数学史講義（第 12 回）：数学の基礎をめぐって　2；カントルの無限集合論

林　知宏

1　はじめに

1.1　本講義における議論の見通し

2　集合と数の理論，デデキント，カントル

2.1　デデキントによる数の理論

2.1.1　実数と連続体の理論（『連続性と無理数』を読む）

2.1.2　自然数の理論（『数とは何かまたは何であるべきか』を読む）

2.1.3　ツェルメロ 1908 年論文における集合論の公理

以上［林 2017］

2.2　カントルの無限集合論

それを見ても，私にはそうとは思えない（Je le vois, mais je ne le crois pas）[1].

2.2.1　カントルの無限集合論への道のり

カントルの無限集合論に挑む　数学は古代ギリシア以来，「無限」（無限大，あるいは無限小）というものを何らかの形で思案することを（あえて意図的に回避することも含めて）行ってきた．面積や体積，あるいは長さの量を特定する作業の中に必然的に無限が顔をのぞかせていたからである．17 世紀になって方程式論を通じて記号代数が発展すると，さらにその成果をもとに微分積分学が形成されていった．そこでは接線法のために微分学が，そして数学の古いテーマであった求積問題が積分学として無限級数という表現も伴いながら扱われた．無限小という数学的対象について，どのように認識するかという問題は数学者たちを悩ませたが，ライプニッツの記号（dx や $\int$）は何により簡便で，その問題を上手に記号化（カッシーラーのいう「シンボル的思考」）によって，形式的なアルゴリズムへと落とし込むことに有効に機能した[2]．微分積分学は 19 世紀にかけて，その適用範囲を広げ解析学として確固とした分野になっていった．一方で，基礎から次第に整備され始めた．根源にある事柄は，やはり実数の連続性に関する定式化とそこから派生する基本命題である．そしてその実数を生み出すための前提であった有理数，さらには自然数の構成要件と

[1] カントルが 1877 年 6 月 29 日付デデキント宛書簡に記した言葉より．［Cavaillès 1994］，p. 409.

[2] ライプニッツの数学の中で記号が果たす役割について，特に 20 世紀哲学の中でのその思想的評価は，［林 2003］，235−245 頁参照．またカッシーラーの用語については，［カッシーラー 1989−1997］，（四），第 3 部第 4 章（特に 206f 頁）参照.

諸性質を明らかにすることであった．その課題に果敢に取り組んだのが，前回の数学史講義［林 2017］で取り上げたデデキントである．そしてデデキントと同時代を生きたゲオルク・カントル（1845−1918）が登場する．彼こそが，長年にわたって数学に伏在していた無限の問題に正面から取り組み，画期的な成果を残した（図 1 参照）[3]．今回の数学史講義は彼の理論について追究する．

図 1　ゲオルク・カントル（1845−1918），1870 年頃

カントルの無限集合論は，19 世紀後半に生まれた理論である．当然それ以前の 19 世紀前半から半ばにかけて構築されていったディリクレ（1805−1859），ヴァイエルシュトラス（1815−1897），リーマン（1826−1866）等の研究をふまえて現れた．カントルは先駆者たちが取り組んだ三角級数論を契機に，無限の問題に入っていった．物の個別具体的な事性を捨象して，単なる点と同一視して，その点が何らかの条件に基づいて集まるという抽象化を通じて「点集合」の概念を生みだした．それは現代の集合論の奥底に基本的な発想として隠れている．特に点が無限に多く集まっている無限点集合の領域にカントルは進んで行った．

「点が無限に多く集まって集まりをなす」というイメージは，漠然としたものであれば抱くことは可能であろう．だが，それを数学的対象として捉え，論理的に可能な帰結を導いていくと，予想外の事柄が待っていた．もはや漠然としたイメージからは類推不可能な高みにまで登っていき，安易な了解を受けつけないまでになった．カントルが無限点集合の領域に分け入る際に，鍵となる概念は，

1）濃度，　2）順序数

の二つである．1)からは数の無限集合として，有理数全体（濃度 $\aleph_0$）と実数（濃度 $\aleph$）の間に相違があることを示した．また第 2 の鍵概念からは，無限の中に幾重にも階層構造が存在し，さらには整列可能定理が導かれる．そして前回の数学史講義［林 2017］で見たように，ツェルメロによる選択公理の導入という結果になり，数学界はその受容に一定の期間がかかることになる．カントル自身もそうしたことを当初予想していなかっただろう．加えて，連続体仮設（$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ となるのか？，またはより一般的には $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ が成立するか？）というより大きな問題へとつながっていく．二つの概念を通じて無限にアプローチすることで，ある意味で人間の思考の可能性の拡大を実感させることにもなった．

---

[3] 図 1 は，［Ferreirós 2007］，p. 146 から採った．1870 年頃，カントル 20 代の半ばの姿である．この写真のカントルは若々しく，大海に乗り出す意気込みにあふれているように見える．

19 世紀後半から 20 世紀前半を代表する大数学者ヒルベルト（1862−1943）は，1926 年の論文「無限について」で

> カントルがわれわれに作り上げてくれた楽園から，何人もわれわれを追放できるはずがない（Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können）

と述べた[4]．「カントルがわれわれに作り上げてくれた楽園」，現代の数学を学ぶ者には，「本当にそれは楽園だったのだろうか」という素朴な疑問がわくかもしれない．数学者の誰もがヒルベルトのように考えたかどうかは別に論じよう．ただ，少なくともヒルベルトのような人物をしてそう言わしめただけのインパクトが，カントルの理論にあったことは確かだろう．本稿では，1870 年代から始まるカントルの無限集合論を分析していきながら，彼の理論がもたらした成果とその要点を確認しよう．

カントルの無限集合論は，意外性に富んだ数学的結論を示した．無限に関して，文字通り限りない深遠さを伴っていた．論理の行き着く先がどれほど人々にとって認識可能なのか，考えずにはいられない内容である．同時に数学の基礎をなす要素，例えば数学を形成する論理自体に対する反省や，数学的理論構築のための演繹体系をどのように構築するかといった問題にも精査が必要であることが明確になっていった．それだけ無限に関わる問題は，われわれの思考の奥底に何かを突きつけるのである．カントル自身，数学の内部ですべてを完結させせることできなかった．今回のわれわれの分析は，カントルが 1883 年に公にした論文に分析の重点が置かれるが，その中では「無限の哲学」ともいうべきものが古代ギリシア以来の哲学史の伝統をふまえつつ開陳される．その際には，17 世紀後半に微分積分学の創出を通じて獲得されたライプニッツの発想が，特にカントルを後押しする．一方で，「物が集まって一つの全体をなす」という集合の素朴なイメージは，やはり様々なパラドックスにさらされて，数学の議論としての精密さを備えるために再検討や整理を余儀なくされた．今回の数学史講義では，カントルが数学界に与えたインパクトを実感すべく，彼の理論の形成を追究したい．少なからぬ人々の関心を集めてきたテーマであり，先行研究も多く出版されている．われわれなりの歩みで進めていくことにしよう．では，まず無限集合論本体へ切り込んでいく前に，カントル自身の研究の経過をふまえておこう．

カントルの研究前史　カントルは 1845 年にロシアのペテルスブルグに生まれた[5]．その後 1856 年，一家でドイツに移住し，その地で学校教育を受ける．1862 年にスイスのチュー

---

4 ［Hilbert 1926］, S. 170，邦訳［ヒルベルト，クライン 1970］，230 頁.

5 カントルの生涯に関する情報は，主として［Cantor 1932］, S. 452−483 所収のフランケルによる ‘Das Leben Georg Cantors’，あるいは［Dauben 1979］による.

リヒで専門教育の機会を得るが，父の死去を経て，翌年ベルリン大学へと移る．ここでカントルの数学研究が本格的に始まった．当時，ベルリン大学はクンマー（1810−1893），ヴァイエルシュトラス，クロネッカー（1823−1891）という「三尊」とも称された大数学者を擁して，世界最高峰のレヴェルを誇っていた．後にカントルはクロネッカーとは無限集合論をめぐって主張が対立することになる[6]．1866 年には，ゲッティンゲン大学でも学んでいる．1867 年，ラテン語で学位論文「2 次の不定方程式論」（De aequationibus secundi gradus indeterminatis）を書き上げる[7]．タイトルからわかるように，後のカントルの無限集合論の研究につながる要素はない．さらに教授資格を得て，1869 年以降，ドイツの地方都市ハレの大学で教職に就いた．

以上の経歴を経て，当初とは方向を変えて解析学の領域にカントルの関心は次第に向いていく．ハレ大学の同僚であったハイネ（1821−1881）からの影響があったようである．ハイネが先に取り組んでいた三角級数論に関わる論文をカントルは，1870 年から 1872 年の間に立て続けに 5 篇発表する．特にそれらは，無限三角級数の収束について存在の条件と一意性をテーマとしている．歴史的にはフーリエに由来する問題で，ディリクレ，リーマンへと受け継がれる．特に，カントルが直接示唆を受けたのはリーマンの教授資格論文である．ベルリン大学のヴァイエルシュトラスの講義でもその問題の重要性が強調されていたという[8]．カントルが無限集合論の建設に取り組む直接の契機になったのが無限級数の収束に関わる問題であったことをまず押えておこう[9]．

カントルが取り組んだ無限級数の問題とはどのような問題であっただろうか．初期段階で彼が取り組んだ三角級数論は，19 世紀前半の解析学の進展と関わる．フランスの数学者フーリエ（1768−1830）は，著作『熱の解析的理論』（*Théorie analytique de la chaleur*, 1822 年刊）の中で，熱が 3 次元空間 (x, y, z) 上にある立体の内部を伝わる際に満たす一般的方程式を導いた．その結果（テキスト通り表記すると），

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right) \tag{1}$$

と表した．ただし，K，C，D は定数であり（右辺の定数項の分母 $= C \times D$），K は物体に固有な伝導率，C は熱容量，D は物体の密度である．そして，この方程式(1)を満たす時間 t を伴った関数 $v = f(x, y, z, t)$ を求める考察を行った（偏微分の記号が現代とは異なる

[6] クロネッカーは，1870 年代から発表されたカントルの無限集合論の成果に対して理解を示さず批判的であった．数学的に（あるいは論理的に）導かれた結果が正しくとも，クロネッカー独自の数学観（有限主義）と相容れなかったからである．［Dauben 1979］, pp. 66−70.

[7] ［Cantor 1932］, S. 1−30.

[8] ［Dauben 1979］, p. 31.

[9] カントルは 1870 年代半ばから無限三角級数論を，さらには無限集合論へと研究対象を変化させていく．それは本文中に指摘した通りだが，なお当初の問題であった不定方程式論に関する論文も 3 篇（1880 年，1882 年）発表している．

点に注意)[10].

フーリエの議論は物理的問題の解決を目的としていた，数学的にはここに端を発して，一般に関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx+b_r\sin rx) \tag{2}$$

のように三角関数の無限級数として表すことができるかという問題が関心を引くようになる．このとき重要な点は，その無限級数の収束である．この問題に一定の形で応じたのはディリクレの 1829 年論文からである．ディリクレは，無限級数(2)に対して，$f(x)$ が区間 $[-\pi,\pi]$ で，

1）すべての値が有限で決定されていること，

2）有限個の不連続点のみを持つこと，

3）極大値，極小値をある定められた個数の点においてのみとること，

以上が満たされるならば，$n\to\infty$ のときに ϵ を無限に小さい数として，$\frac{1}{2}\{f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon)\}$ に収束することを示した[11].

さらに考察を引き継いだのが，リーマンの 1854 年の教授資格論文である（公刊はリーマン没後の 1867 年になる）．カントルが引用して直接影響を示唆するのも，このリーマン論文である．カントールが無限集合論へと進む契機を与えた重要性を持つ論文の内容を少し見ておこう．リーマンは，彼のゲッティンゲン大学への教授資格論文で，フーリエ，ディリクレへと連なる発展の経緯（オイラー，ダランベール，ラグランジュ，コーシー等々）を確認する．主題は無限三角級数で，

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots, \tag{3}$$

---

[10] フーリエはその著書第 2 章で，まず時間 t における伝導の特殊ケースとして 1 次元の方程式

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}\right)$$

を掲げ，その上で，第 3 章で式(1)へと一般化を進めている．フーリエは一般的な式(1)に対して，特定の条件下で変数を減らした

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$$

を提示し，この微分方程式の解となる関数を無限級数

$$v=ae^{-x}\cos y+be^{-3x}\cos 3y+ce^{-5x}\cos 5y+de^{-7x}\cos 7y+\cdots$$

によって表現することを試みた（ただし，$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$）．［Fourier 1822］, pp. 162−165 参照.

