論文審査の結果の要旨

数理物理学に現れるさまざまな発展方程式型偏微分方程式の初期値問題の解の詳細な解析は、方程式が線形の場合は方程式に現れる線形微分作用素の、非線形の場合は考える解の周りの線形化作用素の、スペクトル解析を用いて行われることが多く、発展方程式型偏微分方程式の研究にスペクトル解析の果たす役割は極めて大きい。本論文は線形微分作用素のスペクトル理論に関連した３つの問題についての申請者の研究成果をまとめたもので、対応した３つの部分からなっている。

第一部は流体力学の Navier-Stokes 方程式の適当な解の周りの線形化作用素として現れる大きなパラメータ $1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ を含む一次元の非自己共役微分作用素を m に関して一般化した作用素

$$H(\varepsilon) = -d^2/dx^2 + x^{2m} + i\varepsilon^{-1} f(x)$$

のスペクトル解析に関するものである。ただし $m = 1, 2, \ldots$ は正整数, $f(x)$ は無限遠方で $|x|^{-k}$ のように減衰するモース型の実数値関数, i は虚数単位である。$H(\varepsilon)$ が二乗可積分関数のなすヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上に自然に定義する作用素をふたたび $H(\varepsilon)$ と書く. この時, 虚軸は $H(\varepsilon)$ のレゾルベント集合に含まれ, $\lambda \in \mathbb{R}$ の時 $(H(\varepsilon) - i\lambda)^{-1}$ はコンパクト作用素, $H(\varepsilon)$ のスペクトルは無限大に発散する離散的な固有値からなる。$H(\varepsilon)$ を右辺にもつ $L^2(\mathbb{R})$ における発展方程式

$$\frac{du}{dt} = H(\varepsilon)u$$

の解作用素 $U_\varepsilon(t)$ の作用素ノルムの $\|U_\varepsilon(t)\| \leq C_\varepsilon e^{-\mu_\varepsilon t}$ の形の評価が $H(\varepsilon)$ のスペクトルの実部の下端 $\Sigma(\varepsilon)$ ならびに虚軸上のレゾルベントの大きさをはかる量 $\Psi(\varepsilon) = \left(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(H(\varepsilon) - i\lambda)^{-1}\|\right)^{-1}$ を用いて与えられる。第一部は $\Sigma(\varepsilon)$ ならびに $\Psi(\varepsilon)$ の $\varepsilon \to +0$ における漸近挙動を Villani による変分法、ならびにレゾルベント $(H - i\lambda)^{-1}$ の詳細な解析によって評価したもので, 次の定理が主要結果である。

定理 0.1. $\nu(m) = \min(1/2, 2m/(k + 3m + 1))$ と定義する。$a_0 \leq \Psi(\varepsilon) \leq \Sigma(\varepsilon)$ で適当な定数 $0 < C < 1$ が存在して

$$C_1\varepsilon^{-\nu(m)} \leq \Sigma(\varepsilon), \quad C_2\varepsilon^{-\nu(m)} \leq \Psi(\varepsilon) \leq C_3\varepsilon^{-\nu(m)}$$

成立する. 但し a_0 は自己共役作用素 $-d^2/dx^2 + x^{2m}$ の最低固有値である.

$\Sigma(\varepsilon)$ に対する上からの評価は現在でもまだ知られていないのであるが, この定理によれば $\varepsilon \to +0$ の時, 作用素 $H(\varepsilon)$ の実部は一定, 虚部 $i\varepsilon^{-1}f(x)$ のみが増大するにもかかわらず $H(\varepsilon)$ のスペクトルの実部の下端は限りなく増大しその増大度は $\varepsilon^{-\nu(m)}$ の様に依存す

ると予想される。この定理は Gallagher–Gallay–Nier(2009) による $m=1$ の場合の結果の一般の m への拡張で、定理 0.1 によって $\Sigma(m)$, $\Psi(m)$ の m に関する依存の仕方を明らかにしたものである。

