Jørgensen numbers of quasi-fuchsian punctured torus groups

山﨑亮介

本稿では，1 点穴空きトーラス群を Schottky 群の類似として幾何実現することにより，Gilman [2]，Sato [14] による 2 元生成 Schottky 群の Jørgensen 数の評価と類似する結果が得られることを中心に報告する．

1　Introduction

n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ の向きを保つ等長変換からなる離散群を（n 次元）Klein 群という．完備双曲多様体の基本群は Klein 群と同型であり，逆に torsion free な Klein 群の作用による $\mathbb{H}^n$ の商空間は完備双曲多様体の構造をもつので，双曲幾何学において Klein 群論は非常に重要な研究対象である．特に $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は，Poincaré 拡張により Möbius 変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}}) = PSL(2, \mathbb{C})$ と同一視できるので，3 次元 Klein 群論は Möbius 変換の群の研究に完全に帰着できる．初等的 Klein 群については完全な分類が与えられているが，非初等的 Klein 群を分類することは非常に大きな未解決問題となっている．

以降, Klein 群は 3 次元とする．Klein 群 G の元の列 $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$, $z \subset \mathbb{H}^3$ に対して，点列 $\{g_n(z)\}$ が集積点をもつならば，その極限は真性不連続性より理想境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \hat{\mathbb{C}}$ に属する．この点列の集積点を極限点（*limit point*），G の極限点全体を極限集合（*limit set*）といい，極限集合を $\Lambda(G)$ で表す．理想境界での $\Lambda(G)$ の補集合 $\Omega(G) := \hat{\mathbb{C}}\backslash\Lambda(G)$ を不連続領域または通常集合（*ordinary set*）という．

Proposition 1.1.　Klein 群 $G < PSL(2, \mathbb{C})$ について，$\Omega(G) \neq \emptyset$ ならば，G は $\Omega(G)$ へ真性不連続に作用し，商空間 $\Omega(G)/G$ の各連結成分はリーマン面となる．

本稿では，この理想境界への作用により現れる（双曲型）リーマン面が主な幾何学的対象である．

Lemma 1.2（清水-Leutbecher の補題 [20]）**.**　$G < PSL(2, \mathbb{C})$ を Klein 群とし，放物型変換 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を G が含むとする．このとき，任意の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対し，$c = 0$ または $|c| \geq 1$.

Jørgensen [4] はこの補題を拡張し，Möbius 変換の 2 元生成非初等的群が Klein 群になるための必要条件として，次の不等式評価を与えた．

Theorem 1.3（Jørgensen［4］）．2 つの Möbius 変換 $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ について，$\langle f, g \rangle$ が非初等的 Klein 群ならば，次の不等式が成り立つ．

$$J(f,g) := \left|\mathrm{tr}^2(f) - 4\right| + \left|\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2\right| \geq 1.$$

右辺 1 は best possible である．

この不等式は $PSL(2, \mathbb{C})$ の部分群が Klein 群であるかどうか議論する上で，貴重な判定条件となっている．さらに，これを用いると次の主張も得られるので，Möbius 変換の群の離散性に関する問題は，2 元生成の群に関する研究に帰着できるともいえる．

Theorem 1.4（Jørgensen［4］）． $PSL(2, \mathbb{C})$ の非初等的部分群 G が Klein 群であることの必要十分条件は，G の任意の 2 元生成部分群が Klein 群であることである．

Theorem 1.3 で等号が成立する生成系 f, g をもつ非初等的 Klein 群を Jørgensen 群という．Jørgensen 群が Fuchs 群（2 次元 Klein 群）の場合には $(2, 3, q)$ 型 $(7 \leq q \leq +\infty)$ の三角群になることが Jørgensen-Kiikka［5］により証明され，f が放物型の場合の完全な分類が李−大市−佐藤［7］，［8］，［9］により与えられた．佐藤［15］，［16］は，この議論を精密化して群の Jørgensen 数を定義した．