[11]［Dirichlet 1889−1897］, S. 131,［Dauben 1979］, pp. 7−11.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \tag{4}$$

の収束を考察する．ディリクレは収束のための十分条件を与えたが，リーマンはさらに必要条件を与えることに取り組む．ただし，関数 $f(x)$ の連続性は保証されているとは限らない．ディリクレは，不連続性を一定の範囲で許容しつつ，関数概念そのものを拡張して捉えることを行った．その上で，無限三角級数の収束についての定理を示した．リーマンはそれを受ける形で，一般的な関数に対して無限三角級数(3)，(4)の中に現れる係数を確定するために，不連続性を備えた関数に対して積分の可能性をも視野に入れて，そもそも定積分「$\int_a^b f(x)\,dx$ の下に何が理解されるべきなのか（Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?)」という根源的な問題を提起する（現在，積分論について「リーマン積分」と称される基礎的定義の名称はここに由来する）[12]．

結局リーマンは，関数の連続性が保たれる範囲での式(3)の収束と特定の（不連続性をはらんだ）x における場合とを区別して考察した．そしてその(3)が収束するための必要条件を与えるに至った[13]．リーマンは無限級数(3)が収束することを仮定する．このとき，

$$\frac{1}{2}b_0 = A_0,\ a_1\sin x + b_1\cos x = A_1,\ a_2\sin 2x + b_2\cos 2x = A_2,\ldots$$

として，無限級数

$$\Omega = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \tag{5}$$

が与えられ，その値を $f(x)$ とする．この値は無限級数が収束するような値に対してのみ存在する．さらに無限級数(5)を二度項別積分して，

$$C + C'x + A_0\frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots = F(x) \tag{6}$$

とおく．この $F(x)$ について次の三つの補題が用意される（一部用語を現代のものに置き換えた）．

補題 1　無限級数 Ω〔式(5)〕が収束するとき，そして α，β を無限に小さく，かつその比が有限であるとするならば，

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) - F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

12［Riemann 1990］, S. 271，邦訳［リーマン 2004］，234 頁．

13 *Ibid*., S. 276−287，同邦訳，238−249 頁．

は元の無限級数を同じ値に収束する．

補題 2

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

は α とともに，つねに無限に小さくなる．

補題 3　b，c を任意の定数とし，c の方が b よりも大きいとする．また関数 $\lambda(x)$ を第 1 次導関数とともにつねに連続，かつ境界〔$x=b$，$x=c$〕で 0 となり，第 2 次導関数が無限に多くの極大値，極小値を持たないとするならば，積分

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

は μ が無限に大きくなるのに応じて，任意に与えられた量よりも小さくなる．

以上の三つの補題を受けて，リーマンの教授資格論文は「一般項が任意の変数値に対して最後は無限に小さくなる，そうした三角級数による関数の表現可能性について」次の三つの定理を掲げる（一部記号を現代のものに置き換えた）．

定理 1　周期 2π で反復する関数 $f(x)$ が三角級数で表されており，その項が x の任意の値に対して最後は無限に小さくなるならば，ある連続関数 $F(x)$ が存在して，$f(x)$ は次のように関係する．すなわち

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)-F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

は α，β が無限に小さくなり，その比が有限にとどまるならば，$f(x)$ に収束する．さらに

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

は $\lambda(x)$，$\lambda'(x)$ が積分の両端で 0 に等しく，その間つねに連続で，かつ $\lambda''(x)$ は無限に多くの極大，極小をとらないならば，μ が増加するにつれ，無限に小さくなる．

定理 2　逆に上記の二つの条件が満たされるならば[14]，係数が無限に小さくなるようなある三角級数が存在して，級数が収束するいたるところでその関数〔$f(x)$〕を表す．

定理 3　$b<x<c$ とする．そして $\rho(t)$ を次のような関数とする．すなわち，$\rho(t)$ と $\rho'(t)$ は，$t=b$ と $t=c$ で値 0 をとり，これらの間では連続的に変化する．そして $\rho''(t)$ は無限に多くの極大，極小を持つことがなく，かつ $t=x$ に対して，$\rho(t)=1$，

$\rho'(t)=0$，$\rho''(t)=0$ となり，一方で $\rho'''(t)$ と $\rho^{(4)}(t)$ は有限で連続とする．このとき級数 $A_0+A_1+\cdots+A_n$ と積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}}{dt^2}\rho(t)dt$$

との差は n が増加するとき最終的に無限に小さくなる．したがって，級数 $A_0+A_1+\cdots+A_n$ は，n が増加して

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}}{dt^2}\rho(t)dt$$

がある確定した極限に近づくか否かに応じて，収束するかしないかが定まる．

以上により，リーマンは無限三角級数の収束について必要十分条件を与えるに至った．ここで重要なことは，関数の有限性や一定の範囲での連続性が仮定されているということである．その条件下で極限値の存在が示されている．より広い範囲の関数を想定すること，すなわち関数の連続条件を緩和した上で，極限値の存在を示すのが次なる問題となる．また，極限関数の一意性はいまだ示されていない．こうした点がリーマンの後に続く研究者たちの課題であり，カントルが最初に取り組んだテーマとなるのである．

カントルの無限三角級数論　カントールは 1870 年以降に無限三角級数に関する論文を発表する．主としてリーマンの教授資格論文の成果をもとに三角級数の表示の一意性の問題に取り組む．最初の成果は，『クレレ』誌（*Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik*）に 2 篇の論文として発表された（1870 年から翌年にかけて）．第 1 論文の結果を押さえよう．まず「一意性」とは，仮に各 x に対して $f(x)$ に収束する二つの無限級数表示，すなわち

$$f(x)=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx+b_n\cos nx,\quad f(x)=\frac{1}{2}b_0'+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\sin nx+b_n'\cos nx \tag{7}$$

---

[14] 定理 1 の二つの条件，

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)-F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}\to f(x)$$
$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx\to 0$$

ということが満たされるということ．

があったときに，式(7)の二つの $f(x)$，両者の差をとり，

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \tag{8}$$

を考える．ただし，

$$C_0 = \frac{1}{2}d_0,\ C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx\ (c_n = a_n - a'_n,\ d_n = b_n - b'_n)$$

である．ここにおいて，数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ がある与えられた区間（$a < x < b$）内の任意の x がとる値に対して $n \to \infty$ となるときに同時に 0 に収束することを示すことである．

カントルはリーマンの導入した関数

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn}$$

を利用して，この $F(x)$ が x の任意の値の近くで連続関数であることを確認しながら，

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(\alpha) + F(x-\alpha)}{2\alpha} \to 0\ （\alpha \to 0 \text{ のとき}）$$

を示す．そして最終的な結論として，「一実変数 x の関数 $f(x)$ が，任意の x の値に対して収束する三角級数によって与えられるならば，同様に x の任意の値に対して収束し，関数 $f(x)$ を表す同じ形の他の級数は存在しない」とまとめている[15]．

無限三角級数表示の一意性を示したことは一定の成果であった．だがカントルの思考はそこに止まらなかった．翌年 1871 年，同じ雑誌に一般化した成果を掲載する．ここでは一意性の成立の前提条件，「ある与えられた区間内のすべての x に対して収束が成り立つこと」を緩和して，例外点の存在を許容することも可能であることを示した．ただし，その級数の収束を断念する例外点は，増加列 $\{\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\}$ において有限個の場合のみであることが強調されている．しかしこの 1871 年論文の中で，すでにその例外点を有限個に限定しない，さらなる拡張が続くことを予告している[16]．こうして，この無限三角級数の一意性をめぐる一般化の志向は，カントルの数学的発想を豊かにする契機となった．カントル流無理数論，そして彼独自の無限集合論は，ここからスタートしたとみなすことができる[17]．

1872 年，予告通りにカントルの無限三角級論の研究は進展する．「三角級数論のある定

15［Cantor 1932］, S. 81ff.

16 カントルは「こうした定理の拡張は決して最後ではない．同様に厳密なやり方に基づいて，私はさらにもっと先へと進んで拡張を見いだすことに成功している．機会を得て報告することになるだろう」と述べている．*Ibid*., S. 85.

17［Dauben 1979］, p. 35.

理の拡張について」というタイトルで論文が発表された．実際に目を見張らされるのは，表題の内容（無限三角級数に関する定理の一般化）もさることながら，前半に記された無理数に関する理論の提起である．われわれが依拠する 1 次資料［Cantor 1932］は，あくまで公刊された論文のみを収録しているので，新たなカントルの発想がいかに生まれたのか，その過程を草稿などを通じて詳細に確認することはできない．そうした資料上の制約はあるにせよ，この無限三角級数の表現可能性をめぐって例外点の集合（この論文では「集合」を指す語として Menge を用いている）を考えることで，その範囲を有限から無限へとシフトさせ，それが契機となって，級数が定義される条件に対する反省，すなわち実数自体の構造を明確化する必要に至ったのではないかと推察されるのである．

カントルは有理数の無限列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{9}$$

が与えられることを前提する．このとき，正の整数 m に対して，差 $a_{n+m} - a_n$ が n の増加に応じて無限に小さくなることを考える．別の言葉でいうと，ある正の整数 n_1 があるとき，$n \geq n_1$ に対して，任意の正数 ϵ が存在して，ある正の整数 m をとると

$$|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$$

が成り立つときに，「列(9)は定まった極限 b をもつ」としている．これによって一つの無理数が定める[18]．われわれが通常「コーシー列」と呼ぶ考え方の通り，有理数の無限列の収束によって無理数を定義する発想をここに明確にしている．そして重要なことに，こうして定められる無理数も含んだ実数全体を数直線上の点として対応させるということを公理化している．上記の列 $\{a_n\}$ から定まる実数 b は，その量に応じて直線上の原点から離れた点として位置づけられる（＝座標を持つ）．そして，任意の実数がその数の大きさに等しい座標を持つ直線上の点に対応することを公理として付け加えるというのである[19]．カントルの研究者ドーベンは，こうした実数と（1 次元的）直線上の 1 点との対応という発想をデデキント流の実数の公理化と比較して高く評価する[20]．実数の公理化については，前回の数学史講義（第 11 回）で，カントルの 1872 年論文における流儀とデデキントの同じ年に刊行された『連続性と無理数』における無理数の定義の仕方の違いについて対比した[21]．要は，両者には一長一短があるということである．とにかくカントル流は，図形的なイメージが伴い，初等的でわかりやすい．また有理数列の極限によって無理数を定めるので，古典的解析学ともなじみやすいのは確かである．

---

[18]［Cantor 1932］, S. 92f. カントルは後に（1883 年），こうした列を基本列（Fundamentalreichen）と呼んでいる（*Ibid*, S. 186）．

[19]［Cantor 1932］, S. 97.

[20]［Dauben 1979］, p. 320, n. 34.

[21]［林 2017］，43−46 頁．

カントルの無限集合論の形成をテーマとする視点からは，この 1872 年論文には次の展開の予兆が感じられる．そうした重要性がある．直線という連続性を持った対象が無限に多くの点からなることを基礎に，次のように「点集合の極限点」（Grenzpunkt einer Punktmenge）が定義される[22].

> 私は点集合 P の極限点を，直線上の一つの点で，その点における任意の近傍の中に P の点が「無限に」多く見いだされ，それ自身はまた元の集合に属しているということが起こり得る位置にあるものと理解する．ただし点の近傍とは，その点を「内側に」含んでいるある区間と理解する．したがって，容易に証明されることだが，無限に多くの点からなる〔有界な〕点集合は，つねに少なくとも一つの極限点を持つ．

そしてさらに，いま定義した極限点の集合を P の「第 1 導集合」（die erste algeleitete Punktmenge）として，P' と表示している．この語の導入によって，直線上の点集合が与えられたときに，その極限点なるものとそうでないものとを区別がつけられる．そして P' が有限集合でない場合には，同様に P' における極限点の集合 P''，さらには同じ条件下で次々と P の第 v 次導集合 $P^{(v)}$ が定められるとしている．このように無限集合を一層深く構造化していく作業は，無限集合論の基本的手法となるが，この時点で始まっていたことになる．

こうした第 v 次導集合 $P^{(v)}$ の導入によって，無限三角級数の収束の一意性の問題はどのように深められたのだろうか．1872 年論文の主定理は次の通りである[23].

> 定理　以下のような形の方程式
>
> $$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots$$
>
> があるならば，$d_0 = 0$，$c_n = d_n = 0$ となる．ただし，x のあらゆる値に対して，$C_0 = \frac{1}{2} d_0, C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ であるが，区間 $(0, 2\pi)$ の中で v が任意の整数を表すとき，与えられた v 次の種類の点集合の点に対応する例外を有する．

ここで「v 次の種類の点集合 P」（Punktmenge P der v^{ter} Art）とは，v 次の導集合 $P^{(v)}$ が有限集合で，$P^{(v+1)} = \phi$ となるものを指す[24]．すなわち，一意性が成立する条件の緩和は，例外点の集合を無限集合にまで拡張することまで可能となったが，あくまで導集合が何次かの段階で空集合になってしまう場合という限定を置いている．そこまで許容されることをカ

---

[22]［Cantor 1932], S. 98. 引用中の「　」内の語はテキストではイタリックで強調されている．また〔　〕内の語は，［Cantor 1932］の編者ツェルメロによる補足である．結局，「任意の有界な無限列は収束部分列を持つ」という，いわゆるボルツァーノ・ヴァイエルシュトラスの定理（実数の連続性の公理と同値となる）の表明になっている．

[23] *Ibid*., S. 99.

