

Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections

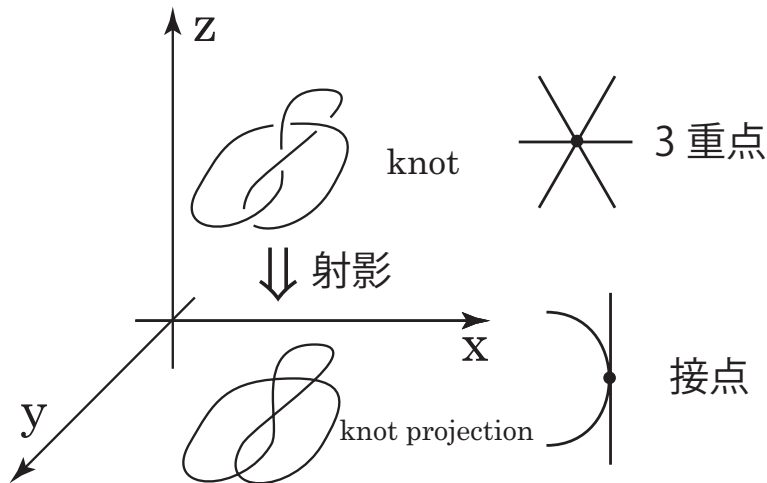
瀧村 祐介

概 要

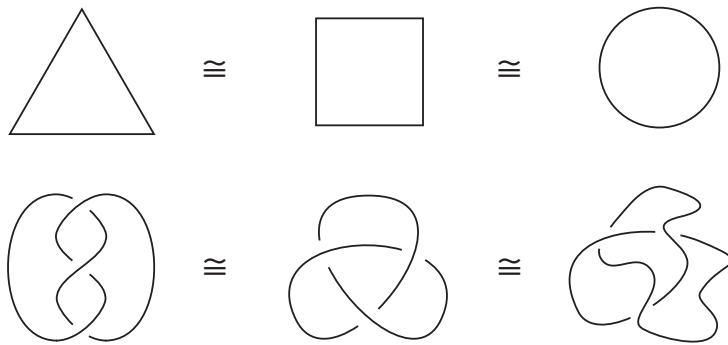
球面上の knot projection における, 射影された Reidemeister move RI, RII, RIII を用いて strong(1, 3), weak(1, 3) という同値関係を定義する. この同値関係で, 2つの knot projection が移り合うための条件をいくつか得た. なお, この研究は伊藤昇氏 (早稲田大学高等研究所), 谷山公規氏 (早稲田大学教育学部) との共同研究である.

Definition 1.

\mathbb{R}^3 に滑らかに埋め込まれた円周を knot という. knot を 2次元平面に射影したものを knot projection という. その際, 3重点や接点がないようにする. イメージとしては, knot projection とは knot の影のことである.

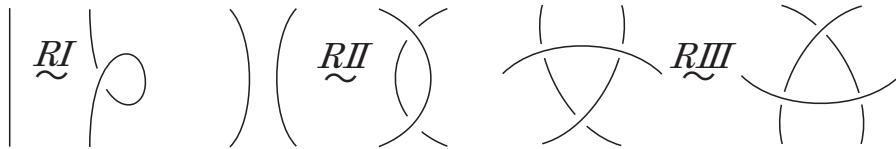


2つの図形 A, B において, A から B への連続写像 $f: A \rightarrow B$ が全単射で, その逆写像も連続であるとき, f を同相写像という. 2つの knot K, K' が同位であるとは, \mathbb{R}^3 の向きを考えると, K を K' に移す同相写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, \mathbb{R}^3 の向きを保存するようなものが存在することである. 2つの knot K, K' が同位であるとき, $K \cong K'$ と表す.