Definition 1.1（［15］，［16］）．G を $PSL(2, \mathbb{C})$ の 2 元生成部分群とする．

$$J(G) := \inf\{J(f,g) \mid G = \langle f, g \rangle\}$$

を，G の Jørgensen 数という．

本研究の目的は，2 元生成 Klein 群の Jørgensen 数について議論することにより，Klein 群および双曲多様体の分類にアプローチすることにある．

2　Schottky 群と Schottky 空間

Definition 2.1. $g_1, g_2, \ldots, g_n \in PSL(2, \mathbb{C})$ を斜航型変換とする．$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ が Schottky 群であるとは，互いに交わらない $\hat{\mathbb{C}}$ の偶数個の単純閉曲線 $C_1^+, C_1^-, \ldots, C_n^+, C_n^-$ と C_i^+, C_i^- を境界にもつ有界領域 D_i^+, D_i^- に対し，

$$g_i(C_i^-) = C_i^+,\ g_i(\overset{\circ}{D_i^-}) = \overset{e}{D_i^+}$$

を満たすことをいう．ただし，$\overset{\circ}{A}, \overset{e}{A}$ はそれぞれ位相空間 A の内部，外部を表す．全ての

$C_1^+, C_1^-, \ldots, C_n^+, C_n^-$ が円であるとき，G を古典的 Schottky 群（classical Schottky group）という．

Schottky 群は，$\mathbb{H}^3$ に真性不連続に作用することが定義より直ちに従うので Klein 群である．「任意の Schottky 群は古典的であるか？」という問題が自然に考えられる．この問題を議論するために Schottky 空間および古典的 Schottky 空間を定義する．

任意の有限生成クライン群 $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ は，生成系を固定することで $PSL\,(2, \mathbb{C})^n$ の点 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ と同一視できる．いま，2 点 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ と $(\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$ について，

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \sim (\gamma_1', \ldots, \gamma_n') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists w \in PSL(2, \mathbb{C}) \;\; s.t. \;\; \gamma_j' = w \gamma_j w^{-1}$$

と定める（明らかに ~ は $PSL\,(2, \mathbb{C})^n$ 上の同値関係である）．この同値関係により，生成系が共役になっている複数の Klein 群は，空間 $PSL\,(2, \mathbb{C})^n/\sim$ 上では 1 つの点として見なされる．これを用いて，Schottky 空間を次のように定義する．

Definition 2.2（Schottky space）**.** 位相空間 $PSL\,(2, \mathbb{C})^n/\sim$ に対して，n 元生成 Schottky 群の同値類全体がなす部分位相空間を階数 n の Schottky 空間という．同様に，古典的 Schottky 群の同値類全体がなす部分位相空間を古典的 Schottky 空間という．

先述の問いに対し，Marden（[10]）は次の回答を与えた．

Theorem 2.1（Marden [10]）**.** 古典的 Schottky 空間と Schottky 空間は一致しない．すなわち，古典的でない Schottky 群が存在する．

また Yamamoto [21]は，古典的でない 2 元生成 Schottky 群を具体的に構成した．現在知られている古典的でない Schottky 群の例は，その一つのみである．2 元生成古典的 Schottky 群の Jørgensen 数が，[2]，[14]などにより研究され，調べられた全ての古典的 Schottky 群 G に対して $J\,(G) > 4$ となっている．これを基に，Sato は次のように予想した（[17]を参照）．

Conjecture. 2 元生成 Schottky 群 G に対し，G が古典的ならば $J\,(G) \geq 4$ であり，古典的でない Schottky 群で $J\,(G) < 4$ となるものが存在するであろう．

この予想が正しければ，Theorem 2.1 の別証明になっている．また，Schottky 空間の境界上であれば，$J\,(G) < 4$ となる Klein 群 G が非可算無限個存在する（[22]）．本稿では，古典的 Schottky 群の幾何学的な拡張である Kissing Schottky 群を考え，ある条件下においては古典的 Schottky 群と同じ Jørgensen 数の評価が得られることを証明する．

