

数学史講義（第6回）： アイザック・ニュートンの数学 1

林 知宏

ニュートンを研究すればするほど、彼は私から遠ざかっていった。¹

1 はじめに

前回の数学史講義（[林 2011]）では、数学が大きく発展した17世紀ヨーロッパが舞台だった。その時代における記号代数の洗練と方程式論の展開をヴィエトとデカルトを中心に見た。今回は彼らの研究を受け継ぎ、さらに発展させた17、18世紀の後継者、アイザック・ニュートン（1642-1727）の数学について考察する。彼はまさしく人類が生んだ最大の数学的天才と言っても過言ではない人物である。ニュートンは、若き日にデカルトの「幾何学」ラテン語訳をはじめとする17世紀前半の先端的成果を学習し、さらに先へと進んでいった。特に接線問題についてデカルトの方法論にとって代わる新方法を作り出した。20代の後半までに「流率法」と称される手法をまとめ上げ、接線法のみならず求積問題をも体系化しようと試み、今日の無限小解析（微分積分学）の基礎を据えた。ニュートンよりもやや遅れて数学研究に参入し、独自に接線法や求積法の基礎を編み出したライプニッツ（1646-1716）とともに通常は「微分積分学の創始者」と称せられる（[林 2003]第2章、あるいは[林 2009b]参照）。だが同時代に生きた両者の間に、いつしか先取権をめぐる果てなき論争が勃発し、次第に誹謗中傷を繰り返すことになる。数学史における最も有名な論争である。ただニュートンの数学研究にひとたびふれるならば、そうしたスキャンダラスな側面は脇筋でしかないことがすぐに了解される。

全体の構成は次のようになる。まずニュートンの生涯をおおまかにおさえることにする。彼の数学研究が創造性に富んでいた時期は、必ずしも長期間にわたっているわけではない。特に本質的な部分は一定の時期に集中している。次に彼の編み出した流率法の形成の過程を分析する。そして代表的なテキスト「解析について」（1669年頃執筆）、「曲線の幾何学」（1680年頃執筆）、『曲線の求積論』（1704年刊）について、より詳細に分析する（ここまで本論考）。そして流率法の応用としてニュートンの名を不朽のものとした『自然哲学の数学的諸原理』（通称『プリンキピア』、1687年初版刊行）における諸命題の分析（流率法との関連）、さらには流率法以外の数学研究として代数研究（『普遍算術』（1707年刊））、曲線研究（『3次曲線の枚挙』（1704年刊））についてもふれる（以上後篇として次号に譲

¹[Westfall 1980], p. x, 邦訳 [ウェストフォール 1993], 7頁。

る)。ニュートンの数学研究は巨大な業績を伴っている。17世紀から18世紀において、一時代を画するものだった。われわれは「群盲象をなでる」の言葉があるにもかかわらず、あえてニュートンの数学をトータルに見ることに挑戦したい。

2 ニュートンの生涯

ニュートンの生涯は大きく四つの時期に分けることができる。それぞれの時期の主な出来事を確認しよう。ニュートンの伝記として定評のある[Westfall 1980]（邦訳[ウェストフォール 1993]）によりつつまとめ、[Cohen and Smith 2002]や[Gjertsen 1986]も参照する。以下の四つの時期の各々について紹介しておこう²。

- 1) 誕生（1642年）からケンブリッジ入学（1661年）まで、
- 2) 『プリンキピア』初版刊行（1687年）まで、
- 3) 造幣局長官としてロンドンに移動する（1696年）まで、
- 4) 晩年から死去（1727年）まで。

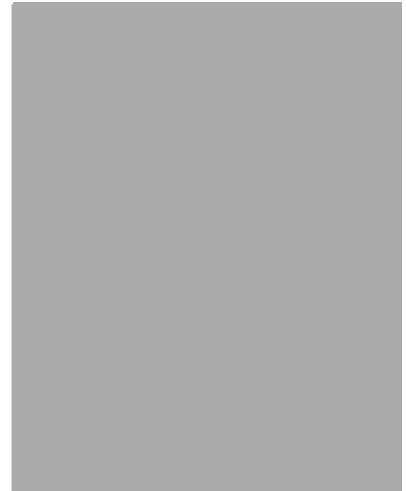


図1 ニュートンの肖像画（1702年）

誕生（1642年）からケンブリッジ入学（1661年）まで

ニュートンは、1642年12月25日にイングランド中部のウールズソープに生まれた³。ニュートンの生家は財産を持った農家であった。父アイザックは、ニュートンの誕生前に死去してしまい、母ハンナは生まれた息子に夫の名をつけたのだった。その後、ニュートンが3歳の時に母親は再婚する。ニュートンは生地近くのグランサムの学校に通い、地元で農業を営むことを期待されていたが早くから学問的な才能を発揮していた。母の兄弟にはケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジの卒業生がおり、彼の勧めで1661年にニュートンはケンブリッジへと進学した。

『プリンキピア』初版刊行（1687年）まで

トリニティ・カレッジでは、ニュートンは数学や自然学の研究書に親しんだ。アリストテレス、デカルト（1596-1650）、オートリッド（1573-1660）、ウォリス（1616-1703）等

²図1は、[Westfall 1980], p. 578 所収。

³日付に関して、イングランドではニュートンの生涯の間、ユリウス暦（旧暦）が採用されていた。この時期、大陸ではすでにグレゴリオ暦（新暦）に変更されている地域もある（旧暦よりも10日ほど進んでいる）。基本的にニュートンに関わる日時を表記には何も記さない。新暦を示す場合には、日付の後に（新）と付して区別する。

の著作を通じて多くを学んだ。特にスホーテンによってラテン語訳されたデカルトの『幾何学』（1659-61年刊）とウォリス『無限算術』（1656年刊）の学習がニュートンには決定的な意味を持った。前者からは、現在の微分法につながる接線、法線、曲率に対する計算技法を学び、後者からは求積問題への技法、または一般2項展開等の計算テクニックを習得したようである。1665年から翌年にかけてペストが流行し、大学は閉鎖された。ニュートンは故郷に戻り、数学研究に没頭する。そして1667年に大学に戻ってくるまでの間に

彼の流率法の基礎を固める段階に達し、なお新しい成果を導くことができた。トリニティ・カレッジのフェローになった後、1668年には修士号を得る。1663年以降、ケンブリッジにはルーカス数学教授職というポストが創設され、アイザック・バロウ（1630-1677）が初代の任に就いていた。ニュートンはそのバロウの後を継いで、第2代目のルーカス教授職に就任する（1669年）。

この1665年頃から1671年頃まで6年ほどがニュートンが最も数学的な創造力に富んでいた時期である。1666年10月の日付を持つ無題の論文、1669年前半までに執筆された「無限に多くの項を持つ方程式による解析について」（*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, 「解析について」と略す）、1670年から翌年にかけて執筆された「流率と無限級数の方法について」（*De methodis fluxionum et serierum infinitorum*, 「方法について」と略す）は、通常ニュートンの3大数学論文とされる。ちょうど同じ頃、ロンドンには学会として王立協会が発足していた（1662年）。また研究成果公表の場として、学会誌『フィロソフィカル・トランザクションズ』（*Philosophical Transactions*）も刊行され始めた⁴。ニュートンは、1672年1月に同協会の会員に選出され、研究者として広く世に認められる。ただし彼が記した数学論文は、あくまで私的に研究者たちの間で回覧されるにとどまり、出版されるのは、先の4)の時期以降までずれ込む（「解析について」は1711年、「方法について」はニュートン没後の1736年、1666年10月論文は20世紀になるまで未公刊のままであった）。ライプニッツはニュートンよりも後から数学研究に参入した