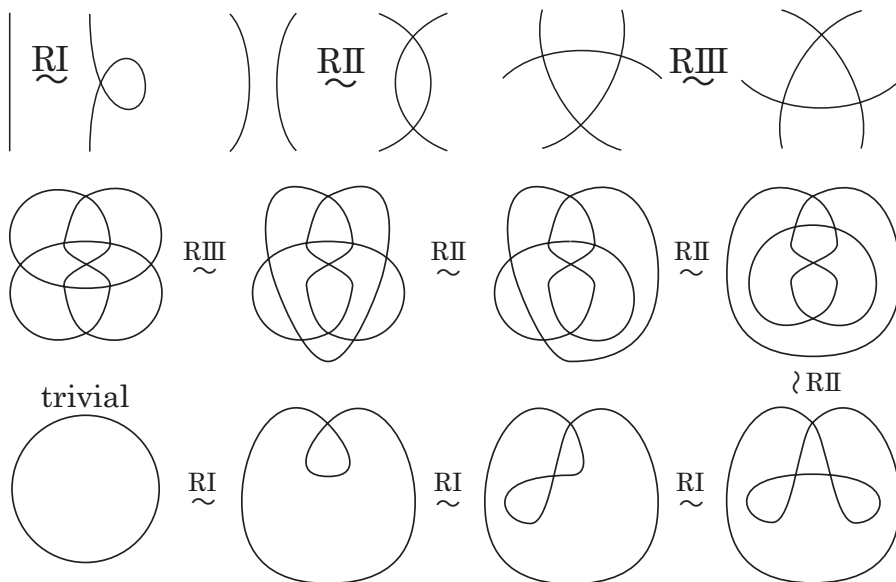
knot について次の結果が知られている.

「2つの knot K, K' が同位であるための必要十分条件は、有限回の $RI, RII, RIII$ で K を K' に変形出来ることである。」

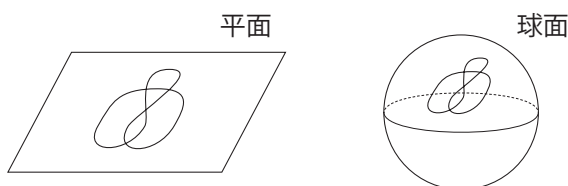


knot projection について次の結果が知られている.

「任意の2つの knot projection P, P' において、有限回の $RI, RII, RIII$ で P を P' に変形出来る. 特に、全ての knot projection は、有限回の $RI, RII, RIII$ によって trivial knot projection に変形出来る。」なお、trivial knot projection とは交点のない knot projection のことである.

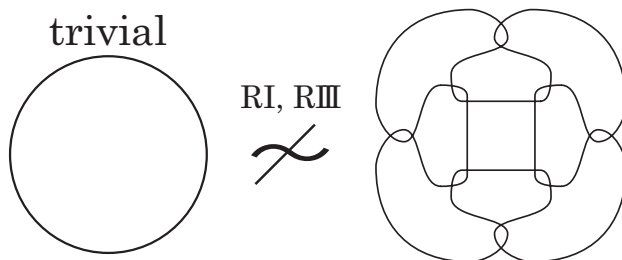


この紀要では knot projection を，平面上に無限遠点をたすことで，球面上で扱う．

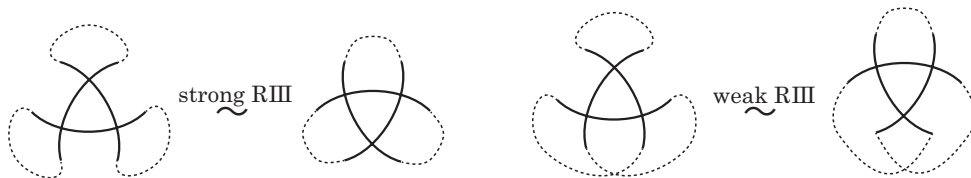


空間内における knot の研究は盛んに行われている．今回は球面上の knot projection において得られた結果を紹介する．先行研究として，3つの局所変形のうち RII, RIII の2つに制限し，knot projection を分類する研究がされている [1]．RI, RII の2つに制限して分類することについては，[2, 3, 4] で扱われており，前回の紀要 [5] で詳しく記述した．そこで今回は，RI, RIII の2つに制限をして，knot projection を分類することを考える．