3　Kissing Schottky 群

まず Kissing Schottky 群を定義し，双曲曲面として大きな研究対象となっている 1 点穴空きトーラスを構成するための必要十分条件を与え，それから得られる群の性質について述べる．1 点穴空きトーラス群に関する理論は[1]が詳しいが，本稿ではそれと異なる方法での特徴づけを与えることを目指す．まず，Kissing Schottky 群による 1 点穴空きトーラス群の実現について述べる．Kissing Schottky 群は，古典的 Schottky 群の図形的に最も近い拡張である．

Definition 3.1（[12]）．$g_1, g_2, \ldots, g_n \in PSL(2, \mathbb{C})$ を斜航型変換とする．$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ が Kissing Schottky 群であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

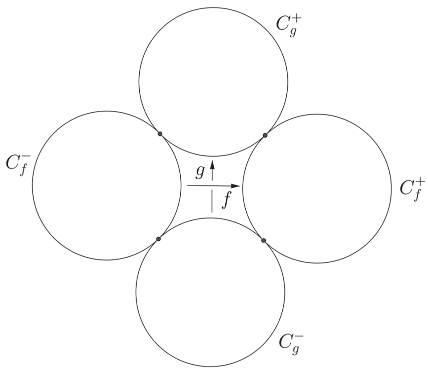
（1）各 g_i に対応する 2 つの $\hat{\mathbb{C}}$ の円 C_i^+, C_i^- が存在して，C_i^+, C_i^- を境界にもつ円板 D_i^+, D_i^- に対して，

$$g_i(C_i^-) = C_i^+,\ g_i(\overset{\circ}{D_i^-}) = \overset{e}{D_i^+}$$

を満たす（$\overset{\circ}{A}, \overset{e}{A}$ はそれぞれ位相空間 A の内部，外部を表す）．

（2）$\{C_1^+, C_1^-, \ldots, C_n^+, C_n^-\}$ に含まれる任意の円について，自身と pair になっていない円で唯 1 点で接するものが $\{C_1^+, C_1^-, \ldots, C_n^+, C_n^-\}$ に 2 つ存在する．

今，$\mathbb{H}^3$ の理想境界 $\hat{\mathbb{C}}$ への作用を考えていることに注意する．Kissing Schottky 群は，$\mathbb{H}^3$ から $\{C_1^+, C_1^-, \ldots, C_n^+, C_n^-\}$ を大円（赤道）にもつ $2n$ 個の半球体を除いた領域を基本領域として Klein 群となる．例えば下図の 4 個の円は，2 元生成 Kissing Schottky 群の作用を表したものである．



この図から，2 元生成 Kissing Schottky 群 $G = \langle f, g \rangle$ を 4 つの円弧で囲まれた有界領域へ作用させて 1 点穴空きトーラスを得るための条件を求める，円の各接点を $C_f^+ \cap C_g^+ = P$, $C_g^+ \cap C_f^- = Q$, $C_f^- \cap C_g^- = R$, $C_g^- \cap C_f^+ = S$ とすると，

$$f(Q) = P,\ \ f(R) = S,\ \ g(R) = Q,\ \ g(S) = P$$

となればよいことがわかる．したがって，4 つの接点は G の作用で全て同一視され，さらに G の極限点となるため，1 つの puncture となる．以上の議論により，Kissing Schottky 群の作用により 1 点穴空きトーラスが得られた．このとき，円上の各点の G-orbit を見ると G の極限集合は単純閉曲線になるため，G は擬 Fuchs 群となっていることに注意する．逆に，任意の 1 点穴空きトーラス $\Sigma_{1,1}$ について，$\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle X, Y\rangle$（$X$: longitude, Y: meridian）とする．これに対し，faithful な離散表現

$$\rho: \pi_1(\Sigma_{1,1}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

を $\rho(X), \rho(Y)$ が双曲型，$\rho(XYX^{-1}Y^{-1})$ が放物型になるように取れば，$\rho(\pi_1(\Sigma_{1,1}))$ は Kissing Schottky 群であり，擬 Fuchs 群になる（[6]の Appendix を参照）．以上を踏まえて，1 点穴空きトーラス群となる Kissing Schottky 群を擬フックス型穴空きトーラス群（*quasi-fuchsian punctured torus group*）と呼ぶ.