図2 トリニティ・カレッジのニュートン像
(著者とともに)

⁴現在の学会制度の雛形を作ったロンドンの王立協会では、事務局長を務めたヘンリー・オルデンバーグ（1619(?)-1677）という人物の貢献が大であった。彼は後にライプニッツと王立協会の関係者との間を取り持つ。ライプニッツは、その接触によって彼の数学研究の成果と先端研究との距離感を確認できたのだった。そしてライプニッツの依頼を受け、オルデンバーグはニュートンに直接ライプニッツへの書簡を書くよう勧める。これが両者の先取権論争にも大きく影響を及ぼすことになる。オルデンバーグ、あるいは当時の王立協会の状況については、[Hall 2002], [金子 2005]参照。

が、結果の公表自体は1680年代より行った。結果としてライプニッツの成果の方が先に世に広く知られることになる。ニュートンは、もともと結果を公けにすることにあまり積極的でなかった。そのため、ライプニッツのみならず他の同時代人たちに対して様々な（数学以外も含めて）研究成果の先取権を主張することに励まねばならなくなってしまった。

1670年代には数学以外の分野の研究も盛んに行っている。光学、化学（錬金術）、聖書年代学、神学等々、幅広い領域に関心を寄せている。特に錬金術に関心を持っていたことは、「近代科学」の建設に貢献した代表的人物であるニュートンのイメージにそぐわないと感じるかもしれない。ニュートンの時代に、われわれが通常想定する自然科学の諸分野がすでに確立されていたのでないことは注意を要しよう⁵。そうした研究は生涯にわたって集中度の差はあれども続けられていく。

1684年夏、「ハリー彗星」の名で知られるエドモンド・ハリー（1656-1742）がケンブリッジのニュートンを訪れる。彼はロンドンの研究者たちの間で話題になっている問題について尋ねるためにやってきたのだった。すなわち「逆2乗則による力を受ける物体はどのような軌道（曲線）に沿って運動するか？」という問題である。ニュートンは、「それは楕円である」と即答した。そしてその証明をロンドンのハリーのもとへ送る約束をした。同年11月には手稿「運動について」を残したが、これをさらに発展させて著作にしたのが『プリンキピア』（*Philosophiæ naturalis principia mathematica*）である。この著作は1687年に初版が刊行される。ニュートンの名を不朽のものとし、科学史に燦然と輝く大著はその後2度改訂が加えられ多大な影響を後世に及ぼす。地上界と天体運動を統一的に支配する力学法則が数学的な表現を伴って与えられたのだった。

造幣局長官としてロンドンに移動する（1696年）まで

『プリンキピア』初版刊行後の時期においてもニュートンはトリニティ・カレッジのルーカス教授職に伴う義務を果たしている。後に『普遍算術』として刊行される代数の講義を行っている。数学研究は、1670年代初めまでの成果を再度まとめ直したり、細かに整える作業が中心となる。一方で、化学実験や光学実験を不眠不休で繰り返し、1693年頃には精神的に不安定な状況に陥ってしまう。もともとニュートンは勤めているカレッジの教義（三位一体説）に疑義を感じており、ケンブリッジを離れたいという気持ちを抱くようになっていた。1689年にはケンブリッジ大学の代表として英国議会の議員にも選出されたが、1696年造幣局長官任命されたことを契機にロンドンへと向かう（ルーカス教授職には形だけ1701年までとどまる）。

晩年から死去（1727年）まで

ニュートンの人生の最後の時期には、ケンブリッジ時代の孤独な研学生活と対照的に社

⁵ニュートンの錬金術研究については[ドップズ 2000]参照。

会的な名声を得ることになる。まず1703年には、ロンドンの王立協会の会長に選出される。そしてその地位に終生とどまる。1705年には爵位も得る。またこの時期は、今まで一部の研究者にしか明らかにされていなかった研究成果が著作の形で公になった。1704年に刊行された『光学』初版には、付録として「曲線の求積論」, 「3次曲線の枚举」という数学論文が掲載される。ニュートンの数学論文がようやく陽の目を見ることとなった。1707年にはケンブリッジ時代の講義をもとに『普遍算術』が刊行される。この著作は、ニュートンの数学的論考として18世紀後半に全集が出されるまで最も多く版を重ねる⁶。加えて『プリンキピア』第2版は、大幅な改定を加えられて1713年に刊行される。

数学史上に並び立つ二人の巨人、ニュートン、ライプニッツの両者は直接面会したことはないと考えられる。そうした記録は残されていない。ただ先に述べたロンドン王立協会のオルデンバーグを介して2回書簡を交換したことがある(1676-1677年)。また1693年には一度だけ書簡を人を介さずやり取りしている。われわれが見ることのできるこれらの書簡からは、両者の間に感情的な対立は何もない。数学研究に後から参入してきたライプニッツがニュートンに対して自然に敬意を表していることがよくわかる。またニュートンの方でも、ライプニッツに対して許せる範囲で自らの手の内を見せているようである。自身の成果の公表に関して、非常に神経質だったニュートンには珍しいことである。両者の論文なり、著作が公にされ、彼らのもとに研究者たちが参集してくる。そして新たな研究が展開され始めた時、ニュートンやライプニッツ自身というよりも周辺の人々たちの手によって微分積分学の先取権をめぐる論争が始まる。いつの世もグループや派閥が形成されると、対立が生じるのである。1699年頃からくすぶっていたのだが、1709年になってニュートン側からライプニッツの剽窃を告発することで本格化する。ライプニッツ側も1712年に王立協会に正式に抗議し、結局ライプニッツの死(1716年)になっても収束することはなかった⁷。この論争自体は数学の発展に何も寄与することのなかった。ただ数学的内容に留まらず、両派の世界観にまで及んだ。その結果、広い範囲での思想上の相違が浮き彫りにされたことは確かである。ライプニッツと(ニュートンの代弁者である)サミュエル・クラーク(1675-1729)との往復書簡(1715-1716年)に

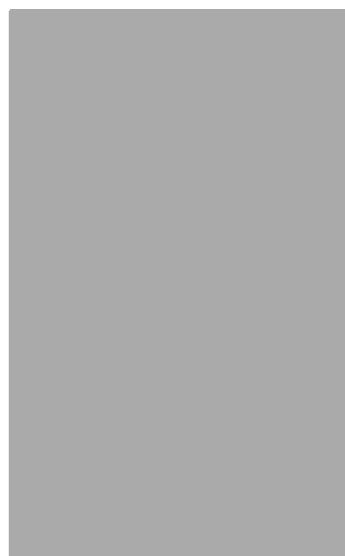


図3 ニュートンの墓(著者撮影)