ントルは証明したのだった．

無限三角級数の収束の問題は，解析学の分野で長く関心の的となっていた．極限の一意性についての条件を考察することで，カントルは一定の成果を得た．ただこの段階に来て，カントルは当初の問題もさることながら，直線上に無限に多く存在する点と対応づけられた実数のそのものに向けて洞察が及んでいく．そしてむしろそこを足がかりに無限集合自体へ深く関心を寄せるようになっていったように見える．有理数の基本列（コーシー列）の極限値として得られる無理数を含んだ実数全体の集合を捉えるときに，その特異な性質，すなわち非可算性を見いだしたことが次の成果となる（1874 年～1878 年）．同じ無限集合である有理数全体との間に階層が見られることは，まず無限の深遠なる世界への第一歩だった．さらに 1879 年から 1883 年にかけて本格的な無限集合論研究の論文が 6 編の連作として発表される．そこでわれわれは次にカントルの無限集合論の中で最初にインパクトを与えた無限集合の可算性と非可算性について分析を試みよう．

2.2.2　濃度，可算性と非可算性

通常，われわれがカントルの寄与と考える「無限集合論」の成果とは，

1）濃度，超限基数の理論（無限集合の可算性，非可算性），

2）超限順序数の理論（整列可能性，連続体問題），

以上の 2 点である．前者については，個数を数えること（実質的には自然数との一対一対応をつけること）を足がかりになっている．これを一般化して，集合の要素間の一対一対応をもとに「濃度」という概念を導入する．それを基礎に有限集合だけでなく，むしろ無限集合の濃度を特定する．特に自然数全体と一対一対応がつく場合，可算集合と称する．カントルは，後に $\aleph_0$ というヘブライ文字の記号で，可算集合の濃度（Mächtigkeit）を表現するようになる．実数全体の濃度がその $\aleph_0$ と異なり，非可算であることを示したのが最初の重要な成果である．さらにはその濃度の相等，大小，和，積，ベキなどの演算を定め，性質を探るのが 1)のテーマである．

後者については，集合の各要素に「順序」を入れて並べることを基礎とする．有限集合の場合，$A=\{1,2,3,4\}$ と左から大小の順に並んだ要素について，順に「1 番目，2 番目，3 番目，4 番目」の要素と称する．その順番，順序についてまた有限集合のみならず無限集合も対象とする．ただし，自然数全体の集合 $N=\{1,2,3,4,\cdots\}$ をそのように左から大小の順に並べた集合と，偶数を先に並べ，奇数を後回しにした集合 $N_1=\{2,4,6,\cdots,1,3,5,\cdots\}$ と，反対に奇数を先に並べ，偶数を後回しにした集合 $N_2=\{1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots\}$ と，さら

---

[24] カントル自身が掲げている例によると，

$$P=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$$

とすると，$P'=\{0\}$ より有限集合となるので，$P''=\phi$ となる．*Ibid*., S. 98.

には大小の順番を集合 N と正反対にした逆転した $N_3 = \{\cdots,3,2,1\}$，これらすべて異なる順序型を持っていると考える．もちろん有限集合と無限集合とは異なる順序型を持つとする．特に無限集合である自然数全体 $N = \{1,2,3,4,\cdots\}$ に対する順序型を ω という記号で表し，こうした順序型を示す数を「超限順序数」と称する．その上で順序型の区別，超限順序数についての演算を論じるのが 2)のテーマである．

以上のように，カントルの無限集合論は，有限集合における個数，順序という素朴な特徴づけを敷衍して無限集合に適用できるように一般化したものを数学的な武器とする．前項までに見た通り，カントルの狙いは当初から実数全体という無限集合の持つ性質を的確に取り出すことにあったと推察できる．だが得られた理論は 1)にせよ，2)にせよ，想像外の展開を繰り広げた．まず本項では，1)についてカントルの 1874 年以降の論文を確認していこう．

1870 年代の成果　カントルの本格的な無限集合論の第 1 論文は，1874 年に刊行される．「すべての代数的実数の集合のある性質について」(Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen) というタイトルを持つ[25]．ここで代数的実数とは，n, a_0, $a_1, \cdots, a_n$ を整数とするとき (n，a_0 は正の整数とする)，実数 ω が方程式

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{10}$$

を満たす，すなわち，n 次代数方程式の解となることをいう[26]．カントルはここで，代数的実数 ω に対して一義的に正の整数 (＝自然数) ν を割りてることができ，逆に正の整数 ν に対して代数的実数 ω が一つ確実に属するという．つまり，代数的実数と正の整数との間に一対一対応が存在すると主張する．よって代数的実数全体は，自然数と全体と同じ可算濃度であることになる．ただし，この論文において「一対一対応」とか「可算濃度」という語は用いられていない．

カントルの証明は ω が n 次の代数的方程式(10)において，「高さ」(Höhe) を

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

のように定義することで示している．条件より，N は正の整数の値をとる．そして任意の N を与えるごとに，その高さの値を持つ代数的実数の個数 (それを関数として $\phi(N)$ と表す) は有限個である．例としてカントルは，

$$\phi(1) = 1,\ \phi(2) = 2,\ \phi(3) = 4$$

であるとしている[27]．$N = 1$ に対応する数を ω_1，$N = 2$ に対応する数を ω_2，ω_3，$N = 3$ に

---

25 [Cantor 1932], S. 115–118.

26 例えば，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は有理数ではないが，$x^2 - 1 = 0$ や $x^2 - 3 = 0$ の解になるので代数的実数である．

対応する数を ω_4 から ω_7 と順に名づけていくと，代数的実数は正の整数と対応づけられる．一つの代数的方程式は有限個の解しか持たないので，N を動かすことで代数的実数全体を正の整数 ν で配列した

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_\nu, \cdots \tag{11}$$

が得られる．これは代数的実数が可算濃度を持つことに他ならない．

（代数的実数とは限らない）一般の実数の無限列が与えられたときには事情が異なる．カントルは帰謬法（背理法）による証明を提示する[28]．すなわち，実数全体が仮に代数的実数のように正の整数 ν によって，(11)のように配列されたとする．このとき実数全体の部分で与えられた任意に与えられた開区間 (α, β)（ただし $(\alpha < \beta)$）内に，列(11)の中に現れない数 η が存在する．なぜならば，いま開区間 (α, β) に含まれる列(11)の最初の数を二つ選び，α'，β' とし（ただし $\alpha' < \beta'$ とする），新たに開区間 (α', β') を作る．同様にその開区間 (α', β') に含まれる列(11)の 2 数を選び，さらに次の開区間 (α'', β'')（$\alpha'' < \beta''$）を作る．さらに続けて，一般に開区間 $(\alpha^{(\nu-1)}, \beta^{(\nu-1)})$ に含まれる列(11)から最初の 2 数 $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}$ をとって，開区間 $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$（$\alpha^{(\nu)} < \beta^{(\nu)}$）を作っていく．こうしてできた区間の列は，次のように単純に縮小する．

$$(\alpha, \beta) \supset (\alpha', \beta') \supset (\alpha'', \beta'') \supset \cdots \supset (\alpha^{(\nu-1)}, \beta^{(\nu-1)}) \supset (\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}) \supset \cdots$$

すなわち，次のように $\alpha^{(\nu)}$，$\beta^{(\nu)}$ について単調増加（あるいは単調減少）の列ができる．

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \cdots < \alpha^{(\nu-1)} < \alpha^{(\nu)} < \cdots, \tag{12}$$

$$\beta > \beta' > \beta'' > \cdots > \beta^{(\nu-1)} > \beta^{(\nu)} > \cdots. \tag{13}$$

こうした「区間縮小法」に基づく発想は 1872 年論文でも利用されていた．

カントルによれば，このとき二つの可能性があるという．一つは縮小していく区間の数

---

[27] *Ibid.*, S. 116. 実際，$N = 1$ の場合は，

$$n = 1,\ a_0 = 1 \Rightarrow 1 \times \omega^1 = 0 \Longleftrightarrow \omega = 0 \text{ より } \phi(1) = 1$$

となり，$N = 2$ の場合は，

$$n = 1,\ a_0 = 1,\ a_1 = \pm 1 \Rightarrow 1 \times \omega^1 \pm 1 = 0 \Longleftrightarrow \omega = \pm 1 \text{ より } \phi(2) = 2$$

となる．加えて $N = 3$ の場合は二通りの方程式があり得て，

$$n = 1,\ a_0 = \pm 2,\ a_1 = 1 \Rightarrow \pm 2 \times \omega^1 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \omega = \pm\frac{1}{2},$$

または，

$$n = 1,\ a_0 = 1,\ a_1 = \pm 2 \Rightarrow 1 \times \omega^1 \pm 2 = 0 \Longleftrightarrow \omega = \pm 2,$$

となるので $\phi(3) = 4$ である．

[28] *Ibid.*, S. 117f.

ν が有限の場合である．もう一つは，区間を作る回数が有限でなく，無限個できてしまう場合である．前者の場合，最後の開区間 $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ ができて，列(11)の中に一つ数が残される．だが，列(11)に属さない別の $\eta \in (\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ をとることができる．また後者の場合は，有界な無限列(12)の上限を $\alpha^{(\infty)}$，同様にして有界な無限列(13)の下限を $\beta^{(\infty)}$ とする．もし $\alpha^{(\infty)} < \beta^{(\infty)}$ ならば，先ほどの有限回で開区間が終わった例と同じく，列(11)に属さない別の $\eta \in (\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)})$ をとることができる．さらに，$\alpha^{(\infty)} = \beta^{(\infty)}$ ならば，$\eta = \alpha^{(\infty)} = \beta^{(\infty)}$ は，やはり列(11)に属さない．なぜならば，もし η が列(11)に含まれているとすると，$\eta = \omega_p$ として，ある番号 p をとることができる．だがこのとき，それは区間 $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$ の中にも含まれることになる．しかし η の定義（$\eta = \alpha^{(\infty)} = \beta^{(\infty)}$）に反していて矛盾が生じる．

以上より，いずれにしても列(11)に含まれない異なる実数をとることができる．よって実数全体を自然数との 1 対 1 対応によって数え上げることはできない．すなわち可算集合ではない．こうして無限集合の中に，可算集合と非可算集合と異なる種類のものが存在するすることが分かった．

実数全体の集合が非可算であることの証明は後年改良される．いわゆる「対角線論法」による証明は 1891 年に公刊される．その論文は「集合論研究のある初等的問題について」（Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre）というタイトルを持つ[29]．この短い論文は，1891 年カントル自身が創設に関わったドイツ数学者協会（Deutsche Mathematiker-Vereinigung）の年会にて報告され，その後，協会の年報第 1 号に掲載されたものである[30]．

カントルの議論は次の通りである．いま，無限に多くの独立した座標（異なる m，または w のいずれかの値をとる）を持つ

$$E = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \cdots)$$

に対して，各座標が m か w であるような要素全体の集合 M を考える．M に属する例として，

---

[29] *Ibid*., S. 278ff，邦訳［カントル 1979］，116−119 頁．なお，この論文のタイトルは，本文中に掲げた通りである．ここで「集合」に相当する語は，Mannigfaltigkeit と記されている．カントルは 1870 年代からこの語を用いている．ただし，われわれがすでに見た 1874 年論文では，代数的実数の「集合」を表す語は Inbegriff であった．集合論の第 2 論文は 1878 年に刊行されるが，そのタイトルは「集合論研究の一寄与」（Ein Beitrag der Mannigfaltigkeitslehre）である．1880 年代の論文では同じ用語が用いられる．本来 mannigfaltig とは，「多様な」という意味である．したがって，Mannigfaltigkeit は，「多体」，「多様体」などという訳語がふさわしいのかもしれない．その後，1890 年代になると現在でも使用される Menge という語が代わって用いられる．われわれは本稿の以下において 1880 年代，1890 年代のカントルの集合論研究にも関心を移行させていくが，原語の相違に関わらず，同じ「集合」という訳語で統一する．なお，カントルと同時代に生きた哲学者フッサールは，カントルの研究をふまえ，自身の哲学的考察を行っている．その成果である『論理学研究』（1900 年刊）を見ると，集合を意味する語として Mannigfaltigkeit が現れる．この邦訳において，訳者は訳語の選択に苦労している．［フッサール 1968−1976］，4，293 頁に記された「訳者あとがき」参照．または，［伊東・原・村田 1975］，480f 頁参照．

[30] ドイツ数学者協会の創設に至る経緯とカントルの貢献については，［Dauben 1979］, pp. 160−165 参照．

$$
\begin{aligned}
E^1 &= (m, m, m, m, \cdots), \\
E^2 &= (w, w, w, w, \cdots), \\
E^3 &= (m, w, m, w, \cdots)
\end{aligned}
$$

を考えることができる．見方を変えると，E の各要素に対して x_ν が値 m のときはその要素が含まれ，値 w のときは含まれないようにする E の部分集合を作っているとも考えられる．すなわちこの M は E のあらゆる部分集合全体を意味する．カントルはこうして作られる M は列 $\{1, 2, \cdots, x_\nu, \cdots\}$（すなわち自然数全体の集合）と異なる濃度を持つとして次の定理を掲げる．

> 定理　$E_1, E_1, \cdots, E_\nu, \cdots$ を集合 M の諸要素からなる任意の単純無限列とする．このとき，M の中にどの E_ν にも一致しない要素 E_0 が存在する．

実際，ここで対角線論法の出番となる．

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1\nu}, \cdots), \\
E_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2\nu}, \cdots), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E_\mu &= (a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \cdots, a_{\mu\nu}, \cdots). \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{14}
$$

とする．ここで各 $a_{\mu\nu}$ は，それぞれ m，または w のいずれかの値をとる．ここで新たな列 $b_1, b_2, \cdots, b_\nu, \cdots$ を作る．ただし，各 b_ν は，上の(14)の各 E_ν 内の対角線に並ぶ各要素 $a_{\nu\nu}$ に対して，

$$a_{\nu\nu} = m \Rightarrow b_\nu = w,\ a_{\nu\nu} = w \Rightarrow b_\nu = m\ (\nu = 1, 2, \cdots, \mu, \cdots)$$

