

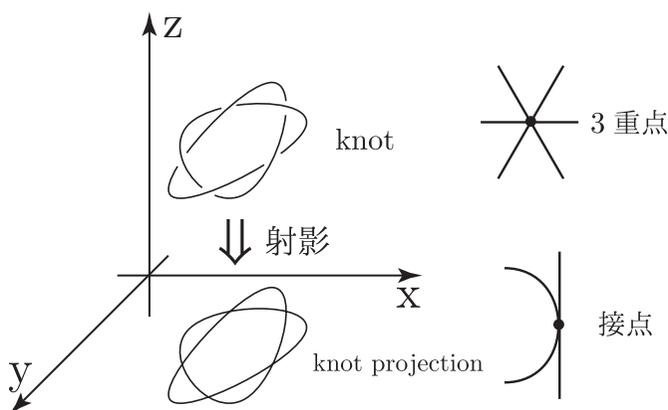
The set of crosscap number two alternating knots

瀧村 祐介

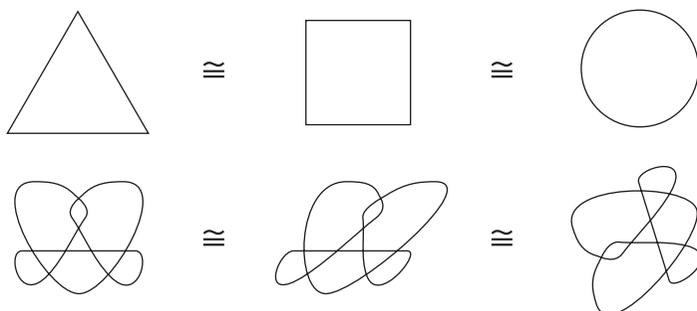
概 要

knot の crosscap number は 1978 年に Clark 氏により導入され, crosscap number 1 knot の集合が決定された. 今回, crosscap number 2 alternating knot の集合を決定した [4]. この研究は伊藤昇氏 (東京大学) との共同研究である.

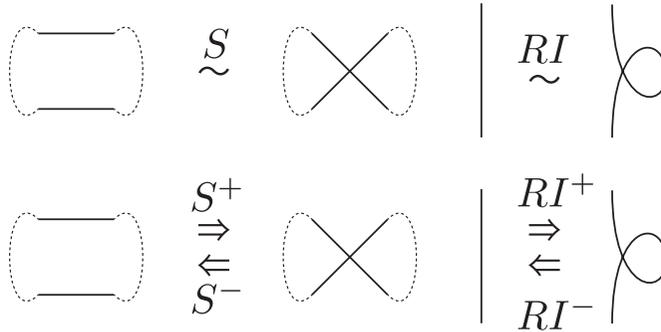
Definition 1. \mathbb{R}^3 に滑らかに埋め込まれた円周を knot という. knot を 2 次元平面に射影したものを knot projection という. その際, 3 重点や接点がないようにする. 平面に無限遠点をたすことで, knot projection を球面上で扱う.



2つの図形 A から B への連続写像 $f: A \rightarrow B$ が全単射で, その逆写像も連続であるとき, f を同相写像という. A と B との間に同相写像が存在するとき, A と B は同相であるといい, \cong で表す. この紀要では, 同相により knot や knot projection を同一視し, 鏡像は区別しないものとする.



Definition 2. 球面上の knot projection において, 図の局所変形を定義する.



Proposition 1 (cf. [2, Page 2]). 任意の knot projection は S と RI の有限列で simple closed curve に変形できる.