⁶[Gjertsen 1986]によれば、ニュートンの数学的著作は、生前に刊行されたものから数えて、サミュエル・ホースリー(1733-1806)によってまとめられたニュートン全集(*Isaaci Newton opera quae exstant omnia*)全5巻(1779-1785年刊行)に所収されたものまで含めると、『普遍算術』は10回版を重ねている。ちなみに「曲線の求積論」は9回, 「3次曲線の枚举」は6回, 「解析について」は5回, 「方法について」は5回である。

⁷ニュートン、ライプニッツ両派によって繰り広げられた「醜い」論争の詳細は、[Hall 1980]を参照。

よって自然学、哲学、神学にいたる事柄が論じられた⁸。

ニュートンの主著である『光学』第2版は1717年に、『プリンキピア』第3版は1726年に刊行される。ニュートンは生涯にわたって学問追究を行ったが、1727年3月20日死去する。享年84歳だった。現在ニュートンは、ロンドンのウェストミンスター寺院に眠っている。

3 ニュートンの流率法の形成

3.1 ニュートンの流率法について

3.1.1 ニュートンの流率法を論じる前に

現在の数学の中に「微分積分学」という称される領域がある。通常、ニュートンやライプニッツがその創始者ということになっている。こうした歴史的な位置づけは、そもそも何を基準に行われるのだろうか。あるいは、どのような数学的定理・手法が確立したことをもって判断するのか。実は、安易には定めがたいところがある。どこに重点を置くかに応じて、誰の貢献が最重要とみなされるかが当然変わってきてしまうだろう。われわれの指標としては、

- 1) 17世紀における重要問題だった曲線への接線、法線、曲率問題に対して一定の計算技法、記号法が確立する、
- 2) 微分計算と積分計算の逆関係（微分積分学の基本定理）の把握がなされる、
- 3) その対象とする曲線の範囲の広がり代数曲線から超越曲線へと達する、

以上が揃った段階をもって微分積分学がスタートしたと考えることにする。三つの事項のそれぞれについて17世紀半ばには一定の取り組みがあった。ただニュートンとライプニッツは上記の事柄をセットにして取り組み、独自の貢献があった。その事実は動かし難い。

ここで注意しておかなければならないことがある。現代数学では、数あるいは量が一定規則に基づいて変化していくことを抽象化した関数の概念が不可欠の役割を果たす。また座標平面内にその対応 (x, y) を一つの点として表示し、その全体としてグラフ（一般に曲線）を得る。すなわち思考の流れとして、次のようになる。

関数の式、または曲線の方程式が与えられている ($y = f(x)$, または $f(x, y) = 0$ と表される) → グラフという形で曲線が目に見えるようになる。

現代の微分積分学では、通常その関数に対して微分法の計算法が体系化され、その図形的適用として接線問題が扱われる。例えば、図4のように、半径 a の円が一直線 (x 軸とす

⁸ライプニッツとクラークの往復書簡については、1次文献として[Leibniz GP], VII, S. 352-440, 邦訳[ライプニッツ 1989], 264-423頁。また2次文献として[Shapin 1981], [Vailati 1997]参照。

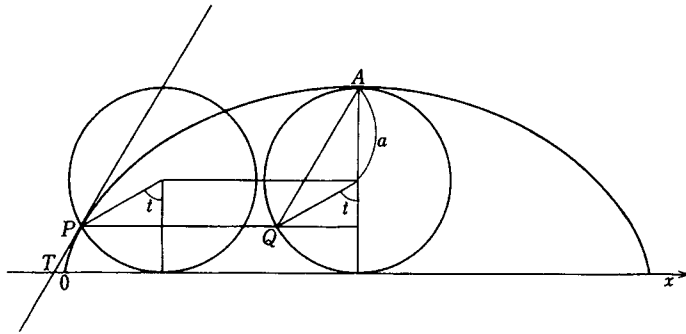


図4 サイクロイド曲線

る)の上を滑らずに回転する。このとき、円周上の一点の描く軌跡をサイクロイド曲線という⁹。実際、円の回転角を t とするとき、任意の曲線上の点 (x, y) は、

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \quad (1)$$

と表される。この式(1)の各々を t で微分することで、接ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix}$$

となる。いまわれわれがニュートンについて語る時代、すなわち 17 世紀後半から 18 世紀前半において、その関数概念が未発達なことが何より本質的である。現代との比較において記号法も含めてその点は注意を要する。またニュートンの具体的なテキスト読解の場面で言及する。

一方、ニュートンの時代にもいくつかの曲線はすでによく調べられていた。代表的なもの、古代ギリシアから研究がなされていた円錐曲線(円、楕円、放物線、双曲線)である。またサイクロイド曲線に代表される新たな曲線に対する研究も 17 世紀に入って行われていた。ただそのとき、曲線はあらかじめそこに存在している。そしてそれらの曲線に即して x, y の座標が設定され、曲線の方程式がその x, y を用いて示される(デカルト『幾何学』の発想)。したがって、

曲線があらかじめ目に見えるように与えられている

→ 曲線の方程式 ($y = f(x)$, または $f(x, y) = 0$) が作られる

という現代数学の発想と逆の流れになる。そしてその目に見える曲線に対して、接線なり、

⁹図4は、[杉浦 1980], 85 頁による。

法線なりを引く．加えてそれに伴って発生する諸量を求めることになる¹⁰．ちなみに，円錐曲線はすべて代数曲線（その方程式が x, y の多項式によって表される）である．ただそうした曲線のみならず，アルキメデスは，すでに紀元前3世紀に螺線のような超越曲線（代数曲線ではない曲線）の研究を独自に行っていた．ホワイトサイド編集の『ニュートン数学著作集』第1巻には，若き日のニュートンのノートブックを所収している．その中で円錐曲線や螺線について，ニュートンが先行研究を抜き書きしている様子が分かる¹¹．ニュートンは，さらに同時代の先端研究だったサイクロイド曲線（これも超越曲線）にも関心を寄せている．

ニュートンでさえも何もないところから数学的成果を作り出したのではない．彼にも直接参照したと考えられる先行研究はある．生涯を簡単に振り返った第2章でも一部言及したが，同時代人の多くと同じようにスホーテンのデカルト「幾何学」ラテン語訳はまず最重要テキストである．他に記憶すべき名として挙げられるのは，大陸側では，フランソワ・ヴィエト（1540-1603）である．また同じイギリス側の数学研究者の中では，オートリッド，ウォリス，アイザック・バロウとジェームズ・グレゴリー（1638-1675）である．彼らについてここで詳しく言及することは避けるが，ニュートンのテキスト読解の際に必要な範囲で言及する¹²．

3.1.2 流率とは何か

ニュートンが創始した微分積分学は「流率法」と称される．先に述べたように，そもそも流率法の対象となる曲線について，現代数学の視点を安易に持ち込まないようにすることを前提に，最も根源的な概念である流率について確認しよう．流率，あるいは流量という語がテキスト上初めて現れるのは，1670年から71年にかけて執筆された未刊行の論文「方法について」（先にニュートンの「3大論文」の一つであるとした）においてである¹³．ただ，本項では細かにその概念的変化を追うことはしない．初めて公刊された流率法のテキスト「曲線の求積論」（1704年刊）でニュートン自身がどのように定義づけているかを確認しよう．

「曲線の求積論」の論文の冒頭に流率が定義されているので，それを引用する．ニュートンは次のように述べている¹⁴．

¹⁰関数の原語 *functio* という語を数学的文脈で初めて用いたのはライプニッツである（1673年8月）．ただし本文で述べたように，曲線に対する関連量という意味において用いたのであって，決して「量と量との間の対応規則」といった意味ではなかった（[Leibniz A], VII-4, S. 656-673）．また[林 2003], 62-65頁参照．

¹¹[Newton MP], I, pp. 25-88.