と定める．こうしてできる b_ν を要素とする集合，

$$E_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_\nu, \cdots)$$

は，必ず E_ν の ν 番目の要素 $a_{\nu\nu}$ と E_0 の ν 番目の要素 b_ν とが異なるので，(14)の $E_1, E_1, \cdots, E_\nu, \cdots$ のいずれとも異なる．つまり可算個の要素を持つ集合に属さない．以上が対角線論法による証明だが，この証明は同時に，一般に任意の集合 L が与えられたときに，より濃度の高い別の集合 M がつねに作られることも示している．つまり，ある集合のあらゆる部分集合の総体は，元の集合よりも高い濃度を持つことになる（$2^{\aleph_0} > \aleph_0$ だけでなく，一般に濃度 m の集合に対して $2^m > m$）．また言い換えれば，「最大濃度」なるものは存在しない，そうした事実も含意する．無限集合は単一の物のみが存在するのではなく，無限に多くの種類を含んでいる．これはまず第一に驚きを伴う数学的事実である．だが，われわ

れはカントルの無限集合論の実相の一部を垣間見たに過ぎない．実際，カントルの考察はここに止まることはなかった．

4年後の1878年，論文「集合論研究の一貢献」が公になる[31]．冒頭で，集合の要素の個数を一般化した概念である濃度について，あらためて明快な定義づけがなされる．すなわち，二つの集合M, Nに対して，「各要素どうしが互いに，一義的に全体にわたって対応させられる」（sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen）とき，言い換えると集合の各要素間において，一対一対応がつけられるときに「集合MとNは同じ濃度を持つ」，あるいは「同等である」とする[32]．もし集合が有限集合の場合は，（正の整数で表示される）要素の総数（Anzahl）が濃度そのものになる．これが無限集合の場合になると，例えば，

$$M = \{\nu \mid \nu \text{ は正の整数}\}, \quad N = \{2\nu \mid \nu \text{ は正の整数}\} \tag{15}$$

とすると，NはMの部分集合である．だが，$\nu \leftrightarrow 2\nu$の一対一対応により，同じ濃度を持つことになる．無限集合においては，この(15)におけるMとNのように，本来部分と全体という関係にあるはずのものが，濃度という概念によって同等なものと扱われる．これは有限の世界ではあり得ないことである．カントルは，続けて「連続するn重集合の濃度が探求されるべきである」と述べている．すなわち先に示された連続体である実数の集合R（可算濃度ではなかった）に対して，R^nの濃度に関心を向ける．今度は，次元の相違が無限の世界でどのように捉えられるかを考察しようとする．こうして1対1対応による集合の濃度の相等性が次元を越えて押し広げられていく．われわれはそれを「論理的に」確認することとなる．

カントルが1878年論文で掲げる定理は，次の通りである[33]．

> 定理A　$x_1, x_1, \cdots, x_n$をn個の互いに独立した変化する実数の量とする．それらの内のどれもが，すべて≥ 0かつ≤ 1の値をとり得ると考える．そして別の一つの変数tが同じ区間（$0 \leq t \leq 1$）を動くとするならば，量tとn個の量の組$x_1, x_1, \cdots, x_n$とが，定まったtの値に対して確定した値の組$x_1, x_1, \cdots, x_n$とが対応し，逆に定まった値の組$x_1, x_1, \cdots, x_n$に対して確定したtの値が，対応するようにできる．

この定理の証明のために，カントルは無理数の列と（1次元的）実数直線との関連を探る．前提としては，無理数が以下のような

---

[31]［Cantor 1932］, S. 119–133.
[32] *Ibid*., S. 119.
[33] *Ibid*., S. 122ff.

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \cdots) \tag{16}$$

無限に続く連分数で表現できることを用いる[34]．ここで，各 α_ν は正の整数を表す．すると $0 < e < 1$ となる．いま，以下の n 個の無理数を考える．

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1\nu}, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \cdots, \alpha_{\mu\nu}, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \cdots, \alpha_{n\nu}, \cdots). \end{aligned} \tag{17}$$

加えて新しい無理数 d を

$$d = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu, \cdots) \tag{18}$$

と定める．ただし，

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu\nu}\ (\mu = 1, 2, \cdots, n,\ \text{そして}\ \nu = 1, 2, \cdots)$$

とする．カントルは，このとき次の定理を掲げる．

> 定理 C　$e_1, e_2, \cdots, e_n$ が n 個の独立した相異なる変量とし，各々は区間 $(0, 1)$ の無理数の値をとり得るとする．また d は同じ区間の別の変量である．すると d と n 個の量の組 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ とは互いに一義的にかつ完全に対応することが可能になる．

すなわち，(17)の n 個のシステムの無理数（R^n に属する）と(18)の一つの無理数との 1 対 1 対応を主張するのである．カントルは，先の定理 A がこの定理 C に帰着する（同値である）と言う．そして，この論文の中心的主張のために次の定理 D が目標と定める．

---

34 ［高木 1971］，130−136 参照．高木貞治の著作『初等整数論講義』第 2 版は，数の連分数展開について詳細な議論を行っている．その定理 2.3 で「有理数は二通りに有限連分数に展開される．無理数はただ一通りに無限連分数に展開される．有限連分数の値は有理数で，無限連分数の値は無理数である」としている（135 頁）．加えて，無理数の例として，

$$\begin{aligned} \pi &= 3.1415926535\cdots \\ &= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}} \end{aligned}$$

を与えている．

定理 D　ある変量 e があって，区間 (0, 1) のあらゆる無理数の値をとり得る．すると，それは 0 以上 1 以下のすべての実数，すなわち有理数，無理数の値をとるある変量 x に互いに一意的な対応がつけられる．したがって，任意の $0 \leq e \leq 1$ なる無理数の値に対して一つの，しかも唯一の $0 \leq x \leq 1$ である実数の値とが対応する．逆に任意の実数値 x に対して，ある無理数の値 e とが対応する．

この定理 D によって，$R^n \leftrightarrow R$ との 1 対 1 対応が成立し，次元を越えた濃度の相等が認められるのである．この論理的帰結は，われわれの直観（空間認識に伴う次元の相違）を越えている．

カントルは，こうした結果を 1878 年論文の刊行される前年に得ており，自身の数学に対する理解者と考えていたデデキントに書簡を通じて伝えていた．1877 年 6 月 20 日，23 日，25 日，29 日と，カントルは立て続けに 1878 年論文の内容とほぼ同じ事柄を書簡にしたため，デデキントに送っている[35]．カントルは，次元の概念を越えて濃度が同等になることに自らの驚きを書き記している．本稿の冒頭に掲げた言葉，「それを見ても，私にはそうとは思えない」は，1877 年 6 月 29 日付書簡に含まれる．彼の興奮しつつも，困惑を隠せない心理状態を見事に伝えている[36]．われわれもそうした心境を共有できる．だが盟友はカントルよりも少し冷静であった．カントルの書簡に対してデデキントは，成果を認めながらも鋭く問題点を見抜いていた．1 対 1 対応は，さらに連続性が考慮されるべきで，そうするとなお次元の概念は残るのではないかと指摘した（1877 年 7 月 2 日付カントル宛書簡）[37]．

問題点はあるにせよ，要素間の 1 対 1 対応による濃度の相等は無限集合論の基礎となり，予想外の結論を導いた．だがカントルは留まることはなかった．濃度から超限順序数へとさらに 1870 年代の成果を上回る深遠な世界が見えてくる．すでにクロネッカーなどの批判にさらされていたカントルは，次第に精神の暗闇へと引きずり込まれていくのである[38]．

2.2.3　超限順序数

前項で見たように，自然数全体の集合 N（濃度 $\aleph_0$），実数全体の集合 R（濃度 $\aleph$）という種類の異なる無限集合が存在する．数直線上の 1 点として対応させた連続する数の集合

[35] ［Cavaillès 1994］, pp. 398−412.
[36] 注(1)参照.
[37] ［Cavaillès 1994］, pp. 412ff.
[38] クロネッカーは，ベルリン大学の教授を務め，当時ドイツの数学科における大御所であった．注(6)にも指摘したように，中央から離れたところで研究を続けていたカントルに対する批判・無理解は，カントルにとって一定の打撃であったことは確かであろう．後年，カントルは精神面でのバランスを失い，療養生活を送ることになる．そうした結果に及ぶ原因の一つが，自身の研究に対する無理解や，もたらされた様々な障害にあると考える向きもある．［Dauben 1979］は，カントルを襲った悲劇について一章（pp. 271−299）を割いて分析している．

が，有理数全体，あるいは代数的方程式の解となるような数全体と異なる濃度を持つという数学的事実は，ある種の驚きを伴う．無理数全体が数の集合に付け加わるとそこに無限の深遠な世界が開かれることになるのである．ただしカントルの議論はそこに止まらない．次元の問題も超越して，同じ濃度となる場合もあり，また連続体（＝1 次元的な数直線上に連続的に並ぶ実数全体）のすべての部分集合を考えることでいかようにも濃度の高い無限集合を作り出せるというように，無限自体がさらに無限の階層を持っているという構造も明らかになった．カントル自身の「それを見ても，私にはそうとは思えない」という率直な感想は，こうした事柄から引き出されたのであった．カントルは，なお前に歩んでいった．1880 年代に入っても無限集合論は進展が続き，6 編の連作論文が発表された．「線状点集合について」（Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten）と題され，1（1879 年），2（1880 年），3（1882 年），4（1883 年），5（1883 年），6（1884 年）と刊行された．その中で，とりわけ第 5 論文は重要性を持つ．これは単独で『一般集合論の基礎』（*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*，以下「基礎」論文と称する）として公刊された．カントルの無限集合論の中核をなす最重要論文である．われわれもこの「基礎」論文に内容に目を向けよう．

1883 年の「基礎」論文中，超限順序数の問題が論じられる．元来，数は「物を数える」（＝基数の考え）を原点として発生したと考えられる．加えて，1 番目，2 番目，3 番目，…，n 番目という順番を表す機能（＝序数の発想）も併せ持つ．言い換えると，区別のない要素間に順序をつけて並べる仕方を考え，数によって表現することである．この自然数が備える序数としての働きを無限集合に拡張していくとどのような成果が得られるのだろうか．実はこの超限順序数を通じて，カントルは「実無限」（Eigentlich-Unendliches）としての無限概念を一層鮮明にしていく．すなわち，可能性として有限を逸脱していく，あるいは，変化・生成のメカニズムが与えられて有限と異なる存在となり得ると理解するのではなく，一つの総体を把握できる存在として「無限が定った形式の中に現れる」（das Unendliche in solch einer bestimmten Form auftritt）ものとみる見方である[39]．無限をどのように捉えるかについては，思想史における長い時間的経過の中での諸々の見解がある．われわれの議論のためにあえて単純化すれば，可能無限と実無限の二つの立場が代表する．前者は一つの実体として無限に多くのものが存在すると考えない．例えば，立体を細かく薄い平面に分割する上で，あくまでも可能性として無限に多くの物々への分割可能性があると想定する．または増大する数列において，規則が与えられることで，無限に多くの数が生成されていくと考える．こうした形で無限を把握する立場である．古くはアリストテレスに遡る発想である[40]．カントルはそうした立場には異を唱える．無限に多く存在する

[39]［Cantor 1932］, S. 166.

[40] アリストテレスは『自然学』第 3 巻で無限に関する考察を行い，実無限を否定する論拠をまとめている．［アリストテレス 2017］，116−160 頁参照.

表 1　順序数，および超限順序数 ω（その 1）

順序数		左から右へ順序をつけて並んでいる数
1	→	1
2	→	1，2
3	→	1，2，3
	…	
ν	→	1，2，3，…，ν
ω	→	1，2，3，…，ν，…

要素を持つ集合の総体を把握可能として，数学の議論に乗せてしまうのである．もちろん記号表現の力を借りることで可能になる．これは，17 世紀以降発達した代数的思考様式の自然な到達点でもある[41]．カントル自身が「基礎」論文では，アリストテレスを引き合いに出して自己の考えと立場を異にする代表者として名前を挙げている[42]．無限をどのように捉えるかは，数学上の問題としても，哲学上の問題としても様々に議論されてきた問題である．カントルが披露する無限に関わる哲学はまた後で見ることにする．まずは超限順序数の理論にその内容について確認しよう．

「基礎」論文における超限順序数の理論　順序数とは何か．カントルの「基礎」論文をもとに意味を定めておこう．ただし，この 1883 年論文よりも後に出版された，1895 年から 1897 年にかけての論文「超限集合論の基礎づけに関する貢献」（Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre，以下「貢献」論文と称する）ではより整理された記述を見ることができる．そこで「基礎」論文にあわせて，「貢献」論文も適宜参照しつつ，注記して数学的な理解を深めていきたい．

通常の自然数 1, 2, 3, … に対して，順序数は表 1，表 2 のように定める[43]．すなわち，単位（＝1）から始めて，すでに出来上がった数に単位を付加することで新たな数を作る，そうしたメカニズムを利用していく．そしてこの順に左から並べ，それぞれ表 1 の左の欄のように順序数を定める．こうした順序数の発生の仕方をカントルは「第一生成原理」（das erste Errzeugungsprinzip）と呼んでいる．順序数 ν は，ある定まった有限の表現となっている．この有限の順序数 α，β に対しては，交換法則 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ は成り立つ．第一生

[41]「代数的思考様式」という用語は，もともと数学史家マホーニィによる．本数学史講義（第 5 回）で，デカルトに代表される 17 世紀の代数的方程式論の進展に合わせてその内容を紹介した．［林 2011］，33f 頁参照.