さらに，生成元の交換子 $fgf^{-1}g^{-1}$ は，固定点 P の近くの点の挙動を見れば放物型の Möbius 変換であることがわかるが，ここで次が知られている．

Lemma 3.1. 2 つの Möbius 変換 $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ に対して，$\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$ であることの必要十分条件は，$\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = 2$ を満たすことである．

よって，Kissing Schottky 群を生成する斜航型変換 $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ については，Klein 群 $G = \langle f, g\rangle$ が 1 点穴空きトーラス群ならば $\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = -2$ が成り立つ．さらに，G の生成系の取り替えについて議論することで，G のいかなる生成系に関しても交換子のトレースが -2 となるという主張を得る．以上より，次が従う．

Theorem 3.2（[12]）**.** 2 つの斜航型変換 $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ について，$\langle f, g\rangle$ が擬フックス型穴空きトーラス群ならば $fgf^{-1}g^{-1}$ はトレースが -2 の放物型変換である．

Theorem 3.3. 有限生成で torsion free な擬 Fuchs 群は幾何学的有限である．

この定理については，例えば[20]が詳しい．これより G は幾何学的有限となるが，このとき G の Jørgensen 数を議論する上で次の主張が非常に有効となる．

Proposition 3.4（Greenberg [3]）**.** ある幾何学的有限な Klein 群に含まれる斜航型変換の translation length 全体からなる集合は離散集合である．

したがって，G の斜航型変換の translation length 全体は離散集合となる．一方，任意の斜航型変換 $h \in G$ は $PSL(2, \mathbb{C})$ の共役により，

$$\begin{pmatrix} \lambda_h & 0 \\ 0 & \lambda_h^{-1} \end{pmatrix} \quad (|\lambda_h| > 1)$$

の形に（符号の違いを除き）唯一通り正規化できる．共役で h の translation length とトレースはともに不変なので，この正規形を改めて h とおく．このとき h の translation length $l(h)$ は

$$l(h) = 2 \log |\lambda_h|$$

となる．これに対し，

$$\mathrm{tr}(h) = \lambda_h + \lambda_h^{-1}$$

より，$\arg \lambda_h = \theta$ とおくと

$$\mathrm{tr}(h) = \cosh\left(\frac{l(h)}{2} + i\theta\right).$$

さらに，次が知られている．

Proposition 3.5. 任意の $r > 0$ と，幾何学的有限で torsion free な Klein 群 $G < PSL(2, \mathbb{C})$ に対して，G が含む translation length が r 以下の斜航型変換全体からなる集合は，有限個の共役類からなる．

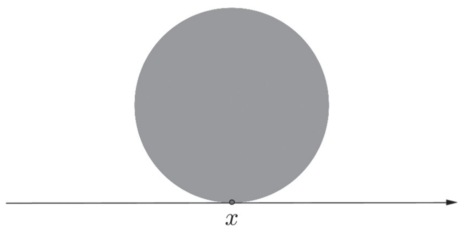
この主張については，例えば Shalen［19］が詳しい．以上より 1 点穴空きトーラス群 G は，1 つ目の生成元が斜航型である限り Jørgensen 数は 4 にならないので，残る問題は G の生成元で放物型変換がとれるかどうかである．

G を基本群と考え，1 点穴空きトーラスの上で生成系に対応する曲線のホモトピー類を見ると，$fgf^{-1}g^{-1}$ はカスプに対応するので，$fgf^{-1}g^{-1}$ を生成元として取ることは不可能である．したがって，G が $fgf^{-1}g^{-1}$ の共役類以外に放物型変換を含むのかが問題だが，放物型変換の共役類と放物型固定点の G-orbit は 1 対 1 に対応するので，放物型固定点の 1 点穴空きトーラス上でのふるまいが本質的な議論となる．Lemma 1.2 を幾何学的に解釈すると，次の主張が得られる．