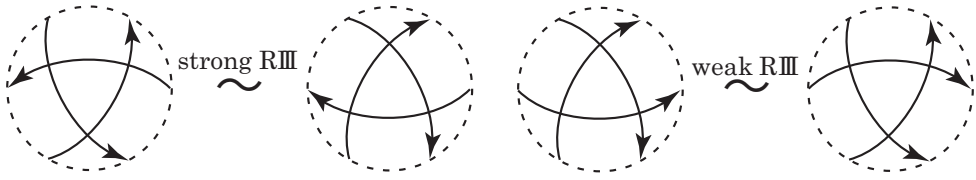
[6] では，図の knot projection は RI, RIII では trivial knot projection と移り合わないことが示されている．



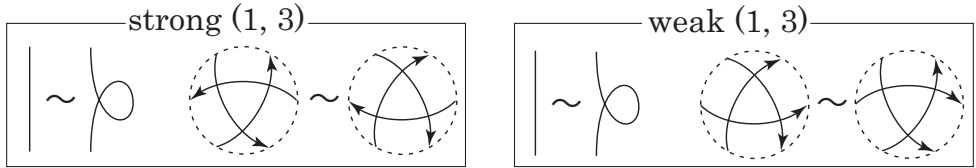
15 交点以下の knot projection において，RI, RIII で trivial knot projection に移り合わないものがあるかどうかは，まだ知られていない．それゆえ，球面上の knot projection を RI, RIII で分類することは難しい．そこで RIII の外側のつながり方で，さらに細かく strong RIII, weak RIII を定義する．



これらは knot projection に向きを付けて考えると，次のように定義することも出来る．knot projection の向きの付け方にはよらないことは，定義からすぐにわかる．



これらと RI を組み合わせて, strong(1, 3), weak(1, 3) を次のように定義する.



この strong (1, 3), weak (1, 3) で knot projection を分類することを考える.

Theorem 1 [7].

knot projection P において, P の trivializing number (定義は Hanaki [8] を参照) を $tr(P)$ と表すことにする.

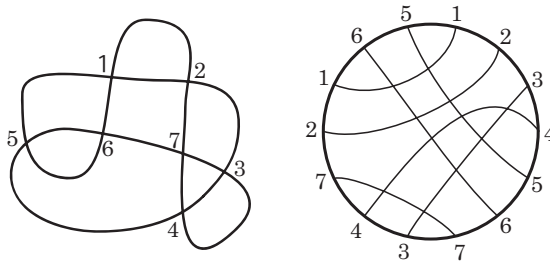
- (1) RI において, $tr(P)$ は不変である.
- (2) weak RIII において, $tr(P)$ は不変である.
- (3) strong RIII において, $tr(P)$ は不変か ± 2 変化する.

Corollary 1 [7].

weak(1, 3) において, $tr(P)$ は不変である.

Definition 2.

knot projection の交点の逆像をつなげたものを, コード図という.



Theorem 1 を証明するために, 次の Theorem 2 を [8] より引用する.

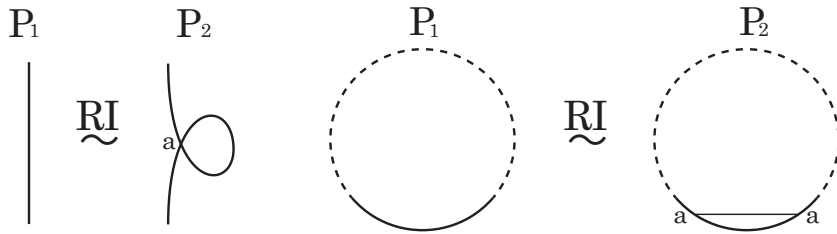
Theorem 2 [8].