[42] カントルはアリストテレス『形而上学』第 11 巻第 10 章に着目している（［Cantor 1932］, S. 174）．その『形而上学』における無限に関わる議論は，ちょうど注(40)で言及した『自然学』の議論と対応しており，『自然学』第 3 巻の抄録となっている．［アリストテレス 1968］，387–392 頁，あるいは 612ff 頁参照.

[43]［Cantor 1932］, S. 195f.

表 2　順序数，および超限順序数 ω（その 2）

順序数		左から右へ順序をつけて並んでいる数
$\omega+1$	→	1，2，3，…，ν，…，a_1
$\omega+2$	→	1，2，3，…，ν，…，a_1，a_2
$\omega+3$	→	1，2，3，…，ν，…，a_1，a_2，a_3
	…	
$\omega+\nu$	→	1，2，3，…，ν，…，a_1，a_2，a_3，…，a_ν
	…	
$\omega+\omega$	→	1，2，3，…，ν，…，a_1，a_2，a_3，…，a_ν，…

成原理によって生じる順序数の列 $X = \{1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots\}$（これをカントルは「第一類」とする）は，最大の数を持たない．この順番で左から右へと並ぶ数の列があるとき，（有限の順序数でないという意味を込めて）新しい記号 ω を与える．これはすべての有限の順序数よりも大きい順序数であり得る．こうして新たに数が産出される原理は，「第二生成原理」（das zweite Errzeugungsprinzip）と呼んでいる[44]．さらに第一生成原理にしたがって，有限個の数が順序づけられて，この数列に加わっていくとき超限順序数の列が表 2 のように定まる．かくして再び第 2 生成原理により $\omega + \omega = 2\omega$ が生じる（ただし後で述べるようにこの表記には注意を要する）．さらに第一生成原理と第二生成原理により，

$$2\omega+1, 2\omega+2,\cdots,2\omega+\nu,\ \cdots,\ 3\omega+1, 3\omega+2,\cdots,3\omega+\nu,\ \cdots,\ \mu\omega+1, \mu\omega+2,\cdots,\mu\omega+\nu,\cdots \tag{19}$$

が生じる．そしてこの先に，$\omega\times\omega=\omega^2$ となる．こうして順序数は高次に昇っていく．実際，ω の有限次の多項式も含んで，

$$\nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu},\cdots,\omega^{\omega},\cdots \tag{20}$$

のように続く．こうして

---

[44] 超限順序数について，1883 年論文では，数学的に必ずしも整理された形で述べられていない．1895 年から刊行された「貢献」論文では，「順序型」という語を次のように定める．すなわち，

- 集合 M には，その要素 m の間に一定の順序が与えられている，
- 2 要素 m_1，m_2 に対して $m_1 \prec m_2$ となる関係がある，
- その関係において，推移律 $m_1 \prec m_2$，かつ $m_2 \prec m_3 \Rightarrow m_1 \prec m_3$ が成り立つ，
- 以上が成立するとき，「単純順序集合」（einfach geordnete Menge）と呼ぶ，

この単純順序集合には一定の順序型（Ordnungstypus）が属する．ある集合 M に対してその順序型をカントルは $\overline{M}$ で表現している．なお，2 番目の項目については，一方がより低く，一方がより高いという序列がつくということである．カントルは，「われわれは，M からその要素 m の間の性質を捨象し，ただその序列のみを残しておくことによって得られる一般的概念と理解する」と述べている．加えて，二つの集合間で順序関係が一致する（相似性）や，整列集合 $(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_\nu, \cdots)$ の順序型を ω という記号で表すことを示している．［Cantor 1932］, S. 296−299，邦訳［カントル 1979］，21−26 頁．

$$\omega, \omega+1, \cdots, \nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu}, \cdots, \omega^{\omega}, \cdots, \alpha, \cdots \tag{21}$$

という第2生成原理を通じて生じる超限順序数の列ができる（これをカントルは「第二類」と呼ぶ）．かくして ω の記号を用いて無限の階層が生み出される．単に ∞ の記号を用いて量が有限でないことを表すこととも異なる．(21)に現れる順序数はすべて可算濃度の集合（濃度 $\aleph_0$）に対するものである．自然数の集合による可算個の直積集合 N^N の濃度が $\aleph$ であることを考えると，可算無限（濃度 $\aleph_0$）と非可算無限（濃度 $\aleph$）との相違もさることながら，同じ可算無限の中にも複雑な階層がある．まさにこれが無限構造の深遠さである[45]．

表2の中に現れる順序数の和については，一般に交換法則は成立しない．つまり，

$$\omega+1 \neq 1+\omega \tag{22}$$

である．式(22)の左辺は，表2にあるものだが，右辺は

$$a_1, 1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots$$

のように並ぶ数の順序数を表している．これは左辺と異なるものだからである[46]．また乗法についても交換法則は成立しない．上の(19)で 2ω と記された順序数があったが，これも

$$2\omega \neq \omega 2 \tag{23}$$

となる[47]．

---

[45] $\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$ であることの証明は，［志賀 1988］，101頁．同書の146頁も参照．

[46] 注(44)同様，1895年の「貢献」論文の第8節では，順序型の加法が定められている．整列集合 M，N に対して（$\overline{M}=\alpha$，$\overline{N}=\beta$ とする），2集合の和集合 $M\cup N$ において M，N それぞれの順序が同じまま保持されて，かつ M の任意の要素が N の要素よりも序列がより前にあるとするならば，

$$\alpha+\beta=\overline{M\cup N}$$

が成り立つ（順序型の記号が通常の補集合の記号と同じである点に注意）．この際，本文中の式(22)でも注意をしたように，$\omega+1\neq 1+\omega$ となることが記載されている．なぜなら，右辺 $1+\omega$ には「序列に関して最大となる要素がないのに」，左辺 $\omega+1$ には「最大要素がある」からである（右辺は $1+\omega=\omega$ となるとしている）．［Cantor 1932］, S. 301f，邦訳［カントル 1979］，30f頁．

[47] 1883年論文では，この点について明確に記述がなく，安易に $\omega+\omega=2\omega$ としてしまっている．1895年論文では，式(23)をはっきりと明示している．すなわち，順序数 ω を持つ $(e_1, e_2, \cdots, e_\nu, \cdots)$，$(f_1, f_2, \cdots, f_\nu, \cdots)$ に対して，

$$2\omega=\overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \cdots, e_\nu, f_\nu; \cdots)}=\omega$$
$$\omega 2=\overline{(e_1, e_2, \cdots, e_\nu, \cdots, f_1, f_2, \cdots, f_\nu, \cdots)}$$

である（*Ibid*., S. 303，同邦訳，32頁）．1883年論文では後者の $\omega 2$ の意味で，2ω と記されている．同様に式(21)で，$\nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu}$ と書かれているものは，$\omega^{\mu}\nu_0+\omega^{\mu-1}\nu_1+\cdots+\nu_{\mu}$ と書かれてしかるべきものである（*Ibid*., S. 333，同邦訳，77頁）．

カントルが述べる順序型（数）は以上のように定まる．だが単に要素間に前後の順序関係が確定した「順序集合」（geordnete Menge）に対する順序型が決まっただけである．1883 年論文では明確になっていないが，ここに要素の対応のみならず，順序の対応性を通じて集合の相似性を入れ，「同じ」順序型を定めるとしても[48]，まだその順序型自体について，大きさの順序関係が与えられていない．そこで整列集合（wohlgeordnete Menge）の概念が必要になる[49]．

1883 年論文での整列集合の定義は次の通りである[50]．

> 整列集合とは，任意のきちんと定義された集合において，次のように理解すべきものである．すなわち，その中の要素が互いにある一定の与えられた系列により結びつけられており，しかもその集合には〔その系列の中で〕第 1 となる要素が存在し，かつ任意の個々の要素に対して（その連なりの最後の要素になるまで）次の他の要素が明確に続いていく場合をいう．

1895 年「貢献」論文の第 2 部は，1897 年になって刊行される．その論文では，やはり整列集合について，さらに数学的に整理された記述が見られる[51]．

以上のような整列集合のを定義づけを確認するために例を挙げる．いま，整数全体の集合 Z を考える．

$$Z = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

はこのままでは整列集合ではない．最下位の要素が定まっておらず，他の任意の要素が続いていく系列構成の法則が与えられていない．しかしこれを，

---

[48] 1895 年論文では，二つの順序集合 M，N に対して，1 対 1 対応が成立する（同じ濃度を持つ）だけでなく，M の 2 要素 m_1，m_2 と N の 2 要素 n_1，n_2 とが対応し，かつ n_1，n_2 の序列関係と m_1，m_2 の序列関係が一致するとき，二つの集合 M，N は相似（ähnlich）であると定義している．*Ibid*., S. 297，同邦訳，23 頁．

[49] ［下村 1988］，393f 頁．

[50] ［Cantor 1932］, S, 168.

[51] 1897 年の「貢献」論文第 2 部では，冒頭に整列集合の定義が次のように置かれている．

> われわれが整列集合と名付けるのは一つの単純順序集合（einfach geordnete Menge）F においてその要素が f が，「一定の系列」をなして上昇しており，その最下位の要素 f_1 から，次々と以下の二つの条件を満たしながら，次第に大きくなるような F のことである．
>
> 1）F には最低の序列を持つ要素 f_1 が存在する，
>
> 2）もし F' が F の部分集合であり，そして F には F' のすべての要素と比べて，より高い序列を持つ一つの要素，または多くの要素が存在するならば，F' 全体のあとに直ちに続く F の要素 f'，すなわち F' と f' の間の序列を持つ要素が一つも存在しないような要素 f' が存在する．

この論文の欄外の箇所に，1883 年の「基礎」論文で述べたものと，言葉が異なるだけで一致すると記されている．*Ibid*., S. 312，邦訳［カントル 1979］，46f 頁．

$$F = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \cdots\}$$

とすることで無限集合 F は整列集合となる．つまり 0 が最下位の要素となり，以下 $|n|$ の大きさにしたがって（$|n|$ が等しいときは正負の順に）要素を整列することができる．しかしすぐさま次の問題が提起されるだろう．どのような集合もこうした順序づけが可能なのだろうか．一般に「すべての無限集合は整列集合になり得るか」という問題である．カントルは 1883 年の「基礎」論文では，第 3 節冒頭で次のように述べている[52]．

> 整列集合の概念は，それ自体あらゆる集合論にとって基本的であることが証明される．任意のうまく定義づけられた集合が，つねに整列集合の形に移し変えられるということは，私には基本的かつ影響の大きいことで，その一般的有効性により，とりわけ注目すべき<u>思考の原則</u>（Denkgesetz）のように見える．また後出の論考の中で立ち戻ることになるだろう．

カントルは，後に出版される論文においてこの整列可能性の問題に「立ち戻る」としたが，特に証明を与えることはしなかった．むしろ一般的な整列可能性を「思考の原則」として，証明を必要としない論理的前提を捉えていたふしもある[53]．カントルの無限集合論にとって，暗黙の了解とされている事柄が，より深い洞察によって証明の対象とされ，さらにそのための論理構築がなされるには，なおしばらく時間を要する．「うまく定義づけられた集合」（wohldefinierte Menge）とは何か．こうした根本的な部分に反省が求められていたのである．結局，1904 年にツェルメロが「整列可能性に関する新しい証明」という論文を発表し，解決に至る[54]．ただしその解決には，選択公理の導入という新たな火種が数学界に残されたのである[55]．カントルの無限集合論は鋭い洞察に基づいて，思いもよらぬ論理的帰結をもたらした．だがそこには埋め合わせなければならない事柄も同時に伴っていたのである．

「基礎」論文の第 12，13 節は別の重要な問題の提起にもつながった．すなわち，連続体問題へと発展する事柄である．先に第一生成原理とそれに応じてできる順序数の列（第 1 類と呼んだ）と第二生成原理とそれに応じてできる順序数の列（第 2 類と呼んだ，すぐに

---

[52] ［Cantor 1932］, S. 169．下線は引用者による．

[53] ［Zermelo 2010］, S. 83f.

[54] ［Zermelo 1904］が該当論文である．1908 年には改良された証明が示される（［Zermelo 1908］）．『エルンスト・ツェルメロ著作集』第 1 巻には，両者とも収録されているが（［Zermelo 2010］, S. 114−159），マイケル・ハレットによるカントルの無限集合論との関連を捉えた解説は参考になる．*Ibid*., S. 80−87.

[55] 本数学史講義第 11 回で，デデキントの 1888 年の著作『数とは何であるか，そして何であるべきか』の内容を分析した．その著作の，第 159 項で無限集合間における相似な（＝1 対 1）写像が存在することを示すのに，（デデキントは気づいていなかったが）選択公理が必要であった．デデキントの数学著作集を編纂したエミー・ネターはそれを指摘していたのだった．加えてツェルメロが 1908 年論文で，その選択公理も含めた集合論構成のための公理導入をどのように示したかを見た．［林 2017］，68−78 頁参照．

次に小さい順序数がない場合ともいえる）について言及した．カントルはこの「基礎」論文の第 12 節で，

$$\text{第 2 類は第 1 類よりも大きい濃度を持つこと．} \tag{24}$$

これを示す．表 1 や表 2，さらには(21)に現れる個別の順序数は，有限の濃度，あるいは濃度 $\aleph_0$ を持つ無限集合に対するものである．だが，一段階上のレヴェルに見地に立って，そうした順序数の列自体を新たな無限集合と考え，その濃度を測る．実際，この主張(24)は次のように証明される[56].

