

ミルナー不変量計算のための非可換多項式処理

学習院大学	計算機センター	久保山 哲 二
東京学芸大学	(計算機センター客員研究員)	安 原 晃
学習院大学	計算機センター	磯 上 貞 雄
	計算機センター	城 所 弘 泰
	計算機センター	村 上 登志男

1 はじめに

本研究では絡み目の不変量の一つであるミルナー不変量の現実的かつ効率的な計算方法の開発を目的とする。絡み目とは空間内の閉曲線の集合である。与えられた二つの絡み目が同値であるかどうかを判定し、絡み目を分類する絡み目の「位置の問題」に関する研究は、位相幾何学の一分野である結び目理論の重要な課題の一つである。絡み目の位置の問題を研究するには、絡み目の不変量の研究が不可欠である。絡み目の不変量として、本研究では、ミルナー不変量に着目する。ミルナー不変量はジョン・ミルナーによって1954年に定義された絡み目不変量である [2]。さらに、ミルナーは1957年に絡み目からミルナー不変量を計算するアルゴリズムを示している [3]。理論上は、ミルナーにより提示されたアルゴリズムを用いると、与えられた絡み目からミルナー不変量を計算することができる。

このアルゴリズムは非常にシンプルであるが、その計算量は膨大である。そのため、理論的には計算可能であるが、現実的には手に負えない問題である。この性質のために、近年まで実計算による研究は殆ど行われてこなかった。

本研究の主要な研究成果は未発表であるため、本稿では、詳細には立ち入らず、研究の概要と成果の一部について報告する。

2 ミルナー不変量の計算

ミルナー不変量の計算の概要を、次に示す。

1. 絡み目を平面上に描いた表示から、ある非可換群を求め、その非可換群において、各成分に対応する元を求める。この元は、成分数 n の絡み目では、 n 変数の非可換な単項式の形で与えられる。
2. 次にこの単項式から非可換多項式環への準同型写像を与えるマグナス展開を行う。(マグナス展開は一般に無限個の単項式の和で与えられるが、次数を1つ固定し、それ以上の次数の項は無視することとする。) この展開における各項の係数をミルナー不変量という。

ミルナー不変量の計算は、絡み目の成分数と交差数、マグナス展開の次数の3つのパラメーターに依存してその計算量が増大する。

パラメーターの値の増加にともない、手順1で得られる単項式の大きさは増加する。たとえば、成分数 $n = 2$ 、交差数 $m = 3$ のある絡み目に対して、マグナス展開の項の次数が $k = 5, 6, 7$ と変化するに従って、

最初に得られる単項式のワード長 l は、それぞれ $l = 68779, 526819, 4015219$ となり、指数関数的な増加をしていることがわかっている。さらに、この単項式のマグナス展開に要する計算量はナイーブな方法を用いると $O(ml)$ ステップと記憶領域を要する。ミルナー不変量は、古くから知られる重要な絡み目不変量であるが、その計算プログラムはいまだに開発されていない。その理由としては、このような計算量の問題があると考えられる。

3 高速文字列処理としての不変量計算

ミルナー不変量の計算では、非可換な変数から構成される巨大な多項式が生成される。前述のように、計算過程で問題規模に対して指数的に増加する単項式を計算することは、空間計算量、時間計算量の観点から困難である。

そこで、我々の研究グループは、非可換な変数列が文字列とみなせることに着目した。コンピューター科学の分野では、優れた高効率の文字列アルゴリズムが多数提案されており、このような文字列処理技術を、ミルナー不変量の計算に適用することで、少メモリで高速な計算を実現することを目指した。

本研究では、文字列アルゴリズムの中でも、近年、九州工業大学の坂本比呂志教授らの研究グループによって研究が進められている文法圧縮アルゴリズム LCA に着目し、ミルナー不変量の効率的な計算アルゴリズムの開発を共同で進めている。文法圧縮はデータ圧縮技術の 1 つであり、与えられた文字列を文脈自由文法の文法規則として保持することで、データを圧縮する。ミルナー不変量の計算過程は、文法規則による文の生成と類似しているため、文法圧縮との親和性が非常に高い。

たとえば、文法圧縮技術ミルナー不変量計算の過程で生成される長さ $2767k$ 変数 ($k=1000$) の単項式 ($2767k$ 文字) を $1.6k(0.06\%)$ 文字まで圧縮することができる。通常の文章を対象とした一般の圧縮とは桁違いの圧縮率である。