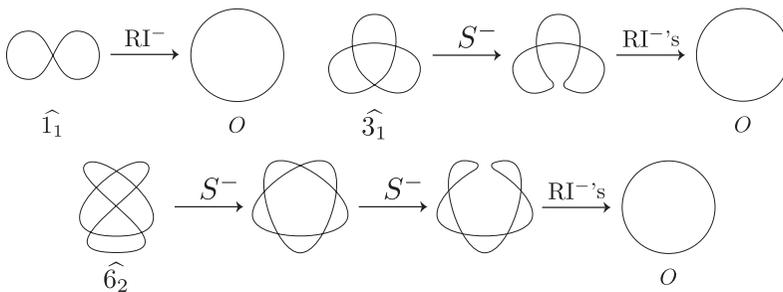
Definition 3. P を knot projection とする.

- (1) P を S と RI の有限列で simple closed curve にするために必要な S の最小回数を $u(P)$ とする.
- (2) P を S^- と RI^- の有限列で simple closed curve にするために必要な S^- の最小回数を $u^-(P)$ とする.

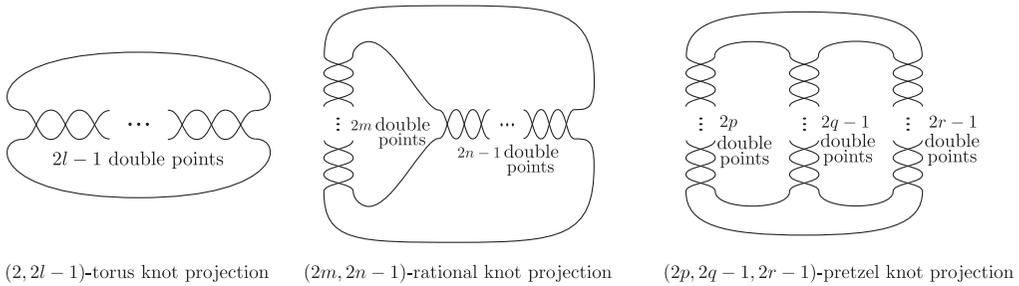
Proposition 2. P を knot projection とする.

- (1) $u(P) \leq u^-(P)$.
- (2) $u(P)$ は additive にならない.
- (3) $u^-(P_1) + u^-(P_2) = u^-(P_1 \# P_2)$.

Example 1. $u^-(\hat{1}_1) = 0, u^-(\hat{3}_1) = 1, u^-(\hat{6}_2) = 2$. (cf. [3])



Definition 4. \mathcal{T} を $(2, 2l - 1)$ -torus knot projections ($l \geq 2$) からなる集合とする. \mathcal{R} を $(2m, 2n - 1)$ -rational knot projections ($m \geq 1, n \geq 2$) からなる集合とする. \mathcal{P} を $(2p, 2q - 1, 2r - 1)$ -pretzel knot projections ($p, q, r \geq 1$) からなる集合とする.



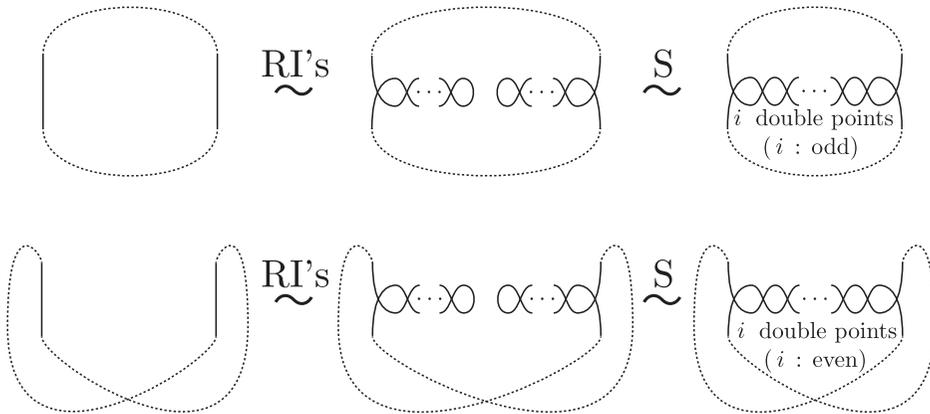
Theorem 1. ([4]) P を reduced knot projection とする. 次の 3つは同値である.