Lemma 3.6. $G < PSL(2, \mathbb{R})$ は Fuchs 群で torsion free とする．∞ の stabilizer G_∞ が放物型変換 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含むならば，$U := \{z \in \mathbb{H}^2 ; \Im z > 1\}$ は G_∞ で完全不変である．即ち，

$$\begin{cases} g(U) = U \ \ (g \in G_\infty), \\ g(U) \cap U = \emptyset \ \ (g \in G \setminus G_\infty). \end{cases}$$

この主張により Fuchs 群の場合には，下図のような horocycle で囲まれた領域が G-完全不変となる．



このように x の近傍で G-完全不変な近傍がとれる場合，x はカスプ（*cusped*）な放物型固定点であるといい，このような x の近傍をカスプ領域（cusped region）という．いま擬フックス型穴空きトーラス群 $G = \langle f, g \rangle$ について，Kissing Schottky 群の性質からカスプな固定点をもつ放物型は $fgf^{-1}g^{-1}$ の共役類のみであり，これと 1 点穴空きトーラスのカスプが 1 対 1 に対応している．よって，「G が固定点がカスプでない放物型をもつか？」ということが，$J(G) = 4$ となる 1 点穴空きトーラス群が存在するかという問題の本質となる．

Definition 3.2. 有限生成クライン群 $G < PSL(2, \mathbb{C})$ が函数群（*function group*）であるとは，G の不連続領域 $\Omega(G)$ が G-不変な連結成分 Δ をもつことをいい，この Δ を G の不変成分という．不変成分 Δ を強調して函数群を (G, Δ) と表す．さらに Δ を単連結に取れるとき，G を b-群（*b-group*）という．

函数群 (G, Δ) について，Δ/G が（連結）リーマン面になることが本質的である．明らかに擬 Fuchs 群は b-群である．また，次が知られている．

Lemma 3.7. (G, Δ) を非初等的な b-群とする．$\partial\Delta \neq \emptyset$ ならば $\partial\Delta = \Lambda(G)$.

Proof. $\partial\Delta \cap \Omega(G) \neq \emptyset$ とすると，Δ より真に大きい $\Omega(G)$ の連結集合が取れるので矛盾する．よって，$\partial\Delta \subset \Lambda(G)$．一方，$G$ の斜航型固定点 w と w を固定する斜航型変換 h，および点 $z \in \Delta$ を取る．このとき，点列 $\{h^n(z)_{n \in \mathbb{Z}}\}$ は $n \to +\infty$ もしくは $n \to -\infty$ で w に収束するが，真性不連続性から $w \notin \Delta$，よって $w \in \partial\Delta$．以上より，G の斜航型固定点全体の集合 $\Lambda_0(G)$ は $\partial\Delta$ の部分集合である．$\Lambda(G) = \overline{\Lambda_0(G)}$ であり $\partial\Delta$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の閉集合なので，$\Lambda(G) \subset \partial\Delta$ となって $\partial\Delta = \Lambda(G)$ を得る．（*q.e.d*）

Definition 3.3. $(G, \Delta), (\tilde{G}, \tilde{\Delta})$ をそれぞれ函数群とし，$f : \Delta \longrightarrow \tilde{\Delta}$ は同相写像とする．いま

全ての $g \in G$ で $f \circ g \circ f^{-1}: \tilde{\Delta} \longrightarrow \tilde{\Delta}$ が $\tilde{G}$ の元の（Möbius 変換としての）制限になっているとすると，群同型

$$f_*: \mathrm{G} \longrightarrow \tilde{G},\ \ f_*(g) = f \circ g \circ f^{-1}$$

が定義できる．このとき f_* を f の誘導する同型写像（*induced isomorphism by f*）という．

簡単な例として，上半平面モデルをポアンカレ円板モデルへ移す Möbius 変換は，各モデルへ作用する Fuchs 群の間の同型を誘導する．誘導同型写像により，放物型変換のクラスが定義される．