¹²ヴィエトについては，先回の数学史講義（[林 2011]）で言及した．またオートリッドについての研究文献は，[Stedall 2002]を挙げる．またウォリスについては，[Wallis 2004]，バロウについては[Mahoney 1990]，[中村 1980]を代表例として挙げる．またグレゴリーについては，[Malet 1993]，[González-Velasco 2007]．17世紀の数学について，微分積分学との関連で全般的に研究状況を網羅している文献は[原 1975]である．

¹³[Newton MP], III, pp. 70-73.

1. 私は、数学的な量を一定で、可能な限り小さな部分から成るものと捉えずに、連続的な運動によって規定されたものと考え、すなわち、諸々の部分が与えられることによって得られるのではなく、点が連続的な運動をすることによって線が描かれ、またその描かれたものによって〔別のものが〕生み出されると考える。例えば、線の運動によって面が生まれ、面の運動によって立体が生まれ、辺の回転によって角が生まれ、連続的な流れによって時間が生まれるなどといったようにである。物の本性においてこうした創造が本当に起こり、物体の運動の中でつねに認識されている。この方法に関して、古代人たちは動く直線に不動直線の大きさとをかけ合わせることによって長方形が生まれると教えていた。
2. したがって等しい時間において量は増加する。量の増加によって、より大きな速さが、あるいはより小さな速さが生じて、増加・生成の元になる。そしてより大きな量やより小さな量が現れると考える。私は生成の元である運動の速さや、あるいは増加の速さから量を決定する方法を探究した。この運動や増加の速さを「流率」(fluxio) と称し、生み出された量を「流量」(fluens) と称する。これらを通じて、私は 1665 年から 1666 年に徐々に流率法へと進んだのだった。以下ではその方法を曲線の求積の中で利用した。
3. 流率とは、なるべく正確に言う、等しい最小部分の時間に現れる流量の増加である。また〔数学的に〕厳密に述べるならば、生まれつつある増加の最初の比 (in prima ratione augmentorum nascentium) として存在するものである。ただしそれは自分自身に比例する任意の線分によって表すことができる。

以上の引用の要点を箇条書きにしよう。

- 1) 数学的な量 (流量) は連続的な運動によって生じる、
- 2) 点の連続的な運動によって線 (曲線, 直線) が生じる、
- 3) 流率 = その運動の速さ, あるいは流量の増加の速さ、
- 4) 流率 (より数学的な定義) = 最小限の等しい時間部分に生じる流量の増加分, 生まれつつある流量の「最初の比」, 線分表示が可能

現代的な関数概念が欠けている代わりに、数学的な量を生み出す連続的な運動の存在を前提にしている。同時に明記されていないが、運動を認識するために時間が一様に流れていることが暗黙の了解とされ、後ろ側に隠れている。すなわち、現代風に記号化すると、

- ・時間 t に対して、数学的な量を生じさせる連続的な運動 $f(t)$ が与えられ、
- ・連続的な運動による点の連続的軌跡 = 連続曲線が作られる

と考えるのである。したがってニュートンの想定する曲線は、当然のことながら連続曲線

¹⁴[Newton H], I, p. 333. 本論文では、以下において [] 内の字句は引用者による補足を、() 内は参照したテキストの原語を表わす。

に限られる。また流率の存在＝微分可能性も当然備わると考えることに注意しよう。ニュートンの流率法は、代数曲線、超越曲線を問わず適用できる汎用性を持つに至ったが、それはまず曲線、あるいは数学的な量を一般的な生成原理に基づいて捉えていることが重要である。

また、ニュートンは上記の引用第3項で、ニュートン時代において数学的厳密さの規範であったユークリッド『原論』第5巻の比例論との関わりで、流率を「生まれつつある増加の最初の比」と述べている。これはニュートン流の極限概念を表明したものと考えられる。微小な時間変化 Δt に対する量の変化 Δf との比、 $\Delta t : \Delta f$ を流率と呼んでいる。ただしこれを現代的に $f'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ と了解することには飛躍がある。微小な時間単位での変化を表現するためには、やはり関数概念が洗練されていることが必要であろう。加えて、簡便な記号法も不可欠である。ニュートンは比の値を分数と同一視することも明記していない。あくまで比という古典的な表現にこだわっている。ニュートンの思考の枠組みをふまえておきたい。なお引用したこの1704年論文は、1680年代以降の明確化された流率概念のミニマム・エッセンスを述べている。後に1680年代に執筆された草稿「曲線の幾何学」を読解する箇所(3.2.2項)でも、同様にニュートンの流率の定義について検討することにする。

ニュートンはこの「曲線の求積論」を、すでに1690年代から彼にとって懸案事項だった微分積分学の先取権をめぐる他の数学者の(ニュートンにとってみれば)勝手な言い分をにらみながら執筆した。そこでは「1665年から1666年にかけて」流率法が形成されたと明記している。自己の方法が公刊される40年近く前に確立されていたことを強調したかったわけだが、このニュートンの認識自体は誤りでない。1665年の秋時点で基本となる発想は得られており、最初の定式化がなされている。そこで初期段階からの流率法の進展を次に見よう。

3.1.3 流率法形成の初期段階

第2章でも記したように、ニュートンの数学研究は1661年にケンブリッジ大学トリニティ・カレッジ入学後本格化する。そして通常、研究者たちが3大論文と呼ぶ成果は、1666年から1671年の間に生み出されている。本項では、ホワイトサイド編纂の『ニュートン数学著作集』第1巻に所収された手稿、論考をもとに1665年から1666年10月論文に至るまでの期間にスポットを当てる。最初期(1664年から1666年まで)におけるニュートンの数学研究については、[Panza 2005]の詳細な研究があるので、ニュートンの流率法の初期の進展を必要最小限の範囲で確認しよう。彼自身がこの時期が飛躍の時期だったと述べていた。1次文献を通じて、その時期に記された手稿を見る限り、ニュートンの自己評価は誤っていないことが了解できるだろう。

接線，法線に関する計算技法について

1665年5月20日の日付を持つ手稿は、「最大と最小問題に関する定理を見いだす一つの方法」というタイトルが付いている。曲線に対する接線を求めることに関して次の曲線を考える（図5）。ここで $ab=x$, $eb=y$, $bd=v$, $bc=o$, $cf=z$ である。また曲線の方程式は、

$$ax+xx = yy$$

$$\left(\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}a^2\right) \quad (2)$$