- (1) $u(P) = 1$.
- (2) $u^-(P) = 1$.
- (3) $P \in \mathcal{T}$.

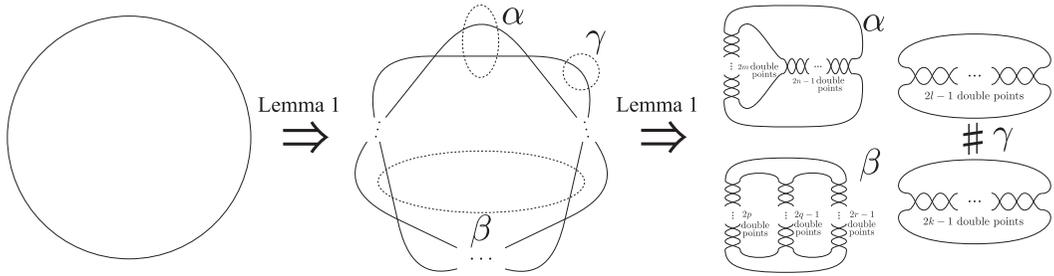
Theorem 2. ([4]) P を reduced knot projection とする. 次の 3つは同値である.

- (1) $u(P) = 2$.
- (2) $u^-(P) = 2$.
- (3) $P \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$ または $P = t \# t'(t, t' \in \mathcal{T})$.

Lemma 1. 1 回の S と 有限回の RI で, 図の局所変形が可能となる.



Proof of Theorem 1 and 2. Theorem 1, 2 のいずれにおいても, (3) \Rightarrow (1), (3) \Rightarrow (2)は自明である. (2) \Rightarrow (3)を証明する. simple closed curve から Lemma 1 を使うと, $(2, 2l-1)$ -torus knot projection となる. $(2, 2l-1)$ -torus knot projection に図の α, β, γ のいずれかで Lemma 1 を使うと, $(2m, 2n-1)$ -rational knot projection または $(2p, 2q-1, 2r-1)$ -pretzel knot projection または $(2, 2l-1)$ -torus knot projection を 2つ connected sum したものになる. (1) \Rightarrow (3)についても同様である.



Definition 5. ([1]) K を knot とする. $C(K) := \min\{1 - \chi(\Sigma) \mid \text{a non-orientable surface } \Sigma (\subset \mathbb{R}^3), \text{ where } \partial\Sigma = K\}$ とし, $C(K)$ を K の crosscap number という. $\chi(\Sigma)$ は Σ のオイラー標数である. crosscap number が 0 であるための必要十分条件は, K が trivial knot であるとする.

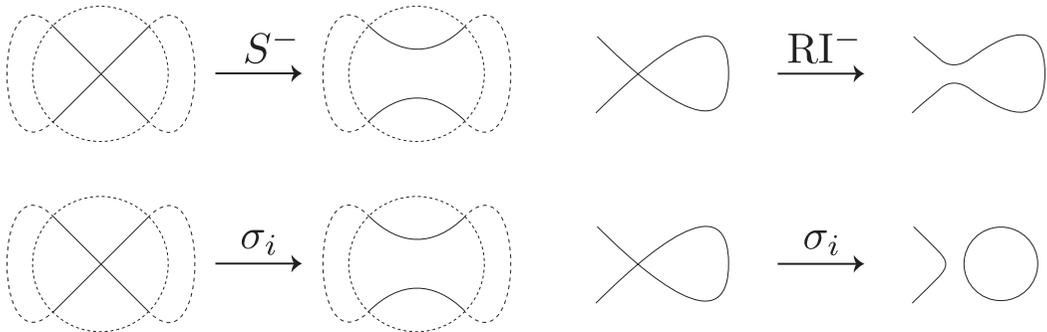
Definition 6. $n(P)$ を P の交点数とする. D_p を knot projection P に交点の上下の情報を与えて得られる knot diagram とする. $K(D_p)$ を D_p によって決まる knot とする. $C(K(D_p))$ を $K(D_p)$ の crosscap number とする.

