未満しかないと解は一意に決まらない」という数学の公式を理解していないと，コンベキシティまで含めた連立方程式でなぜ3種類の債券を使う必要があるのか，ということも理解できないであろう。

イミュニゼーションの方程式は，債券2種類のポートフォリオの場合は，2本の方程式からなる2元連立方程式とするのが一般的である。しかし，債券3種類のポートフォリオにして，2本の方程式を3元連立方程式として解くこともできる。

実際の場面では，3種類の債券でポートフォリオを組み，コンベキシティまで合わせる3元連立方程式を解こうとしても，解がない場合がほとんどである。よって，3本目のコンベキシティの方程式は満たさなくもよしとして，削除する。この場合は，方程式は，現在価値の等式と，デュレーションの等式，の2本である。

しかしたとえ解が全て正の範囲で発見できたとしても, それは特定の利回りに対してのみの, 最適化問題であり，他の利回りの場合の差をやはり気にしなくてはならない。そして，近傍のドメインでの，両者の差の大きさを調べるためには，やはりグラフィクスが有効である。

ここで我々が言いたいことは，イミュニゼーションの方程式を立てる際には，数学の知識が非常に役に立つ，ということである。ここで使っている数学知識をまとめてみる。

＊連立方程式での債券の選び方は，組み合わせの公式を使って総当たり的に考える。

＊解x，y，zが正の範囲であることを考慮して，無駄な債券の組み合わせは除く。ここでは，不等式による方程式の考え方が使われている。

＊3本の連立方程式で解が存在するか，調べる。

学生の多くは，与えられた文章題を解くことに習熟しているだけで，自分で連立方程式を組み立てていく能力については発展途上である。そのためには，イミュニゼーションのような実務的な場面で，今一度，連立方程式の数学知識を理解し直す必要がある。自分で問題を設定するには, 真に数学公式を理解していることが必要であることを, 講義で教えていきたいと思う。これらの数学知識は，代数学的に計算するだけでは理解が難しいかもしれないが，ビジュアルなアプローチによる解法と対応づけて考えると理解が容易になると考える。

## 5. まとめ

本稿では，債券数学をビジュアルに教える教授法について考察した。我々が主張するポイントは，債券数学においても，コンピュータグラフィクスを多用して，従来とは異なるビジュアルアプローチによる解法を導入しようということである。題材として，確定利付き債券の価格関数の3次元プロット，イミュニゼーションにおけるテーラー近似のグラフィクスを取り上げた。

債券価格関数の3次元グラフィクス表示による教授法のメリットは以下のようにまとめられる。

(1)個々の特徴を断片的に見るのではなく，多変数関数という高い視点からスタートし，注目する独立変数を選択して調べる，という統一的な視点が養われる。
(2)断面によるインターセクション部を見ることで，変数値を固定するという，偏微分的考えが体で理解できる。
(3)3次元曲面の2次元平面への投影により，2次元平面上でカーブの変化を起こした，根本的原因が，理解できる。

これにより，学生は，債券価格関数に関する特徴を体系的に理解できるようになるであろう。また，イミュニゼーションにおけるテーラー展開のグラフィクス化は，金利変動に対する大局的な判断において有効である。また，連立方程式と，グラフィクス上の傾き，曲率との対応づけによって，代数学的に方程式を解いていただけでは分からなかった，イミュニゼーションの深い理解が得られると考える。我々は今後とも，金融工学の数学の教授法にビジュアルアプローチの活用を考えていきたい。

**謝辞**：教授法の洗練のため我々が行った講義に出席し，有益なコメントをくださった学習院大学経営学科の学生の皆さんのご協力に感謝する。

**参考文献**

1. 白田由香利, 悩める学生のための経済・経営数学入門　3つの解法テクニックで数学アレルギーを克服！. 2009, 東京: 共立出版.
2. Luenberger, D.G., Investment Science. 1998: Oxford University Press.
3. デービッド・G・ルーエンバーガー, et al., 金融工学入門. 2002, 東京: 日本経済新聞社.