Definition 3.4. (G, Δ) を函数群とする．$g \in G$ が APT（潜伏的放物型変換，*accidental parabolic transformation*）であるとは，別の函数群 $(\tilde{G}, \tilde{\Delta})$ が存在して，ある等角写像 $f: \Delta \to \tilde{\Delta}$ が誘導する準同型 $f_*: G \to \tilde{G}$ について $f_*(g)$ が斜航型になることである．

APT の例は[20]の p.87 が詳しい．APT について，次の主張が本質的である．

Lemma 3.8. 函数群 (G, Δ) の放物型変換 $p \in G$ は，リーマン面 Δ/G のカスプに対応すれば APT でない．

Proof. 放物型変換 p に対応する Δ/G のカスプを等角写像 $f: \Delta \to \tilde{\Delta}$ で任意の函数群 $(\tilde{G}, \tilde{\Delta})$ へ写像すると，$\tilde{\Delta}/\tilde{G}$ 上に再び $f_*(p)$ に対応するカスプが現れる．よって $f_*(p)$ の translation length は 0 になるので，$f_*(p)$ は必ず放物型である．よって p は APT でない．

（*q.e.d.*）

さらに Lemma 3.8 より次を得る．

Lemma 3.9. $G = \langle f, g \rangle < PSL(2, \mathbb{C})$ を擬フックス型穴空きトーラス群とする．G の APT でない放物型変換は $fgf^{-1}g^{-1}$ の共役類のみである．

Proof. $p \in G$ を APT でない放物型変換とする．等角写像 F で任意の函数群 $(\tilde{G}, \tilde{\Delta})$ へ写像すると $F_*(p)$ は必ず放物型である．よって $F_*(p)$ の translation length は 0 であり，$F_*(p) \neq \mathrm{id}$ より $F_*(p)$ はリーマン面上で puncture に対応している．したがって p はトーラスのカスプに対応するため，主張を得る．（*q.e.d.*）

以上より，「Jørgensen 数が 4 の擬フックス型穴空きトーラス群を実現できるか？」という問題は，「1 点穴空きトーラス群は APT をもつか？」という問題に帰着できる．まず，

Lemma 3.8 より次の主張が直ちに従う.

Lemma 3.10. Fuchs 群は APT をもたない.

この主張より次も従う.

Proposition 3.11. (G, Δ) を torsion free，非初等的な b-群，$g \in G$ を放物型変換とする．双正則写像 $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{H}^2$（リーマンの写像定理よりこの写像は存在する）に対して，$g \in G$ が APT であることの必要十分条件は，f の誘導同型 f_* について $f_*(g)$ が双曲型になることである.

Proof. $f_*(g)$ が放物型ならば，$f_*(g) \in f_*(G)$ であって $f_*(G)$ は Fuchs 群なので，Lemma 3.10 より $f_*(g)$ は APT ではない．よって g は APT でない．逆に，$f_*(g)$ が双曲型ならば定義より g は APT である. (*q.e.d.*)

これにより APT は，Möbius 変換としての軸が定義できる.

Definition 3.5. (G, Δ) を torsion free, 非初等的な b-群，$g \in G$ を APT，$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{H}^2$ を双正則写像とする（Proposition 3.11 より $f_*(g)$ は双曲型である）．Δ 上の曲線 A_g が APT g の軸であるとは，曲線 $f(A_g)$ が $f_*(g)$ の双曲型変換としての軸になっていることをいう.

これを用いて，次の定理を証明する.

Theorem 3.12（[11]）**.** 擬 Fuchs 群は APT をもたない.

Proof. G は擬 Fuchs 群，G の 2 つの不変成分をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とすると，それぞれ単連結で $\partial\Delta_1 = \partial\Delta_2 = \Lambda(G)$ となる．$p \in G$ を APT，x を p の固定点とする．APT p の軸 A_p は x を除けば Δ_1, Δ_2 のいずれか一方に含まれるので $A_p \subset \Delta_1$ とすると，A_p を境界にもち，Δ_1 の内部に含まれる単連結開集合 U が取れる．このとき A_p が p-不変なので，U が $\langle p \rangle$-完全不変となる．よって，放物型固定点 x はカスプになっていて，リーマン面 Δ_1/G 上で $U/\langle p \rangle$ がカスプとなる．これは Lemma 3.8 の主張に反する．よって p は APT でない.