$\{\alpha_\nu\}$ を第 2 類の順序数の集合とする（可算無限濃度 $\aleph_0$ を持つ）．カントルは第 2 類の順序数で $\{\alpha_\nu\}$ の列の中に番号が与えられないものがあるはずだという．仮に $\{\alpha_\nu\}$ の最大の要素を γ とすると，第一生成原理より，$\gamma+1$ を作ることができ，$\{\alpha_\nu\}$ 内に番号が与えられない順序数となってしまう．よって主張(24)は成り立つ．あるいは，$\{\alpha_\nu\}$ の中に最大要素が存在しない場合を考える．カントルはこのときも $\{\alpha_\nu\}$ のあらゆる要素よりも大きい第 2 類の順序数 β が存在するという．さらに任意の $\beta' < \beta$ に対して，$\{\alpha_\nu\}$ に属し，β' を上回る要素をとることができることも示す．まず，α_{κ_2} を $\{\alpha_\nu\}$ の α_1 よりも大きい第 1 の要素とする．そして α_{κ_3} を α_{κ_2} を上回る最初の要素とする（以下同様に続ける）すると以下の二つの列が生じる．

$$1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4 < \cdots \tag{25}$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\kappa_2} < \alpha_{\kappa_3} < \alpha_{\kappa_4} < \cdots \tag{26}$$

すなわち，

$$\nu < \kappa_\lambda \Rightarrow \alpha_\nu < \alpha_{\kappa_\lambda}$$

が成り立つ列である．ここで，1 より大きく α_1 未満の順序数全体，α_1 以上 α_{κ_2} 未満の順序数全体，α_{κ_2} 以上 α_{κ_3} 未満の順序数全体，それぞれは可算である．よって可算集合の和集合の濃度も可算であるので，第 2 類の定義より，つねに第 2 類に属する β が存在して任意の順序数 α_{κ_λ} より大きくなる．また任意の与えられた ν に対して，列(25)において，κ_ν をそれより大きくとることができるので，よって $\alpha_\nu < \alpha_{\kappa_\nu} < \beta$ が成り立つ．さらに任意の $\{\alpha_\nu\}$ の要素 $\beta' < \beta$ に対して，$\beta' < \alpha_{\kappa_\nu}$ と決めることができる．結局，第二生成原理より，こうした β の存在が保証される．第 1 類の順序数の列の濃度が $\aleph_0$ であるのに対して，より大きい濃度 $\aleph_1 > \aleph_0$ が生まれるのである．

ところで，この濃度に関して，

$$\aleph_1 = \aleph \tag{27}$$

[56]［Cantor 1932］, S. 197f.

であるのか？という問題が生じる．他に中間の濃度があるのか？この(27)が連続体問題として認識される大きな問題である[57]．この問題をカントルは解決するに至らなかった．こちらは整列可能定理よりもさらに難題で，カントルの提起から 80 年近くの時間が必要となるのだった[58]．

第 13 節は前節を受けて，次の定理（カントルは「基本定理」と呼ぶ）に集約される主張が掲げられる[59]．

> (α') を何であれ第 2 類の中に含まれる数の集合とするならば，次の三つの場合のみが起こり得る．すなわち
>
> - (α') は有限集合である．すなわち，ある有限順序数からなる集合である，
> - あるいは，(α') は第 1 類の数の濃度〔$= \aleph_0$〕を持つ，
> - あるいは，三番目は (α') が第 2 類の数の濃度〔$= \aleph_1$〕を持つ
>
> かであり，第 4 の場合は与えられない．

この定理の帰結として，任意のうまく定義づけられた第 2 類の数集合の濃度を持つ集合 M が与えられたとき，カントルは二つの事柄が導き出せるとする．

1）M の任意の無限部分集合 M' は単純無限列の中に与えられる（可算濃度 $\aleph_0$）か，M' と M 双方に相互に相手に向かって一意的に写像される（同じ濃度を持つ），

2）M の部分集合 M'，M' の部分集合 M'' が与えられるとき，M'' が互いに相手に向かって一意的に写像可能ならば，つねに M' は M'' と M の両方に同様に対応づけられる．

こうした成果が 1883 年の「基礎」論文の順序数に関わる到達点であった[60]．

1895，1897 年論文は，1883 年論文で構想したアイデアをより整頓した形で記述している．だが後者の数学的射程をすべて明確に実現したとは言い難い．1883 年の「基礎」論文が目標にした地点のかなり手前に止まってしまったという評価もある[61]．基数と序数を通じて得られる無限概念の違い，すなわち基数は集合の要素間の 1 対 1 対応によって定まるとはいえ，隣同士の要素間の相違にまで目をやってはいない．同じ集合の細部の要素間の相違は考慮されない．それに対して序数を考えるときは，集合内の一つ一つの要素に対して区別を入れて順序を導入する．無限集合をどのように認識するかにおいて，単に総体としての把握に止まるか，個別の要素に対しても認識を及ばせるのか，これら二つの数，

---

[57] カントルはこの 1883 年「基礎」論文では，「第 1 類と第 2 類について，二つは最初の続きの濃度になる．すなわち，二つの濃度の間に他の濃度は存在しない，ということである．これは明確に一つの定理から発するものであり，私がすぐに掲げて証明したいことである」と述べている（*Ibid*., S. 199).

[58] ゲーデルはカントルが予想した連続体仮設「$\aleph_0$ と $\aleph_1$ の間に他の基数は存在しない」はいわゆる **ZFC**（［林 2017］，77 頁参照）の公理系が無矛盾であるならば，その体系の上で無矛盾であることを示した（1940 年）．さらに，コーエンは 1960 年代に入り，**ZFC** が無矛盾ならば，連続体仮設はその **ZFC** の公理系からは証明できないことを示した．［デデキント 2013］，271−274 頁参照．

[59]［Cantor 1932］, S. 200f.

基数と序数は異なる観点を持つ．そのことを通じて，単なる無限集合の中に異なる階層のあることを見い出しただけでなく，$\aleph_0$ から $\aleph_1$ へと次の濃度へ上がる契機をもたらした．その際，式(27)の $\aleph_1 = \aleph$ なのかという連続体問題が提示される．加えて整列可能定理が「思考の原則」として前提される．しかし後にこれは一定の反省を伴うことが分かった．整列可能定理が定理として成立するために，ツェルメロが導入したように選択公理という新たな要請が入り込む．これは数学の基礎なす論理構造の中に，別の設定が必要とされる場面となり，論争を引き起こすことになる．

また，連続体問題は，さらに容易な問題ではなかった．カントルの死後，様々なパラドックスの解決や新たな公理の設定を通じて，理論の展開がもたらされる．そして，そもそも数学の基礎構築をどのような立場で遂行するかという根源的問題が数学者たちの頭脳を支配する．1920 年代から 30 年代にかけて基礎をめぐる異なるアイデアのぶつかり合いから論争が生じ，その中で理論的な整理と融和（基礎構築に関する限界の認識と体系化による一定の了解の成立）が生じる．そうした蓄積のもとに，数学の理論を構築する上で公理系を設定し，その関連の中で検討されることになる．いわば相対化された形で（公理系が無矛盾性を持つときに正しいとも正しくないとも決定することができないという形で），1960 年代に初めて「解決する」のだった．素朴な意味で正しい，あるいは正しくないという類の問題解決はもはや望むべくもなかった．カントルによって大きな変革のスタートは切られた．だがすぐさま難点が明確になり，一定の落ち着き場所が定まるまで，なお時間をかけて様々な試行錯誤が繰り返されたのである．

2.2.4 「基礎」論文における無限の哲学

カントルの無限集合論を扱った研究として必須の文献［Dauben 1979］は，1883 年の「基礎」論文の数学的内容に関わる分析にだけでなく，哲学的主張を理解することにも 1

---

[60] 1897 年の「貢献」論文第 2 部では，この第 2 類の順序数を持つ集合の濃度について，より整理された（A から F までの定理の）形で述べられる（*Ibid*., S. 331ff，邦訳［カントル 1979］，74–77 頁）．

- A）第 2 類の順序数に属するすべての順序数全体 $\{\alpha\}$ は，その大小の順序によって一つの整列集合をなす，
- B）第 1 類，および第 2 類の順序数の相異なる数からなる任意の集合は最小数，つまり最小要素を持つ，
- C）第 1 類，および第 2 類の順序数の相異なる数からなる任意の集合は，その各要素をその数の大小関係にしたがって配列したものと考えると，整列集合をなす，
- D）すべての第 2 類の順序数 α の全体 $\{\alpha\}$ の持つ濃度は $\aleph_0$ ではない，
- E）第 2 類の順序数の相異なる順序数 β の任意の集合 $\{\beta\}$ は，それが無限である限り，その濃度として $\aleph_0$ を持つか，さもなくば第 2 類の順序数の濃度 $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ を持つかいずれかである，
- F）第 2 類の順序数の $\{\alpha\}$ の濃度は 2 番目に小さい濃度 $\aleph_1$ である．

以上のように判明に記されている．ただ最後の項目に掲げられる $\aleph_1$ が $\aleph$ に等しいのかという問題は解決を与えられないままに残される．

[61]［カントル 1979］，166 頁．

章を設けている[62]．カントルの無限に関わる哲学は，古代ギリシア以来の西洋哲学史の様々な学説をふまえた上で展開されている．したがって，安易にまとめにはなじまない．とはいえ無限の問題を，数学者が純粋に数学内部にとどまることなく考察しようとするのは「19世紀的」である．現在の数学論文には見ることができない議論と言える．20 世紀になると，数学と哲学は切り分けられる方向に進む．数学はその内部で果たすべき課題を設定し，哲学的な要素を排除する．われわれは，そうした意味で過去の遺物とも言えるが，同時に無限集合論を多面的に捉えようとしたカントルの主張を可能な範囲で把握することは必要であろう．

カントルは 1883 年の「基礎」論文に至る過程の中で，数学的な議論を育んできた．同時にカントルは，哲学史において必ずしも主流ではなかった「実無限」の発想を自己の数学研究に基づき主張する．先にも述べたが無限に関わる認識をくり返しを恐れず提示するならば，対立する次の二つの立場に要約できる．

1）実無限の立場＝実際に無限が存在し，何らかの方法によって認識可能である，

2）可能無限の立場＝あくまでも無限は可能性の中にのみ存する．

これらの二つの思想的立場の相克の中に歴史が流れてきたといえる．特に 2)は，アリストテレス以来の伝統的理解である．加えてキリスト教神学とも連動して，無限は神がつかさどる領域という了解が浸透していた．はっきり人間から切り離されていたのである．神学とアリストテレスの融合が果たされた中世以降，1)の立場を表明することは一定の困難が伴ったことは確かだろう．ただ近世以降，特に数学や自然学の発展により無限観に変化が生じた．特に記号代数の成果をベースにした微分積分学の発展は，無限小・無限大をそうしても議論の中に組み入れるために，何らかの形で関わりを正当化する必要があった．

結局，無限について語ることは世界観の表明に他ならない．前項までに見たように，カントルは数学的議論として一定の理論化を果たした．それだけでなく，ある種の哲学として実無限を擁護することを「基礎」論文の中で展開する（第 4 節から第 8 節まで）．「基礎」論文については，数学的な内容を前項まで見たが，そうした哲学的な議論も含まれている．後の 1890 年代半ばの「貢献」論文は数学的により洗練されているが，哲学に関わる議論は含まれていない．われわれは前回の数学史講義から現代数学の基礎に関わる議論を追究している．その冒頭で下村寅太郎の著作『無限論の形成と構造』にふれた[63]．下村が無限集合論の形成過程を主題に選んでその著作を執筆した理由は，その議論を通じて「ヨーロッパの『学』の本質的な性格を認めたからである」[64]．だからこそ下村はカントル

---

[62] ［Dauben 1979］, chapter 6, pp. 120−148.