$tr(P) = \min \{P \text{ のコード図において cross chord がなくなるまでコードを抜きとる数} \}$

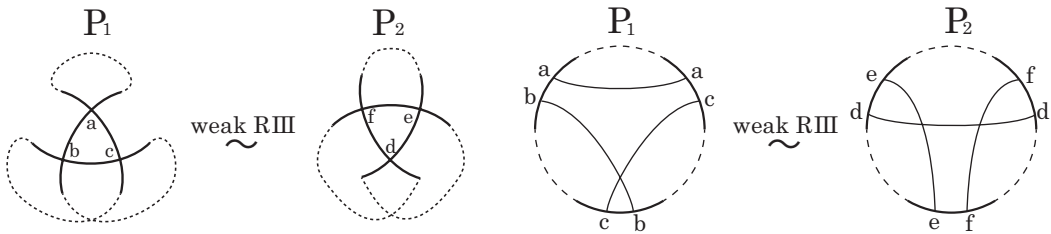


Proof of Theorem 1 [7].

(1) RI において、cross chord の数が不変であることから、証明することが出来る。

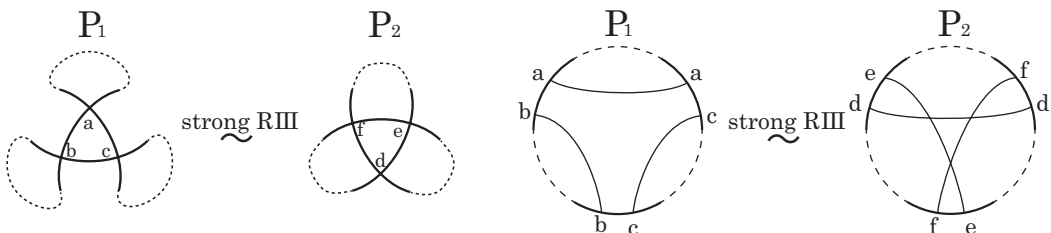


(2) weak RIII において、コード図がどのように変化するか調べることにより、証明することが出来る。

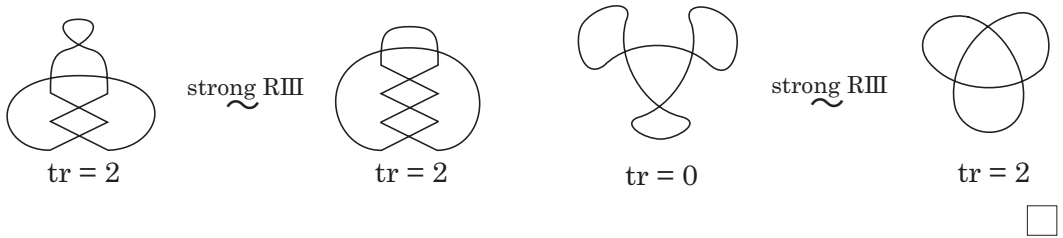


Theorem 2 より、cross chord がなくなるまで $tr(P_1)$ 本のコードを抜きとる際、点線の部分について P_1, P_2 に対し、同じように抜き取り、実線部分では P_1 で $\{b\}$ または $\{c\}$ のコードを抜きとるならば、 P_2 では $\{d\}$ のコードを抜きとればよい。 P_1 で $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ または $\{b, c\}$ のコードを抜きとるならば、 P_2 では $\{d, e\}$, $\{d, f\}$ または $\{e, f\}$ のコードをそれぞれ対応して抜きとればよい。 P_1 で $\{a, b, c\}$ のコードを抜きとるならば、 P_2 では $\{d, e, f\}$ のコードを抜きとればよい。これより、最小性から $tr(P_1) \geq tr(P_2)$ 。同様に $tr(P_1) \leq tr(P_2)$ 。よって weak RIII において、 $tr(P)$ は不変である。

(3) strong RIII においても同様に、コード図の変化を調べることにより、証明することが出来る。

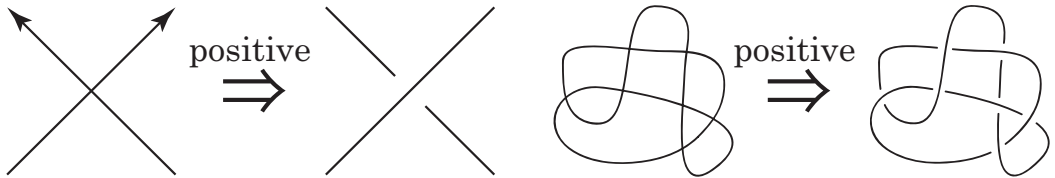


strong RIII において, $tr(P)$ が不変, ± 2 変化する例としては, 次のようなものがある.