図5 1665年5月20日付手稿

これらの内、 bc は、微小な長さであることが想定されている。求めるのは、接線 g に対する法線 de と e からの垂線 be とでできる法線影 $bd=v$ である¹⁵。この曲線に内側から接する円が考えられているが、これはデカルト「幾何学」第2巻による¹⁶。ただしデカルトならば、双曲線に接する円の方程式を立て、「接する＝曲線と円の交点 e, f は一致する＝連立方程式は重解を持つ」という発想から v を求める。

ニュートンは異なる解決を図る¹⁷。 $ac=x+o$ より、式(2)で、 $x \rightarrow x+o$ の置き換えを行い、

$$ax+ao+x^2+2ox+o^2=z^2$$

となる。同時に直角三角形 ebd , fed において、 ed と fd が近似的に等しいと考え、

$$v^2+y^2=z^2+v^2-2ov+o^2$$

が成り立つ。これら二つの方程式から、（点 e が曲線上の点なので）式(2)をふまえると、

$$0=2o^2-2ov+ao+2ox$$

となり、両辺を（0でない想定される） o で割って、

$$2o-2v+a+2x=0 \quad (3)$$

を得る。デカルトと同じように、法線 ed , fd は $bc=o$ が「0へと消える」($bc=0$ vanisheth into nothing) と一致する。すると式(3)から、

¹⁵[Newton MP], I, pp. 272f.

¹⁶[Descartes 1996], VI, pp. 417-422, 邦訳[デカルト 2001], 34-38頁。

¹⁷以下のテキストにある数式を表示する場合、見やすさのために引用者の判断で変更する場合もある。

$$v = x + \frac{a}{2}$$

を得る。有限量として想定する微小変化 bc に対して、実質的な極限操作ともみなし得る「0へと消える」という発想で処理しているが、これは必ずしもニュートンの独創によるものではない。ニュートンの先人フェルマ (1601-1665) にも見られる。フェルマは放物線に対して (曲線の特性を利用しつつ)、有限微小量を動的に 0 へと近づけるという発想を示していた¹⁸。ただニュートンは、「 $y \perp x$ のときの曲線に対する接線の一般的定理」と称して広く代数曲線への一般的適用を試みている¹⁹。フェルマと異なり、一般性の追究という点で一線を画しているといえよう。

「微分積分学の基本定理」に相当する言明について

1665 年半ばに執筆したと推定される手稿「正方形化される曲線の面積を求めるための方法」には、微分積分学の基本定理、すなわち

$$F'(x) = G(x) \iff F(x) = \int G(x) dx \quad (4)$$

に関わる実質的な言及を見いだすことができる²⁰。この手稿では、命題と称して面積がある式で表わされている場合に、曲線がどのようなものであるか (不定積分が与えられたときにもとの関数を求める作業) をまず考える。図 6 で、 $dh=kl=a$ (定数)、 $db=mk=x$ 、 $bg=y$ 、面 $dbg = \frac{x^3}{a} =$ 面 $dklh$ とする²¹。すると $dk=z=bm = \frac{x^3}{a^2}$ となり、これが横線 x に対して点 m における縦線 z を表わし、すなわち曲線 dmf の式となる。

一方、逆に図 6 の曲線 dmf を与えて、曲線上の点 m における法線を引く (その法線の横線上の交点を n とする)。 $nm=s$ 、 $nd=v$ とすると、「フッデの方法」により、

$$v = x + \frac{3x^5}{a^4}, \quad nb = v - x = \frac{3x^5}{a^4}$$

となる²²。ところで、 $mb : bn = dh : bg$ を仮定すると、

¹⁸[Mahoney 1994], pp. 165-193.

¹⁹[Newton MP], I, pp. 276.

²⁰*Ibid.*, I, pp. 302-313.

²¹図 6 は、テキストの図 (*Ibid.*, p. 303.) を一部修正した。点 m' を追加し、同じ文字が重ねて使用されている点についてはダッシュをつけて ρ' , π' , x' , y' と変更した。

²²フッデ (Hudde, 1628-1704) の方法は、1658 年には見いだされていた。そして彼の論文は、スホーテンによるデカルト『幾何学』のラテン語訳 (1659 年刊) に付録として所収されていた。ニュートンはスホーテン訳を学習しており、フッデによる接線、あるいは法線決定法をこの時期頻繁に利用している。フッデの方法についての詳細は、[原 1975], 172f 頁, 209 頁。



図6 1665年半ば手稿

$$\frac{x^3}{a^2} : \frac{3x^5}{a^4} = a : y \text{ から } y = \frac{3x^2}{a}$$

となる。したがって曲線 dgw の式が得られたことになる。加えて「証明」が記されている。概略は次のとおりである。

$w\Pi\Omega$, Ωmz , zfv は曲線 dmf の接線である。また nm は、点 m における dmf への法線である。その他（図6の設定において）

$$mb : nb = bt : bm = \Omega\beta (= dx) : \beta m (= dz) = kl (= a) : bg (= y)$$

である。特に三角形 $\Omega\beta m$ は辺の長さが微小であることが想定されている。すると

$$\Omega\beta \times bg = \beta m \times kl, \text{ すなわち長方形 } kl\mu\nu = bgs\rho$$

である。同様に、長方形 $\pi\rho s\pi' = \theta\mu\nu\lambda$, $aq\pi n' = \rho'\theta\lambda\sigma$, $\rho\omega x'y' = \mu dh\nu$ となり、個々の面積が等しい長方形を合わせ、かつ横線上の点を無限に多くの数とすることで、

表1 ニュートンの積分表 (1665年11月)

曲線を表わす式	その面積を表わす不定積分の式
$3x^2=ay$	$\frac{x^3}{a}$
$4x^3+3bx^2=aby$	$\frac{x^3}{a}+\frac{x^4}{ab}$
$x^2y=a^3$	$(-)\frac{a^3}{x}$
$4y^2=9ax$ $9ax^2+12a^2x+4a^3=4xy^2+4ay^2$	$x\sqrt{ax}$ $x\sqrt{ax+a^2}$

長方形 $p'ohd$ = 曲線 $dg\Psi$ に囲まれた面 $dn'\Psi wg$

ニュートンはこの手稿の後半で、曲線の式とその面積（定数を除く不定積分）の一欄表を与えている。そこでは90通り以上の例を列挙している（一部を例として表1に掲げる）。不定積分の式が、 x のべき乗、あるいは x を含んだ2項式のべき乗になる場合を扱っている。ニュートンは「未知量が分子にある」場合、「未知量が分母にある」場合と分けている。加えて、分数乗のべきになる場合も示しているが、あくまで曲線を表わす式や面積を表わす式の中では分数乗の記法は用いられていない。だが、同時期の別の手稿には、

$$y = \frac{ax^{m/n}}{b} \Rightarrow \left(\int y dx \right) = \frac{nxy}{n+m} = \frac{nax^{(n+m)/n}}{(n+m)b}$$

とはっきり分数乗の記法を用いて、一般的公式を提示している²³。ニュートンはこうした表記法を最も早く用いた一人であると考えられる。（われわれの用語で）べき乗の関数に対して、特に指数が分数になる場合の考察は、ウォリス『無限算術』の中に登場する。ただしウォリスは、実際にべき乗の表記の中に、分数を書き込んでいない²⁴。

1666年10月論文について

3.1.1項で、微分積分学のスタートとしての指標を三つ掲げた。本項では、流率法形成の初期段階としてそのうちの二つについて1665年段階の状況を確認した。さらに1665年中におけるニュートンの記号法、計算技法、あるいは代数曲線から超越曲線へと関心が拡大していることについて、細かなフォローをすることも可能である。

超越曲線への関心の拡大については、1665年10月30日、11月8日付の手稿で、螺線、円積線、サイクロイド（デカルトの語法で「機械学的曲線」と称された）に対して接線を

²³[Newton MP], I, p. 318.