[63] カントル以前の発展段階において，哲学史における無限の議論を総括している点で，下村の文献［下村 1988］の第 1 章から第 5 章は，いまなお第一に読むべき文献である．前回の数学史講義で，筆者（林）個人にとってこの著作が数学史研究の動機づけを果たしてくれたことについて述べた．［林 2017］，40−43 頁参照．

[64] ［下村 1988］，333 頁．

に対してのみならず，数学を支える思想的影響を底流に見て，その無限集合論形成への道のりを把握しようとするのである．われわれはカントルの「基礎」論文に記された記述の中で，特に重要性を持つライプニッツとの関連部分に着目し，カントルの思想的側面を抽出し，理解につなげよう．

カントルの「基礎」論文は，まず哲学史的観点から無限論の概括を示している．その中で言及される人物名は，デモクリトス，アリストテレス，デカルト，ロック，スピノザ，ライプニッツ，カント，ボルツァーノである．中でもライプニッツには繰り返し言及している．「基礎」論文第 7 節では，ライプニッツ流の無限に関する認識論が披露されている．そしてライプニッツの書簡に綴られた言説が援用される[65]．ライプニッツは自分自身が関わった数学（無限小解析＝微分積分学）の進展や独自の数学観に基づいた考えを開陳しているが，カントルにとっては自己の考えを後押ししてくれる教説の提供者と映ったのだろう．カントルは，ライプニッツと並んでボルツァーノにも言及するが，ボルツァーノが表明していた無限観に比して，ライプニッツがより好ましいものに見えたに違いない[66]．

カントルが引用するライプニッツの言説は次の二つである．一つは，1693 年 6 月終わりに執筆されたと考えられるシモン・フーシェ宛書簡である．これは同年の 3 月に『学術紀要』（*Journal des Sçavans*）誌に掲載されたフーシェのライプニッツにあてた書簡への返答に含まれる一節である．もう一つは，1706 年 3 月 11 日付で執筆されたデ・ボス宛書簡の一節である[67]．いずれもライプニッツが思考錯誤した数学上の理論的展開によって得た発想が表明されている．前者を引用しよう．

> 私は実無限というものを，自然がそれを忌み嫌っていると認めずに，一般的に言われているように，その著者〔＝神〕の完全さをよりよく特徴づけるために自然がいたるところ好んで用いているものとみなして支持します．だから私は，分割可能などと言わずに，どんな物質の部分も現実的に分割されないようなものなどないと思います．

---

[65] [Cantor 1932], S. 179f. 1883 年の「基礎」論文だけでなく，1885 年に刊行された論文においてもライプニッツ（1646–1716）の名を，その晩年の論考「モナドロジー」や論文「理性に基づく自然と恩寵の原理」（ともに 1714 年執筆）を引き合いに出して言及している．カントルのライプニッツへの傾倒を裏づける証拠である．*Ibid*., S. 275.

[66] ボルツァーノ（1781–1848）による無限論は，死後に出版された『無限の逆説』（1851 年刊）の中に記されている．ボルツァーノは，やはり目前の時代に活躍したカント，ヘーゲルからの影響を受けたようであるが，やはりライプニッツからも大きな影響を受け，批判的に継承しようとしたようである（[ボルツァーノ 1978]，122 頁）．

[67] ライプニッツの引用について，カントルは 1840 年に刊行されたエルトマンによる『ライプニッツ哲学全集』という版本のページ数を掲げて参照を求めている．ただ現在，ライプニッツの 1 次文献の編纂が進んだ状況の中で，エルトマン版は言及されることがもはや少なくなっている．したがって，書誌情報としてよりアクセスしやすい 1 次文献で当該の書簡への参照を求めることにする．フーシェ宛の返答の当該箇所は，[Leibniz 1923–], 2-2, S. 713，デ・ボス宛書簡は，[Leibniz 1875–1890], 2, S. 305，邦訳［ライプニッツ 1989］，134 頁となる．

したがって，極めて小さな部分が無限に多くの異なる創造物で満たされた世界と考えるべきなのです.

ここにはライプニッツの独自性が盛り込まれている．モナドロジーという晩年に綴られる世界観にも通じる．すなわち極小の世界の中に無限に多くの物々が存在するという，ある種の階層構造（と各階層間に付随する対応）を備えているという捉え方である[68]．それは，カントルの無限集合論によって数学的に明らかにされた無限集合間の階層構造と対比される．無限は，例えば濃度 $\aleph_0$ の一つだけではなかった．その中にさらに無限に多くの集合の階層が含まれていた．順序数の考察から明らかになったのをわれわれは見た．また $\aleph_0$ とは異なる無限集合の濃度が，（部分集合全体の濃度を考えることで）また無限に多く存在した．そうした無限の中に存在する差異は記号によって表出される．無限の認識に関してライプニッツは「共範疇的」（syncatégorématique）（＝それだけ単独で意味が定まるのではなく，他の諸項との結びつきにおいて意味が定める）と捉えていたが，カントルはこの用語「共範疇的無限」（syncategorematische Unendlich）を「基礎」論文でも用いている[69]．そしてライプニッツがデ･ボス宛書簡の中で，次のように述べることを「本質的に正しい」と評価している.

私は哲学的に語ることによって，無限大同様，無限に小さな大きさを，あるいは無限に多くのものと同様，無限小を定めるのではありません．実際，簡略化された言及の方法を通じて，その両方を精神の中にある作り物と（pro mentis fictionibus）捉えているからです．ちょうど代数において虚根が計算に適しているのと同じようにです．この間，私は以下のような表現が思考の簡略化にとっても，発見にとっても大きな効用を持つことを証明してきました．すなわち，無限小の代わりに，与えられたものよりも誤差が小さくなるように，誰かが望むよりも小さいものを代入すれば十分であるとき，誤差は導かれない，したがって誤差は与えられないと結論づけられるのです.

ライプニッツの無限論は，彼が接線法や求積計算を始めとする微分積分学の展開の中で次第に得られたものである．同時に，記号法に対して同時代人ニュートンと比べて強い関心を抱いていたことも反映されている．記号代数を活用した方程式論について，直接影響を

[68] ライプニッツの「モナドロジー」第 66 項，67 項には次のような記述がある．「そこで物質のどんな小さい部分にも，被造物の世界，生物や動物，エンテレケイアや魂の世界があることがわかる」（第 66 項）．「物質のどの部分も，草木に満ちた庭とか魚でいっぱいの池のようなものと考えることができる．ただし，その植物のどの小枝も，動物のどの肢体も，その体液のどの一滴も，やはり庭であり池なのである」（第 67 項）．こうしたライプニッツの世界の無限階層化に関わる発想がカントルを惹きつけたのだろう．［Leibniz 2004］, p. 237，邦訳［ライプニッツ 1989］，233f 頁.

[69]［Cantor 1932］, S. 180.

受けたデカルトの方法をさらに進めて，記号を問題解決の手段とするのみならず，数学における問題や対象の拡大をも目指した人物である．無限大あるいは無限小に関して，ある種の fictio，すなわち「作り物」，「架空のもの」と捉えている．目に見えるという意味での実在性を主張しているのではない．本稿の冒頭に掲げたカントルのデデキント宛書簡の言葉「それを見ても，私にはそうとは思えない」は，記号がもたらし，数学的に正当化された成果が，認識において容易に了解できない心情を述べているともいえるが，そこに助け舟が現れたということであろう．すなわち，カントルが言う「実無限」もあくまで記号表象の作用を通じて認識されるべきものである．何か絶対存在としてそこに存在することを主張しているのではない[70]．

ライプニッツの哲学は，数学的な存在として無限小，無限大を，方程式論で虚根が果たす役割のように，記号表象の中で議論が矛盾をきたすことなく結論が正当化されるようなものとして存在を積極的に認めていこうとするものである[71]．加えて先のデ・ボス宛書簡にあるように，誤差が与えられたどんな物よりも小さいということは，「誤差がないのと同じである」というみなし方は，現代の「$\epsilon-\delta$ 論法」をも彷彿とさせる．ライプニッツによれば，それはアルキメデス以来の数学における伝統的解釈であるという[72]．ライプニッツ自身は，17 世紀終わりにすでに起きていた無限小をめぐる論争に関して独自の見解を表明していたが，それが広く理解を得ていたかは別の問題である．そうしたライプニッツが述べた発想をカントルは支持する．19 世紀になって，ライプニッツの 1 次文献が整備され，充実してくるのと時を同じくして，ようやく理解者を得られるようになったというのが実情であろう．カントルは遅れてやってきたライプニッツの理解者の一人だった[73]．

---

[70] マイケル・ハレットはカントルの無限に関する哲学を次の 3 点に集約している（[Hallett 1984], p. 7）．

1）任意の可能的無限は，実無限の対応を前提にする，

2）超限数は数学的には可能な範囲で有限の数のように扱われる，

3）絶対的無限は数学的には決定することができない．

特に 3 番目は重要であり，カントルの無限集合論の本質の理解にとって不可欠の視点であろう．

[71] ライプニッツのライヴァルであったニュートンとの数学的発想上の比較は，［林 2016］で試みた．またデカルトの方程式論に影響を受けつつ，特に虚根をめぐっては，次の問題が生じる．すなわち，3 次方程式において，実根が得られるにもかかわらず根を与えるカルダノの公式によると虚根を通過せざるを得ないこともある．こうした問題について，ライプニッツがどのように了解したのか．さらにその「代数的思考様式」をどのように発展させたかについては，［林 2009］参照．

[72] ライプニッツが同時代における無限小をめぐる論争に対して意見表明をしている論考として，1695 年に刊行された論文「ベルナルド・ニーウェンテイト師によって提唱された微分法，あるいは無限小の方法をめぐって若干の困難があることに対する返答」を挙げることができる．ライプニッツはデ・ボス宛書簡でも示された「比較できないほど小さなものは無視してよい」という考えは，ユークリッド『原論』第 5 巻の量に関する議論やアルキメデスの文献に記された数学の世界で伝統的に了解されていることと異ならないと主張している．ライプニッツの柔軟性に富んだアイデアはユニークであるように見えるが，彼自身に言わせればすでに伝統的に受け入れられてきたことに他ならないのである（[Leibniz 1849−1863], 5, S. 322）．ライプニッツの無限小に関するアイデアの変遷と同時代に巻き込まれた論争については，［林 2003］，3.3 節「無限小概念とそれをめぐる論争」，特に 181−188 頁参照．

カントルは「基礎」論文第 8 節で，数学的な伝統の中に無限集合論を位置づけることも行っている[74]．そこで言及される人物名は，ガウス，コーシー，アーベル，ヤコビ，ディリクレ，ヴァイエルシュトラス，エルミート，リーマン，フックス，ポアンカレ，クロネッカー，そしてデデキントである．われわれも本稿の冒頭 2.2.1 項で無限集合論を考えるコンテクストを把握したが，カントル自身も 19 世紀の後半までの数学の発展を十二分に踏まえた上で貢献を果たしている．哲学的な伝統と直近の先行研究に支えられながら，カントルの無限集合論は形成された．まさにヨーロッパにおける「学の形成」の典型例がここに現れている．ただし，数学論文中に哲学的伝統を概括するような場面は 19 世紀から 20 世紀へと移り変わる中で消滅する．次稿で扱うヒルベルトはこの無限論に含まれる問題点を整理するとともに，数学としてどのような基礎のもとに議論が展開されるべきかを思案した．ヒルベルトの考えは，ライプニッツ，カントルの線に沿って記号のもたらす効用を形式的に最大限利用しつつ，その理論構成の前提として公理体系の独立性，完全性，無矛盾性を必要な条件と考える．ヒルベルトは当時の数学界の第一人者として，得られた成果を守ろうとしたが（注(14)参照），様々な波紋を巻き起こし，論争にもなった．だが最終的にゲーデルによる不完全性定理の証明を経て，数学の議論は数学の内部に一定の形で収め，哲学など外からの援軍を求めないという方向性が定着していく．

カントルが残した言葉の中で，次はとりわけ有名である．

> 数学の本質は，まさしくその自由性にある（Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit）

これはわれわれが追究してきた「基礎」論文第 8 節に登場する[75]．歴史的発展の継承と独自の理論の創出と哲学史における思想的サポートと，それらを総合して表明されたものである．同時に，前回の数学史講義で引用したデデキントの言葉，「数は人間知性の自由な創造物である（Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes）」と見事に響きあう[76]．この二人は数学の基礎に大きな足跡を残した．その二人は自由な発想の展開に可能性を見いだした．そして次なる展開を促した．ただ，カントルがライプニッツを持ち出し

---

[73] 同時代に生きた，ヨハン・ベルヌーイやヘルマンといったライプニッツの弟子ともいえる数学研究者たちが，ライプニッツやニュートンの言説をどう理解したのかは興味深い事柄である．また，最終的にどのような形で融合を図っていったのかは重要な問題である．とかく，ライプニッツ派とニュートン派の間で微分積分学に関する先取権論争が起きたことがクロース・アップされ，両派の対立が強調されることが多い．しかし，実際にはライプニッツが述べる記号論に基づいた独特の正当化よりも，数学的に受け入れやすかったニュートンの考え方をライプニッツ派も好んでいたことは確かである．そうしたテーマについては，［林 2001］参照．

[74]［Cantor 1932］, S. 183.

[75] *Ibid*., S. 182.

[76]［Dedekind 1930−1932］, 3, S. 335，邦訳［デデキント 2013］，45 頁．［林 2017］，54 頁参照.