Theorem 3. ([4]) $C(K(D_p)) \leq u^-(P)$.

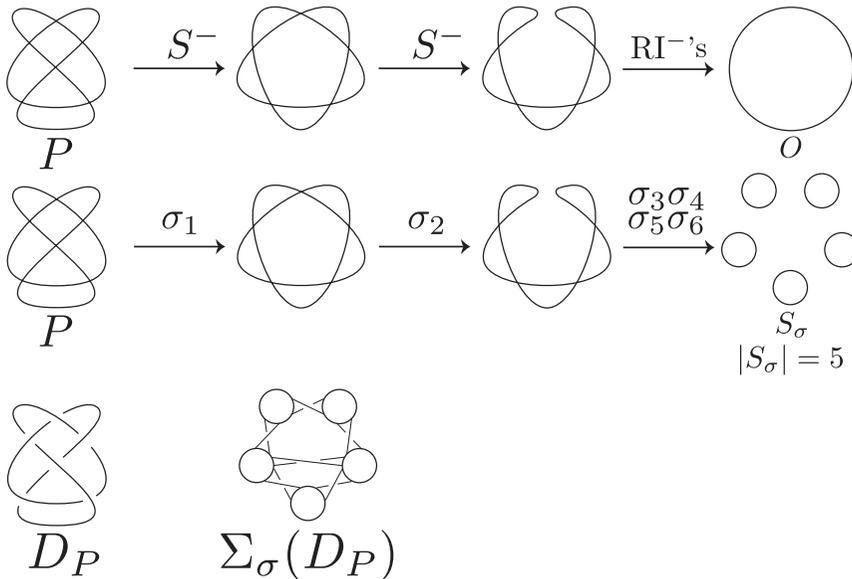
Proof of Theorem 3. $u^-(P)$ を実現する S^-, RI^- の列を見つけるために, $2^{n(P)}$ 通りの曲面を考える. $Op_i = S^-$ or RI^- ($1 \leq i \leq n(P)$) として, P から simple closed curve O まで $u^-(P)$ を実現する次のような列を考える.

$$P = P_1 \xrightarrow{Op_1} P_2 \xrightarrow{Op_2} \dots \xrightarrow{Op_{n(P)}} O.$$

P における $Op_i = S^-$ or RI^- ($1 \leq i \leq n(P)$) に対応して, σ_i を図のように定義する.



P に $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n(P)})$ を施して得られる circle の集合を S_σ とする. $|S_\sigma|$ を S_σ の circle の数とする. D_p において, $\Sigma_\sigma(D_p)$ を σ によって得られた S_σ に half-twisted-band をつけて得られる曲面とする.



$K(D_P)$ において、 Σ_0 を $C(K(D_P)) = 1 - \chi(\Sigma_0)$ を満たす non-orientable surface とする. $\chi(\Sigma_0)$ は最大値なので

$$\chi(\Sigma_0) \geq \chi(\Sigma_\sigma(D_P)).$$

よって

$$1 - C(K(D_P)) = \chi(\Sigma_0) \geq \chi(\Sigma_\sigma(D_P)) = |S_\sigma| - n(P).$$

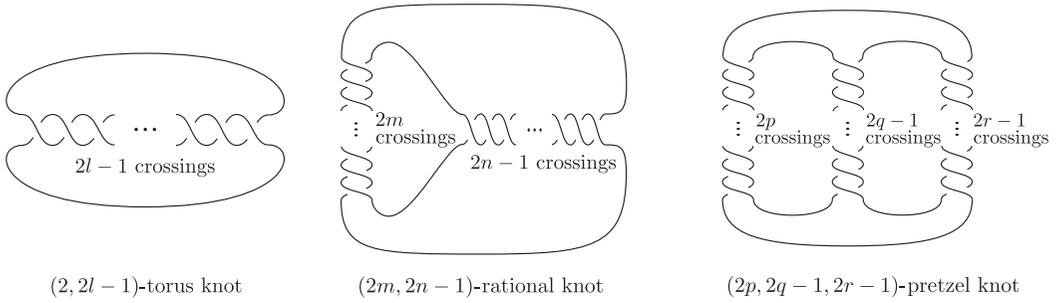
$$|S_\sigma| = \#\{Op_i \mid Op_i = RI^-\} + 1,$$