²⁴[Cajori 1928-29], Vol. 1, pp. 354f 参照.

決定するために幾何学的作図による方法が試みられている²⁵。計算技法に関して、言及しておきたいのは、基本的技法となる一般二項定理による展開を見いだしたことである。1664年から翌年にかけて、ニュートンはウォリスの『無限算術』の学習をふまえて通常の2項定理、

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \dots$$

から踏み出そうとしている。そして(分数乗の初出した)1665年半ばの手稿では、その分数乗の表記を用いた上で(あえてニュートンのテキストの表記のまま)、

$$\overline{a+b}^{m/n} = a^{m/n} + \frac{m}{n} \times \frac{b}{a} \times a^{m/n} + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{bb}{aa} \times a^{m/n} + \frac{m}{n} \times \frac{m-n}{2n} \times \frac{m-2n}{3n} \times \frac{b^3}{a^3} a^{m/n} \& C$$

の公式を得ている²⁶。加えて、流率の記号について変数 x や y の流率の意味で、記号 p ($= \frac{dx}{dt}$)、 q ($= \frac{dy}{dt}$) を導入している(ニュートンは $\frac{p}{x}$, $\frac{q}{y}$ と表記)²⁷。

かくして1666年10月の日付を持つ論文において、初期段階の一つの完成形態が示めされる。微分積分学が学として確立したと了解できる状況に達したことが確認できる。その1666年10月論文は(以下「10月論文」と省略する)、1665年中の試行錯誤を受けて、より整理された記述を見ることができ、論文の内容を列挙すると、以下の七つようになる²⁸。

- 1) 記号法 p , q , \square , \mathfrak{C} の導入、
- 2) $ax^{m/n} = \frac{q}{p} \left(= \frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow \frac{na}{n+m} x^{(n+m)/n} = y$ の公式化、
- 3) 面積計算(不定積分)の変数変換公式、
- 4) (一般二項定理の利用も含めた)無限級数展開から項別積分を行うこと、
- 5) 超越曲線(機械学的曲線)への接線法、
- 6) 「微分積分学の基本定理」に相当する表明、
- 7) 長さを求めることが可能な曲線を見いだすこと、あるいはその長さを求めること。

ここに掲げた2)から7)については、3.2.1項において1669年頃の論文を分析する際に、同様の具体例を扱うので、ここでは特に1)について言及しておく。

微分積分学が数学の一分野となる上で、特定の計算内容を示す記号法の導入は一つの必要条件である。「10月論文」では、 p , q が量の流率を表わす記号として再び登場する。ま

²⁵[Newton MP], I, pp. 369-382.

²⁶Ibid, pp. 320f.

²⁷Ibid, pp. 343f.

²⁸Ibid, pp. 400-448.

た流率を求める逆操作（＝積分計算）を示す記号として正方形を描いてそれを表わしている。加えて \mathfrak{X} や \mathfrak{Y} という記号を導入して、（われわれの用語で）2変数によって表わされる曲線の方程式 $f(x, y) = 0$ に対して、

$$\mathfrak{X} = x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = y \frac{\partial f}{\partial y}$$

を表現している。これらは曲率計算で必要となる。いわば、同次化された偏導関数に相当する記号である。ただ、ニュートン自身がこの論文以降でこれらの記号を利用していない。

ニュートンは独自の記号を数学研究の過程で作成していった。しかし周知の通り、記号考案においては結果としてライプニッツに軍配が上がる。ニュートンは定着する記号を残せなかった。理由として一つには、彼自身の論文が公表されず、一部にしか知られることなかったからである。ニュートンにとって成果を広く公にすることは関心外だったかもしれないが、やはり他者に影響力を及ぼすことは限られる。彼の記号として後年（1690年代）になって公表されるドット記号（ \dot{v} ）も、現在物理学で用いられることがあるが、数学ではほとんど利用されない。また微小な量の差を表わすのにニュートンは早くから o 記号を用いた。こちらは現在も無限小の表現として用いることがある。だがさらに高位の差（例えば、 d^2x, d^3x, \dots 、一般に $d^n x$ のように）を表現する場合にはまた別の文字をあてがう必要がある²⁹。記号を作ること、そしてそれを広く定着させるように学会内で影響力を行使すること、それらは数学問題解決能力とはまた異なる次元の行為かもしれない。

3.2 流率法のテキストを読む

本節では、ニュートンが記した流率法に関する三つのテキストを分析しよう。最初は1669年に執筆されたと考えられる「解析について」である。これは、ニュートンが生きていた当時から一部の研究者にはよく知られていた論文であり、代表作の一つといえる。彼の方法論の中核となる内容が含まれており、ニュートンの周りの研究者たちは筆写し、学んでいった。1676年秋にロンドンを訪れたライプニッツも王立協会に保存されていた稿を閲覧し、筆写した。

2番目に取り上げるのは、1680年頃の執筆と考えられる（時期については他の可能性もあり得る（後述））「曲線の幾何学」（*Geometria curvalinea*）である。第一の「解析について」とは、一見して記述のスタイルが異なる論考であり、しかも未完成のまま最終的に

²⁹実は、ニュートンの記号の持っている難点を同時代人の中で誰よりライプニッツが指摘していた。1690年10月13日（新）付のホイヘンス（1629-1695）宛書簡においてライプニッツは次のように述べている。

ニュートン氏が微分（*les differences*）を表わすために小文字を用いていることを私は知っていますが、これでは差の差に達し、さらに先へ進む時には（これは起こり得ることです）、また文字を変えなくてはならないでしょう。ですから、すべてに通じる一つの表現を用いる方がよいと思われるのです。

ライプニッツは、1687年に初版が刊行された『プリンキピア』を読んでおり、そこで o 記号が使用されているのを見ていたのである。[Leibniz A], III-4, S. 620, 邦訳[ライプニッツ 1997], 337頁。

放棄されてしまった。したがって、ニュートンの生前は公表されることがなかったものである。ニュートンは、1660年代の終わりから1670年代の初めまで数学的創造力が高揚した。だがその後、必ずしも関心の方向は数学に向くことはなかった。ただケンブリッジの数学教授としての責務を果たすことが数学との関わりだった時期が続いていた。そうした意味で数学的に低調だったが、内容的に決して見過ごすことができない。こうした論考を通して、ニュートンの意図を確認したい。