(*q.e.d.*)

以上より G が持つ放物型変換は $fgf^{-1}g^{-1}$（の共役類）のみである．よって次が得られた.

Theorem 3.13（Y.）**.** 擬フックス型穴空きトーラス群 $G < PSL(2, \mathbb{C})$ に対して，$J(G) > 4$.

4　Markov numbers and quasi-fuchsian punctured torus groups

任意の $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ が，トレース恒等式

$$\mathrm{tr}^2(f) + \mathrm{tr}^2(g) + \mathrm{tr}^2(fg) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)\,\mathrm{tr}(fg) + \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) + 2$$

を満たすことはよく知られている．したがって, $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ が擬フックス型穴空きトーラス群を生成すれば Theorem 3.2 より,

$$\mathrm{tr}^2(f) + \mathrm{tr}^2(g) + \mathrm{tr}^2(fg) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)\,\mathrm{tr}(fg)$$

が成り立つ．これを用いて，ある特殊な条件下において擬フックス型穴空きトーラス群の Jørgensen 数が完全に決定できることを紹介する.

Definition 4.1.　正の整数の 3 つ組 (x, y, z) が *Markov triple* であるとは,

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

を満たすことをいう.

定義より次の主張が直ちに従う.

Lemma 4.1.　擬フックス型穴空きトーラス群 $\langle f, g\rangle < PSL(2, \mathbb{C})$ について，次の 2 条件は同値である.

（1）$(\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg))$ は Markov triple である.

（2）$\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg)$ はそれぞれ正の整数である.

$\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$ であって $\mathrm{tr}^2(f) + \mathrm{tr}^2(g) + \mathrm{tr}^2(fg) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)\,\mathrm{tr}(fg)$ ならば, $\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg)$ の中で負の整数は偶数個であり，2 つある場合は f, g の行列表現を取り替えることでそれらのトレースを正にできるので，Markov triple を考える際にはトレースの符号は本質的に問題にならない．以降, $\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg)$ はすべて 0 以上として議論する. Lemma 4.1 より，擬フックス型穴空きトーラス群 $G = \langle f, g\rangle$ について，$\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$ ならば $(\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg))$ は必ず Markov triple となっている.

ここで，Markov triple の擬フックス型穴空きトーラス群の生成系としての実現可能性を考えるために，まず $x = y = z$ となる Markov triple を求めると，$(x, y, z) = (3, 3, 3)$ のみであることが直ちに従う．今,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$UV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad UVU^{-1}V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

より，$(\mathrm{tr}\,(U), \mathrm{tr}\,(V), \mathrm{tr}\,(UV))$ はこれを満たしている．

Lemma 4.2. $G = \langle U, V \rangle$ は擬フックス型穴空きトーラス群である．

これは，生成系のトレースが，基本となる Markov triple $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ に対応する擬フックス型穴空きトーラス群の存在を保証するものである．さらに，Markov triple について次が知られている．

Theorem 4.3（[18]）**.** 全ての Markov triple は，$(3, 3, 3)$ に 2 種類の変換

$$\begin{aligned} M_1 &: (x, y, z) \mapsto (z, x, y) \\ M_2 &: (x, y, z) \mapsto (x, xy - z, y) \end{aligned}$$

を有限回行ったもので得られる．

この M_1, M_2 は生成系の取り替え

$$\begin{aligned} (f, g, fg) &\mapsto (fg, f^{-1}, g) \\ (f, g, fg) &\mapsto (f, f^{-1}g, g) \end{aligned}$$

に対するトレースの変換と 1 対 1 に対応している．したがって Theorem 4.3 より，ある生成系 (f, g) が $\mathrm{tr}\,(f), \mathrm{tr}\,(g), \mathrm{tr}\,(fg) \in \mathbb{Z}$ を満たせば，G の生成系を Markov triple $(3, 3, 3)$ に対応する Möbius 変換に取り替えることができる．