Definition 3 [2].

図の操作を positive 化するという. knot projection に向きをつけ positive 化すると, knot が一意に得られる. knot projection の向きの付け方にはよらない.

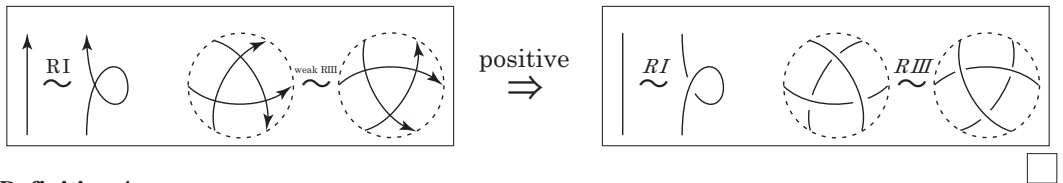


Theorem 3 [2].

knot projection P_1, P_2 が weak(1, 3) で移り合う $\Rightarrow P_1$ と P_2 を positive 化して得られる knot が同位である.

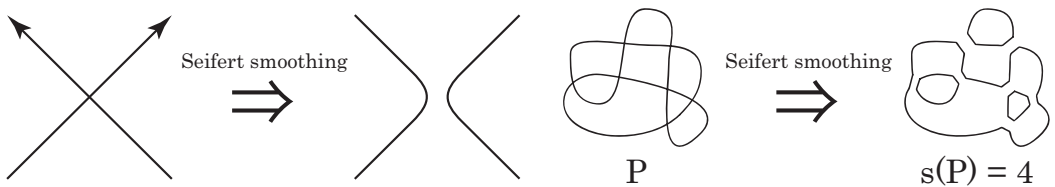
Proof of Theorem 3 [2].

RI, weak RIII を positive 化すると, knot における RI, RIII となることから, 証明出来る.



Definition 4.

knot projection に向きをつけ, 全ての交点を Seifert smoothing したあとに出来る circle の数を $s(P)$ と表す. $s(P)$ は向きのつけ方によらない.

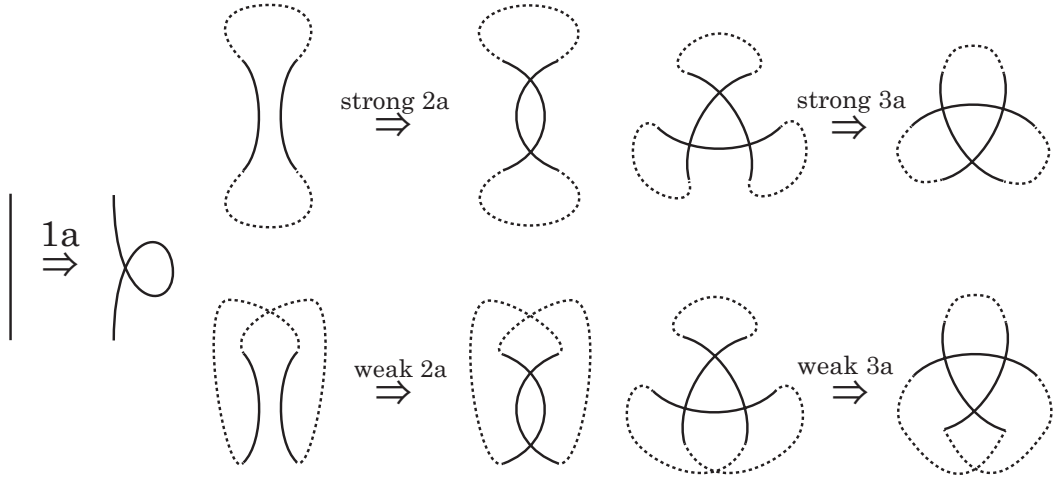


Theorem 4 [9].

knot projection P の交点数を $c(P)$ とする. $c(P) - s(P)$ は weak (1, 3) で不変であり, 奇数である.