$$n(P) = \#\{Op_i \mid Op_i = RI^-\} + \#\{Op_j \mid Op_j = S^-\} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} 1 - C(K(D_P)) &\geq |S_\sigma| - n(P) \\ &= 1 - \#\{Op_j \mid Op_j = S^-\} \\ &= 1 - u^-(P). \end{aligned}$$

以上より、 $C(K(D_P)) \leq u^-(P)$ が示された。

Definition 7. $\mathcal{T}_{\text{knot}}$ を $(2, 2l - 1)$ -torus knot ($l \geq 2$) からなる集合とする. $\mathcal{R}_{\text{knot}}$ を $(2m, 2n - 1)$ -rational knot ($m \geq 1, n \geq 2$) からなる集合とする. $\mathcal{P}_{\text{knot}}$ を $(2p, 2q - 1, 2r - 1)$ -pretzel knot ($p, q, r \geq 1$) からなる集合とする.



Definition 8. K を alternating knot, $C(K)$ を K の crosscap number とする. $Z(K)$ を K から得られる全ての knot projections の集合とする. $u^-(K) := \min_{P \in Z(K)} u^-(P)$ とする.

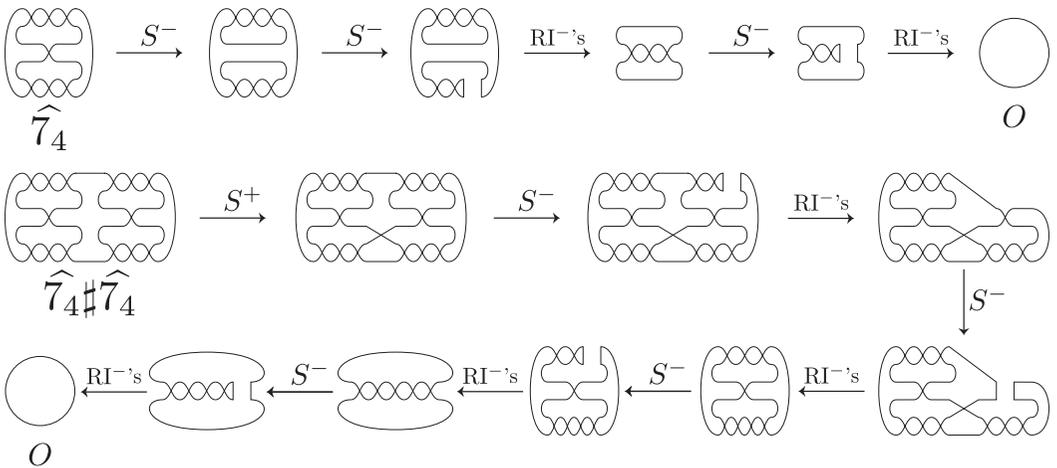
Proposition 3. ([4]) K を alternating knot とする. (A), (B), (C) は同値である.

- (A) $K \in \mathcal{T}_{\text{knot}}$.
- (B) $C(K) = 1$.
- (C) $u^-(K) = 1$.