第二部は時間に依存した外部磁場・電場の中にある量子力学的 d 次元粒子に対するシュレーディンガー方程式の初期値問題

$$i\partial_t u = H(t)u(t) \equiv -(\nabla - iA(t,x))^2 u + V(t,x)u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$u(s,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

の解作用素の存在と一意性, すなわち方程式 (1) が粒子の dynamics を一意的に決定するか否かに関するものである。初期値問題 (1), (2) はいわゆる特性初期値問題で, 古典的な定理によって, 解のクラスに何らかの制限を設けない限り, 一つの初期条件に対して解は一般に無限個存在する。量子力学との関連から, シュレーディンガー方程式に対しては $\|u(t,\cdot)\| = \|\varphi\|$ を満たす $L^2(\mathbb{R}^d)$–値連続関数で, (t,x) の超関数として (1) を満たす解 $u(t,x)$ を考えるのが通常である。任意の $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して初期値問題のこのような解が存在し一意的であれば, $U(t,s)\colon u(s,\cdot) \mapsto u(t,\cdot)$ はユニタリな解作用素を定義する。しかし, この様に解のクラスを制限しても, 一般のポテンシャル A, V に対しては初期値問題 (1), (2) の解が一意的とは限らない。

磁場・電場のポテンシャル A, V が時間に依存しない時には, (1) がユニタリな解作用素を一意的に生成するためには $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定義域とした作用素 $H = -(\nabla - iA(x))^2 + V(x)$ が本質的に自己共役, すなわち一意的な自己共役拡張をもつことが必要十分である. H の本質的自己共役性の問題は古くから研究されているが, H が本質的に自己共役であるための現在知られている最良の十分条件は Leinfelder と Simader による次の条件

$$A \in L^4_{loc},\ \mathrm{div}A \in L^2_{loc},\ V \in L^2_{\mathrm{loc}},\ \text{で遠方で}\ V(x) \geq -C\langle x\rangle^2 \tag{3}$$

である. 但し $\langle x\rangle = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. (3) のうち A と V の不連続性に関する条件は最良で改善できない（以下, このことを sharp であるという)。また $A=0$ の場合には, $V(x)$ に対する無限遠での条件も sharp で, ある $\varepsilon > 0$ に対して $V(x) \leq -C|x|^{-2-\varepsilon}$ であれば, 初期値問題には粒子の無限遠からの様々な反射の仕方に応じた無限に多くの解が存在する。一方, 磁場 $B(x) = \mathrm{rot}A(x)$ が無限遠方で増大する時は (3) における V の無限遠での条件は

$$V(x) + |B(x)| \geq -C\langle x\rangle^2 \tag{4}$$

に改良され $|B(x)|$ の増大度に応じて, V の負の方向へのより速い増大が許されることが岩塚明によって, A, V が滑らかな関数の場合に示されている。第二部では以上の結果を

A, V が t に依存する場合に拡張して, $V(t,x)$ が各 t において変数 x に関する不連続性についての Leinfelder–Simader の条件 (3), ならびに (4) とほぼ同等な無限遠における条件を満たせば, A, V の t に関する適当な滑らかさの条件のもとで (1) が一意的な解作用素を生成することを証明した。次の定理が第二部の主定理である。$M(\mathbb{R}^d)$ は適当な定数 C に対して $Q(x) \geq C\langle x\rangle$ かつ $|\nabla Q(x)| \leq C\langle x\rangle Q(x)$ を満たす C^1 級関数の空間である。

定理 0.2. 次の条件を仮定する：

(1) 任意の t に対して $A(t,x)$ は x の C^3 級関数, 磁場 $B(t,x) = \mathrm{rot}\ A(t,x)$ は適当な定数 $C_\alpha > 0$ に対して $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{|\alpha|}\langle B(t,x)\rangle$, $(|\alpha| = 1,2)$ を満たす.