Proof of Theorem 4 [9].

図のように RII を外側のつながり方で strong RII, weak RII と定義し, 1a, strong 2a, weak 2a, strong 3a, weak 3a を図のように定義する.



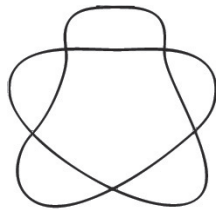
1 回の各局所変形で $c(P), s(P)$ がどのように変化するかをまとめると, 表のようになる. このことから, 示される.

	1a	strong 2a	weak 2a	strong 3a	weak 3a
$c(P)$	1	2	2	0	0
$s(P)$	1	0, 2	0	0, ± 2	0
$c(P) - s(P)$	0	0, 2	2	0, ± 2	0

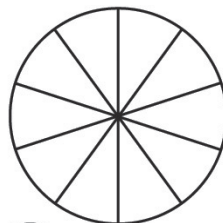
□

Definition 5.

P のコード図において, 部分として入っている cross chord の総数を $\otimes(P)$ と表す.



P



$\otimes(P) = 10$

Theorem 5 [7].

- (1) RI において, $\otimes(P)$ は不変である.
- (2) weak RIII において, $\otimes(P)$ は ± 1 変化する.
- (3) strong RIII において, $\otimes(P)$ は ± 3 変化する.

Corollary 2 [7].

strong(1, 3) において, $\otimes(P)$ は mod 3 で不変である.

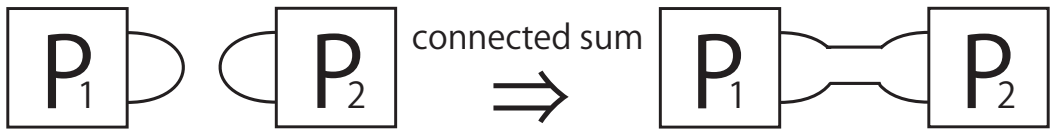
Proof of Theorem 5 [7].

Theorem 1 と同様, コード図の変化を調べることにより, 証明することが出来る.

□

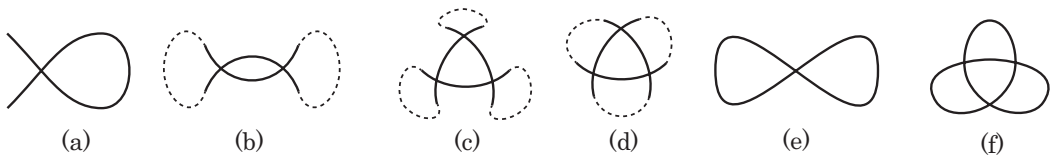
Definition 6.

knot projection P_1, P_2 において, 図の操作を connected sum という. 一般に, P_1, P_2 の connected sum は arc の選び方によるので, 一意的には定まらない

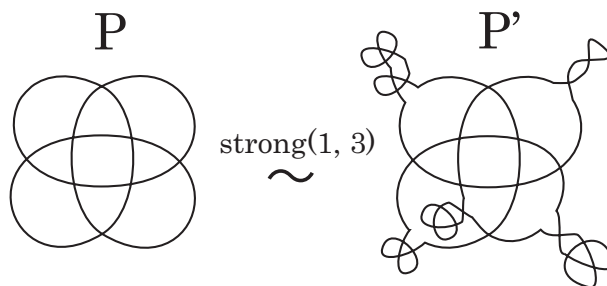


Theorem 6 [7].

P が図の (a), (b), (c), (d) のいずれも含まず, P が P' と strong(1, 3) で移り合うならば, P は P に (e), (f) を有限個 connected sum したものである.