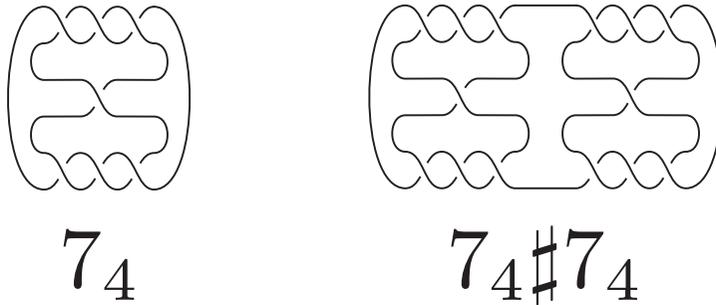
Theorem 4. ([4]) K を alternating knot とする. (A), (B), (C) は同値である.

- (A) $K \in \mathcal{R}_{\text{knot}} \cup \mathcal{P}_{\text{knot}}$ または $K = t \# t'$ ($t, t' \in \mathcal{T}_{\text{knot}}$).
- (B) $C(K) = 2$.
- (C) $u^-(K) = 2$.

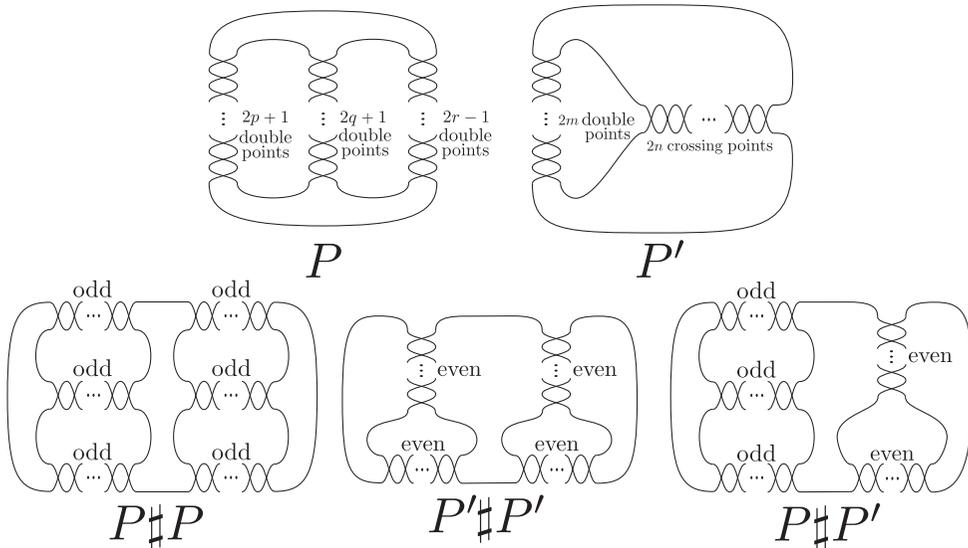
$u(P) < u^-(P)$ の例として, 次のものがある. 図において, $u(\widehat{7}_4) = u^-(\widehat{7}_4) = 3$ であるが, $u(\widehat{7}_4 \# \widehat{7}_4) \leq 5, u^-(\widehat{7}_4 \# \widehat{7}_4) = 6$ となる.



図において, $C(7_4) = 3, C(7_4 \# 7_4) = 5$ であることが [5] で示されている.



図の knot projection を 2 つ連結すれば, $u(P) < u^-(P)$ となる例の無限系列が 3 種類作ることができる.



Question 1. $C(K(D_p)) \leq u(P)$ は成り立つか？

参考文献

- [1] B. E. Clark, Crosscaps and knots, *Internat. J. Math. Sci.* **1** (1978), 113–123.
- [2] N. Ito and A. Shimizu, The half-twisted splice operation on reduced knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250112, 10 pp.
- [3] N. Ito and Y. Takimura, The tabulation of prime knot projections with their mirror images up to eight double points, *Topology Proc.* **53** (2019), 177–199.
- [4] N. Ito and Y. Takimura, Crosscap number and knot projections, *Internat. J. Math.* **29** (2018), no. 12, 1850084, 21 pp.
- [5] H. Murakami and A. Yasuhara, Crosscap number of a knot, *Pacific J. Math.* **171** (1995), 261–273.