3番目は、初めてニュートンの数学論文として1704年に公刊された「曲線の求積論」(Tractatus de quadratura curvarum)を見る。1690年代から流率法の先取権に懸念を覚え始めていたニュートンは、若き日の論文の成果を整理して公表しようと試みていた。結果的に『光学』(Opticks)の付録の一篇として収録されることになる。刊行版以前の準備段階からの内容的な推移にも目を配りながら、ライプニッツに遅れること20年、初めて日の目を見たニュートン流率法の論文の内容を見ることにしたい。

3.2.1 「解析について」(1669年頃)

「解析について」執筆時期について

このニュートン流率法の三大論文の一つ「解析について」の執筆時期について正確なことは不明である。ただし状況からおおよその推定は可能である。1668年秋のメルカトル『対数技法』(Logarithmotechnia)の出版に関連して、バロウからコリンズへ書簡が送られている(1669年6月20日付)。その中でバロウは、「この地〔ケンブリッジ〕での私の友人」が、先頃論文をもたらしてくれたと述べている。この論文こそが、「解析について」ではなかったかと推測させる。それは「双曲線に関するメルカトル氏の方法と同じように、量を測るための計算を行う諸方法を書きとめていたが、非常に一般的なもの」であった。バロウはその論文をコリンズに送ることを約束し、実際7月31日付の書簡で、それを送付した旨記している。さらに同年8月20日付の書簡で、その論文の著者がアイザック・ニュートンという名であると語っている³⁰。

その一方で、コリンズがジェームズ・グレゴリー宛の書簡(1670/1年1月21日付)において、ニュートン自身がコリンズに語った言葉を紹介している。それによれば、ニュートンはメルカトルの著作の出版の2年前、すなわち1666年中には、円弧の長さが与えられたときに正弦を求める、あるいは円積線(図10参照)による領域の面積を求めることについて無限級数を用いたより一般的な方法を見いだすことに取り組んでおり、バロウにもその情報を伝えたということである³¹。したがってこの論考は、1669年の前半までに執筆されたこと確実であるが、コリンズの情報執筆の端緒をどのくらいまでさかのぼることができるか示唆を与えてくれる。

³⁰[Newton C], I, pp. 13ff.

³¹Ibid., p. 60.

ニュートンの論文を手にしたコリンズは、その内容を見るや否やニュートンの非凡な能力を認めた。すぐに写しをとって他の何人かの数学者に回覧した。コリンズは、刊行が予定されていたバロウの『光学講義』の付録として収め、出版することを考えたようである³²。だがニュートンはそれを許可せず、出版は果たされなかった。結果として、40年以上未公刊のまま「知る人ぞ知る」論文となっていたが、1711年ウィリアム・ジョーンズによって出版されることになった。だがその時、すでにライプニッツ派との先取権論争が火花を散らしていた。

ニュートンの無限級数の技法について

「解析について」では、ニュートンの流率法の中核をなす無限級数の手法が積極的に利用されている。メルカトルは『対数技法』で分数量を割り算にすることによって無限級数化する方法を用いた。例えば、

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

のようである。そして各項を項別積分することで、双曲線下の面積を求めていた³³。ニュートンはそうした素朴な場合よりも一般性を備えた方法を論じる。無限級数化するための手法もメルカトルの方法のみならず、一般2項定理を応用する場合、さらにいわゆる「ニュートン法」と称される方程式の近似解法による場合が論じられている。いずれの場合も、いったん無限級数に表示されるならば、項別に微分・積分計算が可能になる。それによって接線問題や求積の問題の解決へ結びつけていくことができるのである。

ニュートンの数学研究における主要論文である1666年10月論文と比べても、この「解析について」は記述が整理され、意図や方法論が明確である。その1666年10月論文では、8番目の命題に「速度 p , q の二つの物体 A , B が線 x , y を描き、線の一方 x と運動 q , p の比 $\frac{q}{p}$ との間の関係を表している方程式が与えられたとして、もう一方の線 y を見いだすこと」とある³⁴。これはわれわれの記法・用語では、 $\frac{dy}{dx} (= \frac{q}{p}) = f(x)$ が与えられたときに積分して y を求めることを解釈できる。ニュートンはその命題の例解を示しているが、 $f(x)$ を無限級数化する手法は、以下のようにあくまで割り算とべき根を開くことのみである³⁵。

³²[Westfall 1980], pp. 205f, 邦訳[ウエストフォール 1993], I, 221f頁。

³³[Mercator 1668], pp. 28-32.

³⁴[Newton MP], I, p. 403.

³⁵*Ibid.*, p. 413.

$$\frac{q}{p} = \frac{a}{b+cx} = \frac{a}{b} - \frac{acx}{b^2} + \frac{ac^2x^2}{b^3} - \frac{ac^3x^3}{b^4} + \dots$$

(このとき項別積分が行われて) $y = \frac{ax}{b} - \frac{acx^2}{2b^2} + \frac{ac^2x^3}{3b^3} - \frac{ac^3x^4}{4b^4} + \dots,$

$$\frac{q}{p} = \sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \dots$$

(同様に項別積分が行われて) $y = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \dots.$

ニュートンはこの1666年10月論文では、これらの2種類の手法以外に「ヴィエタの解析的ベキ分解」の方法もあると記すにとどまっている³⁶。

ヴィエタについては、1669年以前の手稿やメモの中にも参照した事項を書き留めている。例えば、1664年後半に記されたと推定される手稿では、フランソワ・ヴィエトの論文「イクセゲーティケーにしたがったベキの数値解法について」(“De numerosa potestatum ad exegesin resolutione”) (1600年刊) についてノートを残している³⁷。ニュートンが参照したヴィエトの方法を現代風に記すと次のようになる。いま

$$N = x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \dots + a_{n-1}x = f(x) = f(A+E)$$

とする。ただし A は方程式 $f(x)=0$ の近似解であり、真の解を $x=A+E$ とおく。このとき $g(A) = f(A+1) - f(A) - 1$ とするならば、 $E \times g(A) \approx N - f(A) = f(A+E) - f(A)$ と考えることによって、

$$E \approx \frac{N-f(A)}{g(A)} \quad (5)$$

となる。この式(5)を用いて順次補正項 E_i を作り、 $A_i = A + \sum_i E_i$ と逐次近似していく。

さらに1665年前半に「雑記帳」(Waste Book) の中にはオートリッドの名が言及され、方程式 $x^3 + 10x^2 - 7x = 44$ の近似解 $x = 2.20684$ を求める作業が記されている³⁸。オートリッドはヴィエトの方法を改良したことで知られる。彼の著作『数学の鍵』(*Clavis mathematicae*) は1631年に刊行され、その後改訂が重ねられた。ニュートンが参照したのは、1652年に出版されたラテン語訳第3版であるとホワイトサイドは推定している³⁹。ただしニュー

³⁶ *Ibid.*

³⁷ *Ibid.*, pp. 63–71. ヴィエトの論文は、最初に刊行された後、1646年にスホーテンの編纂による『数学著作集』にタイトルが修正された上で再録された。[Viète 1946], pp. 163–228. なお「イクセゲーティケー」とは、別名「レーティケー」(*ῥητικῆ*) ともいう。ヴィエト独特の用語であり、方程式を満たす量(解)を求めることを意味している。 *Ibid.*, p. 10.