逆に，全ての G の生成系が Markov triple に対応するかどうかは議論が必要だが，このとき次も成り立つ．

Lemma 4.4. $G < PSL\,(2, \mathbb{C})$ を擬フックス型穴空きトーラス群とする．ある G の生成系 $f, g \in PSL\,(2, \mathbb{C})$ について $\mathrm{tr}\,(f), \mathrm{tr}\,(g), \mathrm{tr}\,(fg) \in \mathbb{Z}$ ならば, G の任意の生成系 (X, Y) は $\mathrm{tr}\,(X), \mathrm{tr}\,(Y), \mathrm{tr}\,(XY) \in \mathbb{Z}$ を満たす．

以上より，擬フックス型穴空きトーラス群 G は $\mathrm{tr}\,(f), \mathrm{tr}\,(g), \mathrm{tr}\,(fg) \in \mathbb{Z}$ となる生成系 $\{f, g\}$ が 1 つ見つかると，G のいかなる生成系も Markov triple に対応する．よって，G の生成系に対する $J\,(f, g)$ の最小値を与えるのは $(\mathrm{tr}\,(f), \mathrm{tr}\,(g), \mathrm{tr}\,(fg)) = (3, 3, 3)$ のときであり，先述の通りこのような生成系 (U, V) が必ず存在する．この U, V に対して $J\,(U, V) = 9$ なので，次を得る．

Theorem 4.5（Y.）．擬フックス型穴空きトーラス群 $G < PSL(2, \mathbb{C})$ について，$\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$ を満たす G の生成系 $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$ が存在すれば，$J(G) = 9$.

参考文献

［1］ H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics, 1909, Sringer-Verlag 2007.

［2］ J. Gilman, *A geometric approach to Jørgensen's inequality*, Adv. in Math. **85** (1991), 193–197.

［3］ L. Greenberg, *Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups*, in Discrete Groups and Automorphic Functions, edited by W. J. Harvey, Academic Press (1977), 199–257.

［4］ T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.

［5］ T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **1** (1975), 245–248.

［6］ L. Keen and C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, Topology. **32** (1993), 719–749.

［7］ C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type)*, Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 409–430.

［8］ C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type II (Countably infinite case)*, Osaka J. Math. **41** (2004), 491–506.

［9］ C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably infinite case)*, Kodai Math. J. **28** (2005), 248–264.

［10］ A. Marden, *Schottky groups and circles*, In Contribution to Analysis, Academic Press, New York and London, (1974), 273–278.

［11］ B. Maskit, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, (1987).

［12］ D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's pearls. The vision of Felix Klein*, Cambridge Univ. Press, New York, 2002.

［13］ M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen numbers of discrete groups*, RIMS Koukyuroku **1518** (2006), 105–118.

［14］ H. Sato, *Jørgensen's inequality for classical Schottky groups of real type*, Dedicated to Professor Mitsuru Nakai on his sixtieth birthday, J. Math. Soc. Japan, **50**, (1998), 945–968.

［15］ H. Sato, *The Jørgensen number of the Whitehead link group*, Bol. Soc. Mat. Mexicana(3) **10**, Special issue (2004), 495–502.

［16］ H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contem. Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. kra and B. Maskit, (2000), 271–287.

［17］ 科学研究費補助金研究成果報告書 課題番号 : 19549178.

[18] C. Series, *The Geometry of Markoff Numbers*, The Mathmatical Intelligencer **7**, (1994), 20−29.

[19] P. B. Shalen, *Orders of elements in finite quotients of Kleinian groups*, Pacific J. Math. **256**, No. 1 (2012), 211−234.

[20] 谷口雅彦，松崎克彦，双曲的多様体とクライン群，日本評論社 1993.

[21] H. Yamamoto, *An example of a non-classical Schottky group*, Duke Math J. 63 (1991), 193−197.

[22] R. Yamazaki, *Some extensions of Oichi-Sato's theorem for the Jørgensen numbers of the Kleinian groups*, master thesis, University of Tokyo (2016).