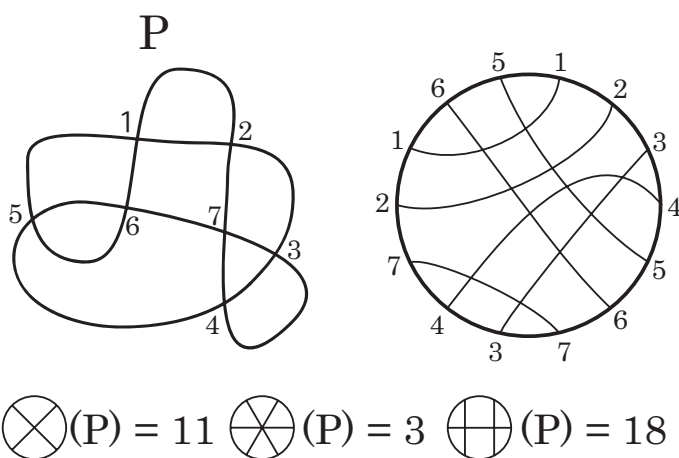
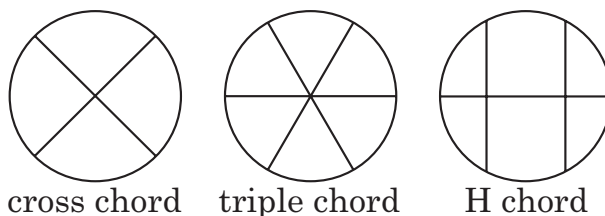


例えば, 次のようなものがある.



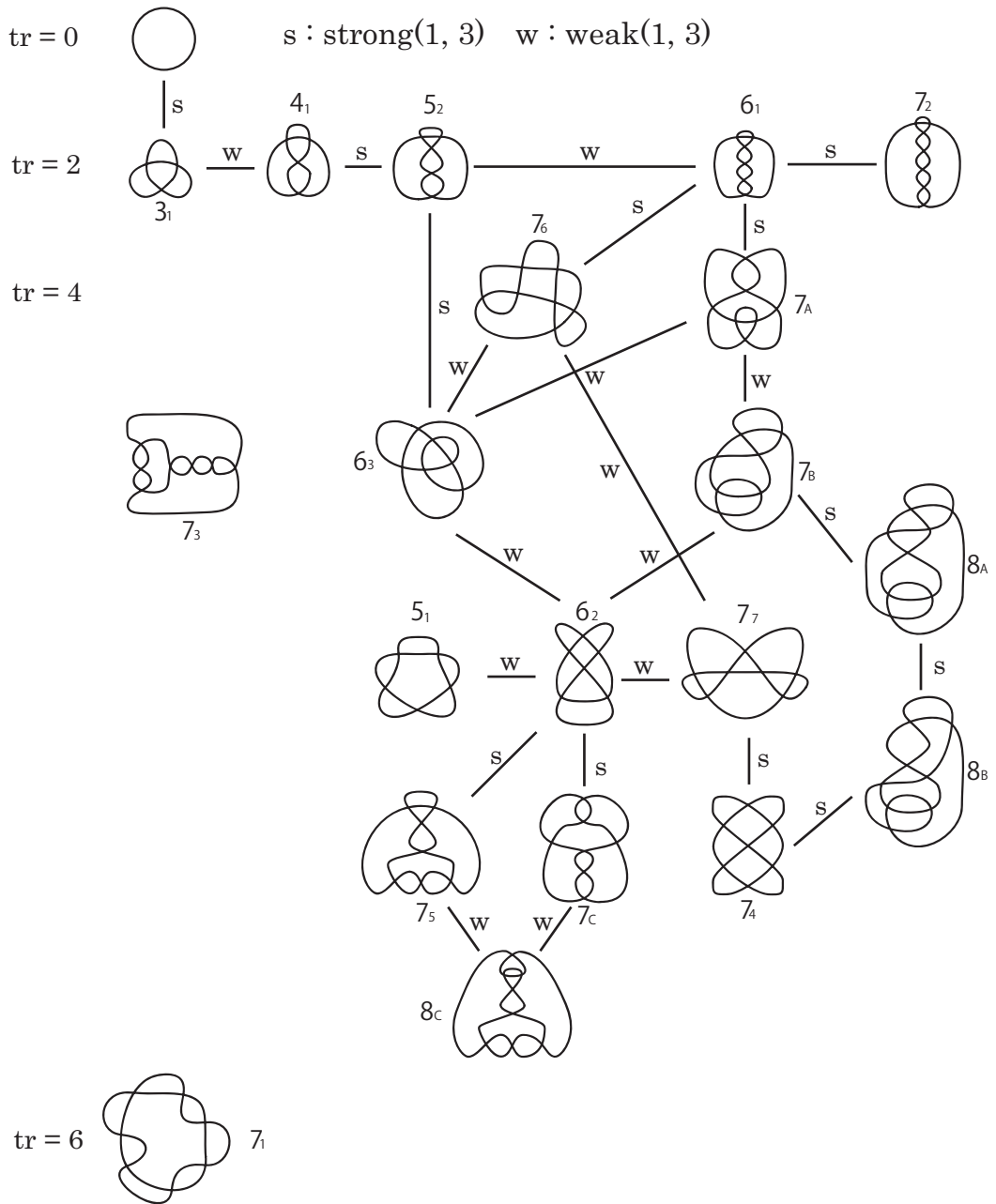
Definition 7 [10].



