約数の積

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第 11 回

高城彰吾

11.1 今回の問題

p を自然数（正の整数）とする．その正の約数の総和を求める問題は，高等学校では数学 B の「等比数列」の単元で扱われる．教科書によっては先の学習指導要領改訂で数学 A に加えられた「整数の性質」の単元で扱っているものもある．では和ではなく，自然数 p の約数をすべて掛け合わせるとどうなるだろうか．これは教員のある勉強会で紹介されたちょっとした発展問題であるが，筆者がその後考えた数学 A および B での扱い方とその答に関する 1 つの解釈について，高校 3 年生の授業で扱ったときの経験を基に述べてみたい．

11.2 結果の推定から始める方法

高校生にこの問題を提示するとき，答を示して証明させることもあり得るが，数学 A で扱う場合など，予備知識の少ない生徒により関心を持たせるには，具体例から結果を推定させる帰納の段階を踏むのが効果的と考えられる．小学校から慣れ親しんだ整数についての問題であるから，多くの生徒にとって取りかかり易いようだ．例えば次のような発問から始め，生徒の思考を辿ってみよう．

問：自然数 p に対して，その約数をすべて掛け合わせた値を $m(p)$ とする．

（1）$m(3)$ を求めなさい．

（2）$m(10)$ および $m(18)$ を求めなさい．

その辺りで，生徒が自分でいろいろ試すことも考えさせたい．

（3）他にも自分でいくつか具体的な場合を挙げて求めてみよう．

上の (1) (2) に挙げた数の場合，その約数はどれも偶数個である．約数が奇数個の場合について調べることの必要性に気づくかどうかに留意する．行なった授業では，「p が平方数のときについて調べたい」という生徒が複数いた．小学校の算数で，与えられた自然数の約数を列挙したことは誰にでもあると思われるが，1 から始めて小さい方から順々に約数を探していくと，それと掛け合わせて元の自然数となるペアの約数も見つかる．約数が奇

数個の場合は中央の約数がそれ自身とペアになるという経験が基になって「p が平方数のとき」を意識すると考えられる．またこのことは，この問題の解答に，約数の個数が関係していることに気づくきっかけともなる重要な点である．次の段階として

（4）これまでの結果から $m(p)$ を推定してみよう．

と問うことになる．いくつかの具体例で得られた事実を一般化する帰納の段階である．約数の個数を n とすると，これまでの計算は

$p=3$ のとき　$m(3)=1\times 3=3$，$n=2$
$p=10$ のとき　$m(10)=1\times 2\times 5\times 10=100$，$n=4$
$p=18$ のとき　$m(18)=1\times 2\times 3\times 6\times 9\times 18=18^3=5832$，$n=6$

となることから，

$$m(p)=p^{\frac{n}{2}}$$

という推定をすることは生徒にとってさほど難しくない．

生徒は推定をまずいったん式で表現する．そのうえで，自分で立てたその推定を客観的に見て必要なら修正を加えようとする．「約数の個数を n とする」という設定は言わば誘導であるが，すべての場合を尽くす一般化を考える際に，試した具体的な場合が全体を代表しているように配慮するための観点を与えるという意味もある．この段階で n が奇数（p が平方数）の場合を考える必要に多くの生徒が気づいたようである．数学Ⅱの指数の拡張で分数指数を履習している生徒であれば，n が奇数の時はどうだろうか，という上記の発想につながり易い．分数指数を知らない生徒は，n が偶数の場合に限って上の式を立て，n が奇数の場合を見逃す可能性があるため，「n が 2 で割れない心配はないのかな？」「$p=9$ や $p=16$ についてはどうだろうか？」という発問が，n が偶数の場合にひとまず上の式を立てたあとのタイミングに適切と思われる．分数指数を知らない生徒は，p が平方数の場合について

$$m(p)=\left(\sqrt{p}\right)^n=\sqrt{p^n}$$

という式を立てるだろう．n が偶数の場合も $m(p)=p^{\frac{n}{2}}=\sqrt{p^n}$ が成り立ち，同じ式で表されるということに気づく段階を経る必要がある．