て無限集合論の根拠づけを求めたことも，デデキントがデカルトの認識論を援用して無限集合の存在を示そうとしたことも，近世の哲学的認識論が相応に強力だったことの証である．ただ 17，18 世紀と異なり数学的に洗練された 19 世紀後半においては，すでに数学的理論は発展し，洗練の度合を高めていたので，哲学の力を借りること自体がアナクロニズムに陥っていたのかもしれない．そのように数学内部に留まることができなかった点でも二人は似ている．20 世紀にかけての展開を知るわれわれは，カントルの言葉を単純に「数学賛歌」として称揚するには一定の躊躇を持ってしまう．カントル以降の数学の基礎をめぐる論争は，次第に数学者たちのサイドの議論と哲学者たちのサイドの議論とが乖離していくプロセスのように見える．カントル自身も 1895 年から 1897 年にかけての「貢献」論文では数学上の議論のブラッシュアップに腐心している．だが，われわれは無限集合論を数学の外側に根拠づけようとも試みるデデキントやカントルの姿を歴史において貴重な存在とも考える．カントルは数学におけるオプティミズムを表明したかのように見える．だが，晩年カントルの実人生そのものは，必ずしも幸福とは言えなかった．様々な事情が重なり，彼は精神のバランスを失ってしまう．無限集合論は，カントルが全身全霊をかけて構築された．無限の深遠さは，一人の人物の精神を犠牲にしてその様相を明らかにしたのである．数学がもたらす人々のドラマの一端をわれわれも共有したが，やはり何らかの感慨を抱かずにはいられない．1918 年 1 月 6 日，ハレの精神科の病院においてカントルはその生涯を閉じた．

カントルの数学は 20 世紀に向けて確実に扉を開ける推進力を持った．とはいえ，少なくとも数学全体を支える基礎を論じる上で不十分な点もあった．そもそも「集合」自体の定義づけが素朴で，安易なパラドックスが生じてしまう．カントル自身もそれをわかっていたし，他からも少なからず指摘されていたことだった．その集合論をめぐるパラドックスは，安易な手直しにとどまらず理論構築に関して多大な反省をもたらす．この無限論と数学の基礎をめぐる議論がどのように進む方向性を模索するのか．また次回以降に追究していきたい．

（未完，次号に続く）

3　現代数学基礎論論争，形式主義 vs 直観主義

4　ゲーデルの不完全性定理

5　数学の哲学，フッサール，ヴィトゲンシュタイン

文　　献

1 次文献（翻訳も含む）

［Cantor 1915］Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, translated by Philip E. B. Jourdain (1915_1) (New York: Dover Publications Inc., 1955) (rep.).

［Cantor 1932］*Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, herausgegeben von Ernst Zermelo (1932_1) (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980) (rep.).

［Dedekind 1930−1932］*Richard Dedekind Gesammelte mathematische Werke*, herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, und Öystein Ore ($1930−1932_1$) (Bronx: Chelsea Publishing Company, 1969) (rep.).

［Descartes 1996］*Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery ($1897−1913_1$) (Paris: J. Vrin, 1996).

［Dirichlet 1889−1897］*G. Lejeune Dirichlet's Werke*, herausgegeben auf Verlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker und L. Fuchs ($1889−97_1$) (Bronx: Chelsea Publihshing Company, 1969) (rep.)

［Ewald 1996］*From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 1, 2, edited by William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1996).

［Fourier 1822］Fourier, Joseph, *Théorie analytique de la chaleur* (1822_1) (Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1988) (rep.).

［Gödel 1986−1990］*Kurt Gödel Collected Works*}, Vol. 1−2, edited by Solomon Fefferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort (Oxford etc.: Oxford University Press, 1986−1990).

［Hilbert 1926］Hilbert, David, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, **95** (1926), S. 161−190. 邦訳（抄訳）［ヒルベルト，クライン 1970］所収，220−242 頁.

［Leibniz 1923−］*Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Berlin: Akademie Verlag, 1923−).

［Leibniz 1849−1863］*G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt ($1849−1863_1$) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).

［Leibniz 1875−1890］*G. W. Leibniz Die philosophischen Schriften* herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt ($1875−1890_1$) (Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1996) (rep.).

［Leibniz 2004］Leibniz, G. W., *Discours de métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, Édition établie, présentée et annotée par Michel Fichant (Gallimard, 2004).

［Riemann 1990］Riemann, Bernhard, *Gesamelte Mathematische Werke, wissenschaftliche Nachlass und Nachtrage*, herausgegeben von Raghavan Narasimhan (Berlin etc.: Springer Verlag, Leibzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990).

［van Heijenoort 1967］*From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879−1931*, edited by Jean van Heijenoort (Cambridge, London: Harvard University Press, 1967).

［Weyl 1949］ Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926_1) (Princeton: Princeton University Press, 1949).

［Weyl 1968］ *Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von K. Chandrsekharan (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968).

［Zermelo 1904］ Zermelo, Ernst, “Beweis, daßjede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)”, *Mathematische Annalen*. **59** (1904), S. 514−516.

［Zermelo 1908］ Zermelo, Ernst, “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1”, *Mathematische Annalen*. **65** (1908), S. 261−281.

［Zermelo 2010］ *Ernst Zermelo Collected Works*, Volume 1 edited by Heinz-Dieter Ebbinghaus and Akihiro Kanamori (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010).

［アリストテレス 1968］『アリストテレス全集』12，『形而上学』出隆訳（岩波書店，1968 年）．

［アリストテレス 2017］『アリストテレス全集』4，『自然学』内山勝利訳･解説（岩波書店，2017 年）．

［カッシーラー 1989−1997］カッシーラー，エルンスト『シンボル形式の哲学』（一）～（四），木田元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1999−1997 年）．

［カントル 1979］G. Cantor『現代数学の系譜　8　カントル　超限集合論』功力金二郎・村田全訳・解説（共立出版，1979 年）．

［ゲーデル 2006］ゲーデル，クルト『不完全性定理』林晋・八杉満利子訳・解説（岩波文庫，2006 年）．

［ディリクレ，デデキント 1970］P. G. L. Dirichlet, J. W. R. Dedekind『現代数学の系譜　5 ディリクレ，デデキント『整数論講義』酒井孝一訳・解説（共立出版，1970 年）．

［デカルト 2010］デカルト，ルネ『方法序説』山田弘明訳（ちくま学芸文庫，2010 年）．

［デデキント 1961］デーデキント『数について：連続性と数の本質』河野伊三郎訳（岩波文庫，1961 年）．

［デデキント 2013］デデキント，リヒャルト『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳･解説（ちくま学芸文庫，2013 年）．

［ヒルベルト，クライン 1970］D. Hilibert, F. Klein『現代数学の系譜　7　ヒルベルト　幾何学の基礎，クライン　エルランゲン･プログラム』寺阪英孝･大西正男訳･解説（共立出版，1970 年）．

［フッサール　1968−1976］フッサール，エドムント，『論理学研究』1−4，立松弘孝・松井良和・赤松宏訳（みすず書房，1968−1976 年）．

［ボルツァーノ 1978］ボルツァーノ, B.『無限の逆説』藤田伊吉訳（みすず書房，1978 年）．

［ライプニッツ　1989］『ライプニッツ著作集』9，『後期哲学』西谷裕作・米山優・佐々木能章訳（工作舎，1989 年）．

［リーマン 2004］リーマン，ベルンハルト『リーマン論文集』足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳（朝倉書店，2004 年）．

2 次文献

［Belna 1996］Belna, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege: théories, conceptions et philosophie* (Paris: J. Vrin, 1996).

［Cavaillès 1994］Cavaillès, Jean, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, présentation par Bruno Huisman (Paris: Hermann, 1994).

［Dauben 1979］Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Princeton: Princeton University Press, 1979).

［Dugac 1976］Dugac, Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: J. Vrin, 1976).

［Dreben and Kanamori 1997］Dreben, Burton and Kanamori, Akihiro, "Hilbert and Set Theory", *Synthese*, **110** (1997), pp. 77–125.

［Ebbinghaus 2007］Ebbnighaus, Heinz-Dieter, *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work* (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007).

［Ferreirós 2007］Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Second Revised Edition (Basel: Birkhäuser Verlag, 2007).

［Ferreirós and Gray 2006］Ferreirós, José, and Gray, Jeremy J., *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy* (Oxford: Oxford University Press, 2006).

［George and Vellman 2002］George, Alexander and Vellman, Daniel J., *Philosophies of Mathematics* (Malden, Oxford: Blackwell Publisihers, 2002).

［Hallett 1984］Hallett, Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size* (Oxford: Clarendon Press, 1984).

［Jech 1973］Jech, Thomas J., *The Axiom of Choice* (1973_1) (Mineola: Dover Publications Inc., 2008) (rep.).

［Jech 2003］Jech, Thomas, *Set Theory The Third Millennium Edition, Revised and Expanded* (Berlin, Heidelberg New York etc.: Springer, 2003).

［Kanamori 1996］Kanamori, Akihiro, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **2** (1996), pp. 1–71.

［Kanamori 2004］Kanamori, Akihiro, "Zermelo and Set Theory", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **10** (2004), pp. 487–553.

［Kanamori 2009］Kanamori, Akihiro, *The Higher Infinite, Second Edition* (Berlin, Heidelberg: Springer, 2009).

［Lauria 2004］Lauria, Philippe, *Cantor et le transfini: mathématique et ontologie* (Paris: L'Harmattan, 2004).

［Mclarty 2006］Mclarty, Colin, "Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of the Functors", in［Ferreirós and Gray 2006］, pp. 187–208.

［Moore 1982］Moore, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (1982_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

［Moore 2002］Moore, Gregory H., "Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolu-

tion of Hilbert's Thought", *Historia Mathematica*, **29** (2002), pp. 40−64.
［Reid 1970］Reid, Constance, *Hilbert* (1970_1) (New York: Springer-Verlag, 1996).
［Sieg 2013］Sieg, *Wilfried, Hilbert's Programs and Beyond* (New York etc. : Oxford University Press, 2013).
［Tieszen 1989］Tieszen, Richard, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge* (Dordrecht, London, Boston: Kluwer Academic Press, 1989).
［Tieszen 2005］Tieszen, Richard, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2005).
［Tieszen 2011］Tieszen, Richard, *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press, 2011).
［van Dalen 2013］van Dalen, Kirk, *L. E. J. Brouwer Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life* (London etc.: Springer-Verlag, 2013).
［新井 2011］新井敏康『数学基礎論』（岩波書店，2011 年）.
［伊東・原・村田 1975］伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』（筑摩書房，1975 年）.
［彌永 1972−1978］彌永昌吉『数の体系』（上），（下）（岩波新書，1972 年，1978 年）.
［菊池 2014］菊池誠『不完全性定理』（共立出版，2014 年）.
［キューネン 2008］キューネン，ケネス『集合論：独立性証明への案内』藤田博司訳（日本評論社，2008 年）.
［小松 1967］小松勇作『無理数と極限』（1967 $年_1$）（共立出版，2009 年）.
［齋藤 2002］齋藤正彦『数学の基礎：集合・数・位相』（東京大学出版会，2002 年）.
［佐々木 1985］佐々木力『科学革命の歴史構造』上，下（1985 $年_1$）（講談社学術文庫，1995 年）.
［佐々木 2001］佐々木力『二十世紀数学思想』（みすず書房，2001 年）.
［志賀 1988］志賀浩二『集合への 30 講』（朝倉書店，1988 年）.
［志賀 2013］志賀浩二『数学という学問：概念を探る 3 』（ちくま学芸文庫，2013 年）.
［下村 1988］『下村寅太郎著作集』1，『数理哲学･科学史の哲学』（みすず書房，1988 年），『科学史の哲学』（1941 $年_1$，2012 $年_2$）所収，143−329 頁，『無限論の形成と構造』（1944 $年_1$，1979 $年_2$）所収，333−450 頁.
［杉浦 1980−1985］杉浦光夫『解析入門』1，2（東京大学出版会，1980−1985 年）.
［鈴木 2013］鈴木俊洋『数学の現象学：数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学』（法政大学出版局，2013 年）.
［赤 1957］赤攝也『集合論入門』（1957 $年_1$）（ちくま学芸文庫，2014 年）.
［高木 1971］高木貞治『初等整数論講義』第 2 版（1931 $年_1$）（共立出版，1971 年）.
［高木 2010］高木貞治『定本　解析概論』（1938 $年_1$）（岩波書店，2010 年）.
［田中 2005］田中尚夫『選択公理と数学：発生と論争，そして確立への道』（増訂版）（遊星社，2005 年）.
［長岡 2018］長岡亮介「ゲオルク・カントルと彼の集合論」，『数学文化』，**29**（2018 年），13−25 頁.

［林 2001］林知宏「無限小量をめぐる論争と基礎づけの問題，ライプニッツ，ヴァリニョン，ヘルマン」，『数学史の研究』（京都大学数理解析研究所講究録 1195，2001 年）所収，14−37 頁.

［林 2003］林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）.

［林　2009］林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』（世界思想社，2009 年）所収，37−56 頁.

［林　2011］林知宏「数学史講義（第 5 回）: 17 世紀における記号代数と方程式論」，『学習院高等科紀要』，**9**（2011 年），11−38 頁.

［林　2016］林知宏「数学史講義（第 10 回）: アイザック・ニュートンの数学 5 」，『学習院高等科紀要』，**14**（2016 年），57−110 頁.

［林 2017］林知宏「数学史講義（第 11 回）: 数学の基礎をめぐって 1 : 集合と数の理論（デデキント）」，『学習院高等科紀要』，**15**（2017 年），39−82 頁.

［原 1975］原亨吉『近世の数学 : 無限概念をめぐって』（1975 年$_1$）（ちくま学芸文庫，2013 年）.

［渕野　2018］渕野昌「カントルの精神の継承：無限集合の数学 / 超数学理論としての集合論のその後の発展と，その「数学」へのインパクト」，『数学文化』，**29**（2018 年），26−41 頁.

［前原 1977］前原昭二『数学基礎論入門』（朝倉書店，1977 年）.

［リード 1972］リード，C.『ヒルベルト：現代数学の巨峰』彌永健一訳（1972 年$_1$）（岩波現代文庫，2010 年）.

［ワイル 1959］ワイル，ヘルマン『数学と自然科学の哲学』菅原正夫・下村寅太郎・森繁雄訳（岩波書店，1959 年）.