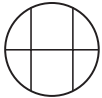


















コード図において, cross chord, triple chord, H chord を図のように定義し, knot projection P のコード図において部分として入っている cross chord, triple chord, H chord の総数を, それぞれ $\otimes(P)$, $\oplus(P)$, $\oplus(P)$ と表す. $\lambda(P) = \frac{1}{4} \{3\oplus(P) - 3\oplus(P) + \otimes(P)\}$ とする.




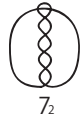

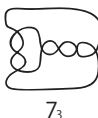


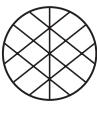




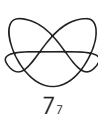







**Theorem 7 [10].**

$\lambda(P)$ は整数であり, $\text{strong}(1, 3)$ で不変である.

7 交点までの, prime で reduced な knot projection を表にした. ($8_A, 8_B, 8_C$ は補助的に載せている.) s で結ばれているペアは 1 回の strong RIII と有限回の RI で, w で結ばれているペアは 1 回の weak RIII と有限回の RI で移り合うことを表している.



	コーン _区	$s(P)$				$\lambda(P)$
		1	0	0	0	0
 3 ₁		2	3	1	0	0
 4 ₁		3	4	0	4	4
 5 ₁		2	10	10	0	-5
 5 ₂		4	7	3	6	4
 6 ₁		5	8	0	16	14
 6 ₂		3	11	7	10	5
 6 ₃		3	10	6	8	4
 7 ₁		2	21	35	0	-21

	コード図	$s(P)$				$\lambda(P)$
 7_2		6	11	5	20	14
 7_3		4	18	22	12	-3
 7_4		6	15	9	24	15
 7_5		4	14	12	14	5
 7_6		4	11	3	18	14
 7_7		4	12	4	20	15
 7_A		4	11	3	18	14
 7_B		4	12	4	20	15
 7_C		4	14	12	14	5

参考文献

- [1] H. Whitney, On regular closed curves in the plane. *Compositio Math.* 4 (1937), 276-284.
- [2] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), no. 14, 1350085, 14pp.
- [3] N. Ito and Y. Takimura, Addendum: (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), no. 8, 1491001, 2pp.
- [4] M. Khovanov, Doodle groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), no. 6, 2297-2315.
- [5] 瀧村祐介, (1, 2) homotopy on knot projections. 学習院高等科紀要 (2014), 53-61.
- [6] T. J. Hagge and J. T. Yazinski, On the necessity of Reidemeister move 2 for simplifying immersed planar curves. *Banach Center Publ.* **103** (2014), 101-110.
- [7] N. Ito, Y. Takimura, and K. Taniyama, Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *Osaka J. Math.* **52** (2015), no. 3, 617-647.
- [8] R. Hanaki, Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs. *Osaka J. Math.* **47** (2010), no. 3, 863-883.
- [9] N. Ito, Based chord diagrams on spherical curves, preprint.
- [10] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41**(2015), no. 2, 701-725.