11.3　総和の計算を参考にする方法

約数の総和については数学 B で「等比数列の和」の応用として扱われる．これを学んだばかりの生徒であれば，当然これを参考に考えるであろう．すなわち，p の素因数分解

から始める．例えば $p=400$ の場合を考えよう．

$p=400=2^4\cdot5^2$ であるから，すべての約数を書き並べると

$$
\begin{array}{l}
2^0\cdot5^0,\ 2^1\cdot5^0,\ 2^2\cdot5^0,\ 2^3\cdot5^0,\ 2^4\cdot5^0\\
2^0\cdot5^1,\ 2^1\cdot5^1,\ 2^2\cdot5^1,\ 2^3\cdot5^1,\ 2^4\cdot5^1\\
2^0\cdot5^2,\ 2^1\cdot5^2,\ 2^2\cdot5^2,\ 2^2\cdot5^2,\ 2^2\cdot5^2
\end{array}
$$

である．これらをまず横に掛け合わせると，指数法則により

$$
\begin{aligned}
2^0\cdot5^0\times2^1\cdot5^0\times2^2\cdot5^0\times2^3\cdot5^0\times2^4\cdot5^0 &= 2^{0+1+2+3+4}\cdot(5^0)^{(4+1)} = 2^{\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)}\cdot(5^0)^{(4+1)}\\
2^0\cdot5^1\times2^1\cdot5^1\times2^2\cdot5^1\times2^3\cdot5^1\times2^4\cdot5^1 &= 2^{0+1+2+3+4}\cdot(5^1)^{(4+1)} = 2^{\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)}\cdot(5^1)^{(4+1)}\\
2^0\cdot5^2\times2^1\cdot5^2\times2^2\cdot5^2\times2^3\cdot5^2\times2^4\cdot5^2 &= 2^{0+1+2+3+4}\cdot(5^2)^{(4+1)} = 2^{\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)}\cdot(5^2)^{(4+1)}
\end{aligned}
$$

となり，さらに縦に掛け合わせると

$$
m(400)=\left(2^{\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)}\right)^{(2+1)}\cdot(5^{0+1+2})^{(4+1)}=\left(2^{\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)}\right)^{(2+1)}\cdot\left(5^{\frac{1}{2}\cdot2\cdot(2+1)}\right)^{(2+1)}=(2^4\cdot5^2)^{\frac{1}{2}(4+1)(2+1)}
$$

ここで $n=(4+1)(2+1)=15$ であるから

$$
m(400)=400^{\frac{15}{2}}
$$

が成り立つことが分かる．この計算を一般化して，そのまま証明が得られる．

11.4　2 種の証明

上の 2 節のそれぞれの考え方に対応する 2 つの証明を紹介する．

［証明その 1 ］

p の約数を小さい方から $d_1, d_2, \ldots, d_n$ とする．$d_1=1$，$d_n=p$ である．

ｉ）n が偶数の場合

$n=2k$ とおくと，$d_1d_{2k}=d_2d_{2k-1}=\cdots d_kd_{k+1}=p$ であるから，

$$
\begin{aligned}
m(p)&=(d_1\times d_2\times\cdots\times d_k)\times(d_{k+1}\times\cdots\times d_{2k-1}\times d_{2k})\\
&=(d_1\times d_{2k})\times(d_2\times d_{2k-1})\times\cdots\times(d_k\times d_{k+1})=p^k=\sqrt{p^n}
\end{aligned}
$$

ⅱ）n が奇数の場合

$n=1$ のとき $p=1$ であるから $m(p)=1=\sqrt{1}=\sqrt{p^n}$ は自明.

