対称と回転

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第 10 回

高城彰吾

10.1 今回の変更

新しい学習指導要領では，数学 C は一部の内容を数学Ⅲに移行して科目の設定がなくなり，この結果，行列に関する単元は高校では扱われなくなった．行列は数学教育の現代化を謳う指導要領において初めて高校数学に取り入れられ，その後の指導内容の精選・厳選の中で対象学年の変更，および 3 次正方行列や掃き出し法，1 次変換などの項目の扱いに変化がみられたが，理科系のみならず経済学など広い範囲の専門教育における数学的素養として高校数学に定着してきた．高校から大学教育への橋渡しとなる教材として，専門的な数学への興味を抱かせつつ抽象的な理論の初等的な具体例として進学後の学習のスムーズな開始を助ける意義もあったと考えている．今後の状況の変化を注意深く見守りたい．

この稿では，大学への橋渡し教材としての一側面にスポットを当て，高校で行列を扱った意味をこの機会に考えておくものである．

10.2 対称移動と回転移動

数学 C の教科書で扱われる基本的な 1 次変換である対称移動と回転移動について考える．平面上の 1 次変換で合同変換であるものはこの 2 種類またはその合成変換である．この中で，2 つの回転移動の合成はやはり回転移動である（すなわち代数的に合成に関して閉じている）が，対称移動はそうではない．実際 x 軸に関する対称移動を f，直線 $y=x$ に関する対称移動を g としたとき，それらの合成 $g\circ f$ は原点を中心とする 90° の回転移動となる．f, g を表す行列をそれぞれ A, B とすると，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であり，合成変換 $g\circ f$ の行列は

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}$$

となることで確かめられる．このことは線対称移動というものをそれだけ取り出して考えることの不完全さを表し，言い換えると線対称移動と回転移動をまとめて捉えるのが自然であると考えられる．さらには，平面における原点に関する点対称移動が原点を中心とす

る 180° の回転移動であることを考え合わせて，平面上の線対称移動は立体的に捉え直して対称軸に関する 180° の回転移動とみなすという発想に導かれるのが自然であろう．空間における直線を軸とする回転移動の集合は，直観として合成に関して閉じているから，平面上の対称移動を空間の回転移動とみなせば，その合成が回転移動であることは自然に理解される．

xy 平面における原点を中心とする角 θ の回転移動を 3 次元空間に自然に拡張し，z 軸を軸とする回転移動と捉えれば，その行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．同様に，x 軸を軸とする回転移動の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である（このとき，角の向きは y 軸の正の向きから z 軸の正の向きに向かう向きを正としている）．ここで $\theta = 180°$ とおき，xy 平面上の点に作用させると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから，空間における x 軸を軸とする 180° の回転移動を xy 平面に制限（z 座標を無視）すれば，x 軸に関する対称移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

と一致することが分かる．このようにして，平面上の点対称移動および線対称移動は空間 R^3 における回転移動とみなすことができる．なお以下において，空間での回転角の向きの正負については状況に応じて柔軟に捉えることにする．

例 1　xy 平面上の直線で，原点を通り x 軸の正の向きと角 α をなすものを l（方程式は $y = \tan\alpha \cdot x$）とする．直線 l に関する平面上の対称移動については教科書の中にも発展として扱うものがある．これを空間での回転移動の立場から考えて見よう．l を軸とする空間での角 θ の回転移動を h_θ とする．h_θ は次の 2 つの変換

$$f_\theta：x \text{ 軸を軸とする角 } \theta \text{ の回転移動　行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$g_\alpha：z \text{ 軸を軸とする角 } \alpha \text{ の回転移動　行列は } \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて,

$$h_\theta = g_\alpha \circ f_\theta \circ g_\alpha^{-1}$$

と分解できることは明らかであろう．よってその行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\theta & \sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\theta) & \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\theta) & \cos^2\alpha\cos\theta+\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\theta \\ -\sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と求められる．とくに $\theta=180°$ とおくと

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これが空間での直線 l に関する 180° の回転移動の行列であり，xy 平面に制限すれば，l に関する平面上の対称移動を表す行列

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

が得られる．　□

例 2　この節で最初に挙げた平面上の 2 つの線対称移動の合成が原点を中心とする回転移動になる例を，空間での回転移動として捉え直してみる．例 1 で $\alpha=45°$ とおくと直線 l が $y=x$ の場合となる．空間での x 軸を軸とする回転移動 f_θ と，l を軸とする回転移動 h_θ において $\theta=180°$ としたものをそれぞれ f_π, h_π で表すと，それぞれの行列は

$$f_\pi : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad h_\pi : B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．その合成変換 $h_\pi \circ f_\pi$ の行列は