ミルナー不変量の計算では、長大な単項式を導き出した後、さらに、マグナス展開をする。文法圧縮では、長大な非可換変数による単項式を文法規則により束ねあげたため、同じ変数列のパターンが単項式中に多数現れる場合は、1 回の展開により、文法規則により束ねられた同じパターンすべての展開ができることになる。

このような仕組みにより、文法圧縮アルゴリズム LCA により、少メモリーでかつ高速なミルナー不変量の計算が実現できる。

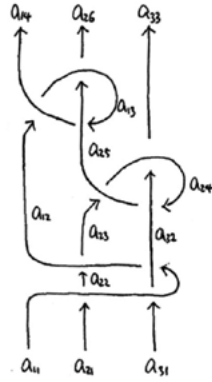
現在までに、九州工業大学の坂本比呂志教授と高島嘉将氏との共同研究により、ミルナー不変量計算のシステムを構築中であり、下記研究会論文 [4] により、性能評価の報告を行った。

高島嘉将, 坂本比呂志, 久保山哲二, 絡み目理論の解析ツール: 文法圧縮による Milnor 不変量の抽出, 人工知能基本問題研究会, SIG-FPAI88, pp. 77-88, 人工知能学会.

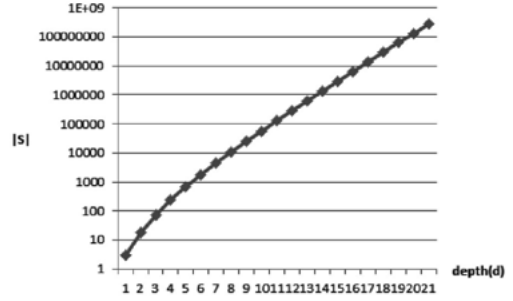
図 1 に実験の一部を示す。提案手法は、単項式の展開段数の増加に対して頑強であり、従来手法では計算が難しかった規模のミルナー不変量も計算することができる。現在、入力として手書きの絡み目図を与えると、ミルナー不変量の出力まで自動的に計算するシステムの構築中である。

4 おわりに

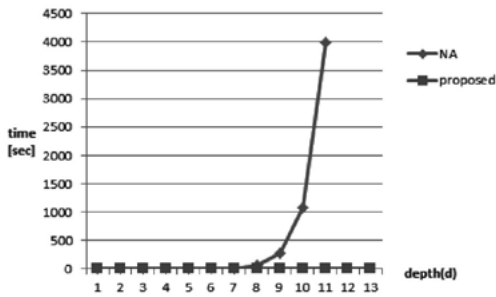
本稿で概要を報告した文法圧縮アルゴリズムに基づき、数学者が絡み目の図からミルナー不変量を簡単に計算できるツールを目指し引き続き開発を進めている。



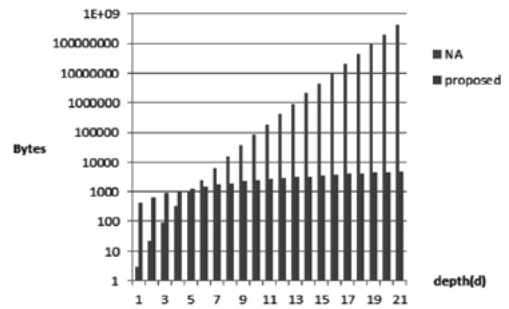
入力した手描きの絡み目図



展開段数 $\text{depth}(d)$ と単項式の長さ $|S|$ の関係



実行時間の比較



メモリ使用量の比較

図1 ミルナー不変量計算の性能評価: グラフ中の NA は、文法圧縮を用いない単純計算、proposed は文法圧縮アルゴリズム LCA をそれぞれ表す

本研究の代表者が、プロトタイプとして比較的ナイーブな方法で作成したミルナー不変量計算のプログラムは、実際に絡み目分野の証明に用いられ、文献 [1] に報告されている。

5 謝辞

本稿は、九州工業大学の坂本比呂志教授と大学院生高島嘉将氏との共同研究に基づいており、図1を含む研究概要の掲載を快諾していただいたことに感謝致します。

参考文献

- [1] Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara. Abelian quotients of the string link monoid. *arXiv preprint arXiv:1301.3001*, 2013. (<http://arxiv.org/abs/1301.3001>).
- [2] John Milnor. Link groups. *The Annals of Mathematics*, 59(2):177–195, 1954.
- [3] John Milnor. Isotopy of links, in “Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz”. pages 280–306, 1957.
- [4] 高島嘉将, 坂本比呂志, and 久保山哲二. 絡み目理論の解析ツール：文法圧縮による milnor 不変量の抽出 (特集 「big data と機械学習・データサイエンス」および一般). *人工知能基本問題研究会*, 88:77–80, jan 2013.