$n>1$ のとき，$n=2k-1$ とおくと，

$$
d_1\times d_{2k-1}=d_2\times d_{2k-2}=\cdots d_{k-1}\times d_{k+1}=d_k^{\,2}=p
$$

であるから，

$$\begin{aligned} m(p) &= (d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_{k-1}) \times d_k \times (d_{k+1} \times \cdots \times d_{2k-2} \times d_{2k-1}) \\ &= (d_1 \times d_{2k-1}) \times (d_2 \times d_{2k-2}) \times \cdots \times (d_{k-1} \times d_{k+1}) \times d_k \\ &= p^{k-1}\sqrt{p} = \sqrt{p^{2k-1}} = \sqrt{p^n} \end{aligned}$$

ｉ)，ⅱ)より，$m(p) = \sqrt{p^n}$ が成り立つ．（証明終）

［証明その 2］

p の素因数分解を $p = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_m^{e_m}$ とする．ここで $q_1, q_2, \ldots, q_m$ は互いに異なる素数であり，p の約数の積 $m(p)$ の素因数もこれらがすべてである．

p の約数は，素因数ごとに，まず $q_1^{\,0}, q_1^{\,1}, q_1^{\,2}, \ldots, q_1^{\,e_1}$ から 1 つをとり，次に $q_2^{\,0}, q_2^{\,1}, q_2^{\,2}, \ldots, q_2^{\,e_1}$ から 1 つ，…，$q_m^{\,0}, q_m^{\,1}, q_m^{\,2}, \ldots, q_m^{\,e_1}$ から 1 つずつとって掛け合わせて作られるから，その個数について

$$(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_m+1) = n$$

が成り立つ．1 つの素因数 q_1 に着目すると，p の約数の中で素因数 q_1 を含まないものは $(e_2+1)\cdots(e_m+1)$ 個あり，1 個含むものも同じ $(e_2+1)\cdots(e_m+1)$ 個，以下同様に e_1 個含むものも同じ $(e_2+1)\cdots(e_m+1)$ 個あるから，約数の積 $m(p)$ の素因数分解での q_1 の指数は

$$(0+1+2+\cdots+e_1)(e_2+1)\cdots(e_m+1) = \frac{1}{2}e_1(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_m+1) = \frac{1}{2}e_1 n$$

となる．他の素因数についても同様であるから，

$$m(p) = q_1^{\frac{1}{2}e_1 n} q_2^{\frac{1}{2}e_2 n} \cdots q_m^{\frac{1}{2}e_m n} = \left(q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_n^{e_n}\right)^{\frac{n}{2}} = p^{\frac{n}{2}}$$

が成り立つ．（証明終）

11.5　得られた式の解釈

さて，次の段階は生徒には少々難しくなるが，数学教員としては持っておきたい感覚に関わることである．すなわち $m(p) = p^{\frac{n}{2}}$ という式に対する解釈，つまりこの式は何を表しているのだろうか．

左辺が n 個の約数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ の積であることと，右辺の指数に n があることから，両辺の n 乗根をとることを思いつく．すると

$$\sqrt[n]{d_1 d_2 \cdots d_n} = \sqrt{p}$$

となる．左辺は n 個の約数 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ の相乗平均であり，あまり見慣れない．一方，右辺は見覚えがある．自然数 p が素数かどうかを調べる際に 2 から順に素数で除してみると

きの上限の値であり，$2 \leq q \leq \sqrt{p}$ の範囲に約数となる素数 q がなければ p は素数と判断される．もし $q \leq \sqrt{p}$ の範囲に約数があればそのペアとなる約数は $\sqrt{p} \leq q$ の範囲にあり，つまり自然数 p の約数は $\sqrt{p}$ を中心にその両側に「積の意味で」対称に分布し，約数すべての相乗平均はその中心にある $\sqrt{p}$ に一致するということである．言われてみれば自然なことで，もしかしたら自明なのではないか，とも思えてくるというのは大げさだろうか．高校では 3 個以上の数に対する相乗平均を扱うことはほぼないが，ここに出番があったようだ．