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，z 軸を軸とする 90° の回転移動と一致する． □

10.3　空間における対称移動

次元が 1 つ上がったところで，3 次元空間 R^3 における対称移動について，同様に捉えることができるか考えよう．R^3 における 3 種類の対称移動の中で，線対称移動については，平面上と同様に空間においても明らかに対称軸を軸とする 180° の回転移動とみなすことができる．次に面対称を考えるにあたり，次元をさらに 1 つ上げた 4 次元空間 R^4 における「素朴な」回転移動を 3 次元からの自然な類推によって定義する．ただここでは議論の簡便さのために，xy 平面など 2 つの座標軸を含む平面に垂直な「軸」をもつ回転に限定する．ここで注意するべきことは，3 次元空間 R^3 において平面と垂直でかつ 1 点を共有する図形は直線であるが，4 次元空間 R^4 においては平面（2 次元）と垂直でかつ 1 点のみを共有する平面が存在することである．一例を挙げれば，4 番目の座標軸を w 軸として，zw 平面は xy 平面と垂直であり，かつ明らかに原点 O のみを共有する．実際 4 つの基本ベクトルを $\vec{e}_i\ (i=1, 2, 3, 4)$ とするとき，ベクトル $k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ は xy 平面と平行，またベクトル $m\vec{e}_3 + n\vec{e}_4$ は zw 平面と平行であり，これらは互いに垂直である．このことから，一般に R^4 における回転移動の「軸」となるのは 1 つの平面であることになる．

例 3　zw 平面を軸とする角 θ の回転移動の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，同様に xz 平面を軸とする角 θ の回転移動の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である. □

さて，R^3 における xy 平面に関する面対称を考えよう．面対称移動によって xy 平面は動かないから，この移動が仮に R^4 における回転移動であるとすればその軸は xy 平面であるはずである．xy 平面を軸とする角 θ の回転移動の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．$\theta = 180^\circ$ とおくと，xy 平面を軸とする 180° の回転移動の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られるが，この変換を R^3（xyz 空間）に制限すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という xy 平面に関する面対称移動の行列が得られる．すなわち R^3 における面対称移動は R^4 における対称面を軸とする 180° の回転移動とみなすことができる．

最後に点対称移動を考える．R^3 における点対称移動が R^4 における回転移動であると仮定すると，（全体が 4 次元であることから）回転の軸となる平面（ 2 次元）と xyz 空間（ 3 次元）との共通部分は原点 O 以外の点 P を含むが，点対称移動によって点 P も移動されてしまうことは点 P が回転軸上にあることと矛盾を生ずる．従って，R^3 における 3 種類の対称移動の中で，点対称移動だけは R^4 における回転移動とみなすことはできない．

また，R^3 における原点に関する対称移動は z 軸に関する線対称移動と xy 平面に関する面対称移動の合成であるから，これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．左辺のそれぞれの変換を 4 次元空間 R^4 における回転移動とみなすと

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．左辺は 2 つの回転移動の合成であるが，前掲の議論からこの等式の右辺は回転移動ではない．すなわち，R^4 においては 2 つの回転移動の合成が必ずしも回転移動にならないのである．180° 以外の回転移動の合成を考えれば，回転移動でも対称移動でもない変換になる場合もある．つまり回転移動の集合は合成に関して閉じていないため，平面における対称移動がそうだったように，一括りとして考えるべき変換の範囲として不完全である．

10.4　直交変換の 1 つの理解として

R^4 における線形変換において回転移動と対称移動を含みかつ合成に関して閉じている集合は，直交変換の集合である．ここで，${}^tA=A^{-1}$ をみたす実行列 A を直交行列とよび，直交変換とは直交行列によって表される変換である．

2 次において直交行列が

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$$

の形，すなわち回転移動の行列と線対称移動の行列に限られる（例えば[1]を参照）ことから，直交変換は回転移動，対称移動を含む最小の概念である．これまで見たように，回転移動が群をなすのは 3 次元までであり， 4 次以上も考える場合には，群として直交変換が重要になる．こうして，大学で学ぶ線形代数学における直交変換という範疇の必要性が高校数学の延長上に理解される．

参考文献

［1］　木村達雄他，「明解　線形代数」，日本評論社（2005），§7.2, §7.4.