(2) $V_1(t,\cdot) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_x)$, $V_2(t,\cdot)$ は *Stummel class* で, ある $\theta < 1$, $C > 0$ と $Q \in M(\mathbb{R}^d)$ に対して $\theta|B(t,x)| + V_1(t,x) + C(t)\langle x\rangle^2 \geq Q(x)^2$ を満たす。

(3) ある $C > 0$ と $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ に対して $|\nabla_x \cdot \dot{A}| + |\dot{A}|^2 + |\nabla_x(\dot{A}^2)| \leq CQ(x)^2$.

(4) $\dot{V}(t,x) = W_0 + W_1 + W_2$ と分解され $\|Q^{-2+j}W_j(t)(-\Delta+1)^{-j/2}\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} \leq C$.

この時, (1) はユニタリな解作用素を一意的に生成する。

第三部は massless Dirac 方程式の零エネルギー解

$$Hu = (-i\alpha\cdot\nabla + Q(x))u(x) = 0 \tag{5}$$

に関するものである。ここで $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は Dirac 行列. $Q(x)$ は 4×4 エルミート行列値関数で適当な $\rho > 1$ に対して $Q(x)$ の各成分が $|Q_{jk}| \leq C\langle x\rangle^{-\rho}$ を満たすと仮定する。この時, H はソボレフ空間 $\mathcal{H}^1 = H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ を定義域としてヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ における自己共役作用素である。(5) の解 u は $u \in \mathcal{L}^2$ なら H の零エネルギー固有関数, 適当な $0 < s \leq 3/2$ に対して $\langle x\rangle^{-s}u \in \mathcal{L}^2$ であれば零レゾナンスであると言われる。この論文において申請者は $\langle x\rangle^{-3/2}u \in \mathcal{L}^2$ を満たす (5) の解は自動的に任意の $\gamma < 1/2$ に対して $\langle x\rangle^\gamma u \in \mathcal{H}^1$ を満たすこと, とくに零レゾナンスは存在しないことを証明した。

相場大佑が提出した学位論文の審査会は、平成２６年１月２１日１６時３０分から１時間にわたって、学習院大学南４号館２０５号室において開催された。上記４名の試験担当者によって、当該論文の内容およびこれに関連する分野の学識ならびに数学全般にわたる学力について、詳細な質疑応答形式による口頭試験を行った。

非自己共役微分作用素の詳細なスペクトル解析は一般に困難で、これまで得られている研究成果は作用素が自己共役作用素の摂動であるか、作用素が何らかの対称性を持つ場合に関するものがほとんどで、この論文で取り扱われた歪対称性を増幅させる大きなパラ

メータを持つ非自己共役作用素のスペクトル解析を行ったものはきわめて少ない。その中で、第一部で用いられた Gallagher–Gallay–Nier 研究手法が非自己共役微分作用素のスペクトル解析に対してある種の汎用性を持つことを明らかにした意味は大きい。第二部において得られた定理は時間依存型シュレーディンガー方程式の初期値問題の解作用素の存在と一意性に関するこれまでに知られている最良の結果で、シュレーディンガー方程式の解の存在と一意性に関する標準的な reference となることが期待される。また第三部において得られた定理は、$\langle x\rangle^{-\min(\frac{1}{2},\rho-1)}u \in \mathcal{L}^2$, であれば $u \in \mathcal{H}^1$ であるという楳田–斉藤 (2009) ならびに Zhong-Gao(2013) による定理を、簡明な証明方法によって条件ならびに結果のいずれをも改良したものでこの問題に対する重要な貢献である。

以上を総合し, 試験担当者は全員一致で本論文が学位論文として十分な内容であり、博士（理学）の学位を授与するのにふさわしいものであると認める。

論文審査委員： 主査 谷島賢二 教授
水谷 明 教授
中野史彦 教授
中村 周 特別非常勤講師
（東京大学・大学院数理科学研究科・教授）