³⁸ [Newton MP], I, pp. 489ff.

³⁹ *Ibid.*, p. 63.

トンの研究は、単に方程式の近似解を求めるに止まらず、その適用においてより広い射程を持っていた。すなわち、与えられた量の無限級数化するための方法として捉えられていたことは確かである。加えて1665年中にウォリスの影響下で一般の2項定理も定式化していた。これらが「解析について」で駆使される無限級数化の技法として機能することになる。

「解析について」の内容について

この1669年論文の内容について概観しておこう。ここでは大きく分けて、次の五つの事柄が記されている。

- 1) 求積のための三つの規則：
 - (a) ベキ乗の積分の基本公式 $\left(ax^{m/n} \rightarrow \int ydx = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}\right)$,
 - (b) 項別積分,
 - (c) 無限級数への展開 (分数式の割り算, 一般2項定理),
- 2) 1)の第3規則(c)に関連して通常「ニュートン法」と称される方法,
- 3) 2)の手法に基づく無限級数への展開,
- 4) 1)から3)の事柄の適用例,
- 5) 1)の第1規則(a)の証明.

まず規則(a)は、(われわれの用語, 記号を用いて) 積分の基本公式,

$$\int_0^x ax^{m/n} dx = \frac{na}{m+n} x^{(m+n)/n} \quad (m, n: \text{整数}, a: \text{定数}) \quad (6)$$

である。無論、ニュートンはライプニッツ派の記号や用語を用いることなく、あくまでも与えられた曲線の下側にできる領域の面積を求めるための公式として掲げる。その上で、式(6)において、 $\frac{m}{n}$ の値が正の整数、負の整数、正の有理数、負の有理数、 -1 になる場合が例としてあげられている。ここで特にニュートンは、 m, n を整数と限定している(ただし $n \neq 0$ は仮定していない)。結果的に有理数全体のベキ乗を考えていることになる⁴⁰。

規則(b)で項別積分を行うにあたって、例示は有限項の場合にのみ限定している。だがニュートンは暗黙の前提として、無限項の場合にも適用可能であることを想定している。なぜなら曲線の式を無限級数に展開した上で求積をすることが、主たる目的であり、そのための計算法だからである。特に有限項の場合と無限項の場合に対して、本質的な差異があると認識されていない。いずれにせよ、曲線の方程式が多項式の形で与えられると、各々の項に規則(a)を適用すればよいことになる。その意味で、規則(a)を有理数のベキに対して一般的に表現したことが重要である。17世紀の数学は、無限級数の収束の問題を一般

⁴⁰ *Ibid.*, II, pp. 206-209.

的に論じることはない。あくまで特定の種類の曲線に対して、利用可能な求積法を作ることに関心があるのである。ニュートンとて例外ではない。したがってこの論文の後半の適用例において、規則(b)はくり返し利用される⁴¹。

そして規則(a), (b)を適用して行われる積分計算の前に3番目の規則として、次の三つの場合について与えられた曲線の式を無限級数に展開する手法が、一般化された形でなく実例を通じて示される。

- 1) 割り算を行う例,
- 2) 根の開方を行う例,
- 3) 複合方程式の解法例.

3番目の場合に、ここでいわゆる「ニュートン法」と呼ばれる方程式の解の近似解法が紹介される。そして近似解法を通じて、無限級数表示へと進んでいく。すなわち曲線の方程式が $f(x, y)=0$ と与えられたときに、これを無限級数 $y=\sum_n c_n x^n$ (ただし c_n は定数)に変形するための方法である。以上の三つの例を通じてニュートンは、デカルトが「幾何学」の中で扱った「幾何学的」曲線(=代数曲線)のみならず、「機械学的」曲線(=超越曲線)の求積問題の処理を行おうとしている。1), 2)についてはすでにふれたので、3)について見よう。

ニュートンは欄外に「複合方程式の数値解法」(Numeris aequationum affectarum resolutio)と記された箇所で、方程式の逐次近似解を得る方法を説明する⁴²。ここで「複合方程式」とは単純方程式でないものをいう。単純方程式とは、代数方程式において、最高次の項と定数のみの項からなる方程式を指す(すなわち、 $x^n-a=0$ の型の方程式)。まず最初は、方程式の中に未知量が一つしか含まれない場合に限定している。 $y^3-2y-5=0$ を例として用いて、 $y=2.09455147$ を導いている。その方法を一般化して方程式の左辺を $f(y)$ とするならば、次のようにまとめられるだろう。

- 1) 何らかの方法によって $f(y)=0$ の根の近似値 y_0 を得るとする。
- 2) $y=y_0+p$ とおき、 $f(y)=0$ に代入する。そしてその左辺を p の多項式として展開する。
- 3) 2)で高次の項を取り除いて、定数項と p の1次の項のみを残す。
- 4) 3)で得た1次方程式から p の値 y_1 を求め、あらためて $p=y_1+q$ とおく。
- 5) 2)で得た方程式に $p=y_1+q$ を代入し、高次の項を取り除いて、 q の1次の項と定数項のみを残す。
- 6) 5)で得た1次方程式から q の値 y_2 を求めて、あらためて $q=y_2+r$ とおく。
- 7) (一般には同様なことがくり返される)
- 8) 実際には r が求まった段階で、 $y=y_0+y_1+y_2+r=y_0+p+q+r$ とする。

⁴¹ *Ibid.*, pp. 208-211.

⁴² *Ibid.*, pp. 218-221.

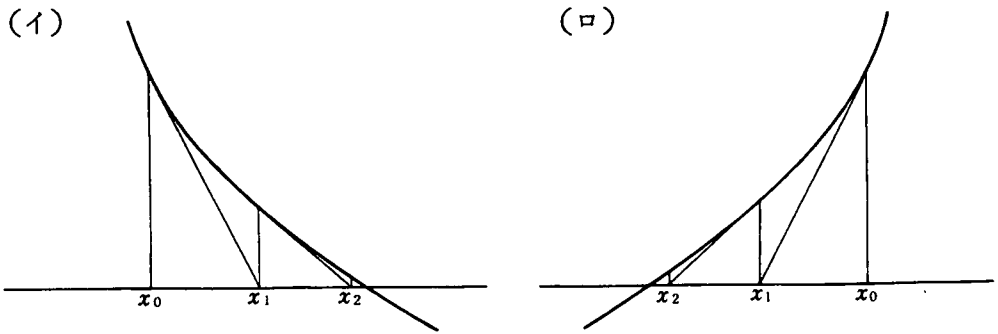


図7 接線による方程式の解の近似

以上の方法は、与えられた方程式の解を y_k における接線と横軸との交点によって近似する方法に他ならない。すなわち、 $n=0, 1, 2, \dots$ に対して、 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$ から $y=0$ となる x_{n+1} を求める。すなわち、

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となることで得られる x_n を反復して求めることである (図7参照)⁴³。

ただしニュートンの意図は、もともと「文字が混ざった方程式」の解法においても数係数の方程式同様に、 $f(x, y)=0$ から無限級数 $y=\sum_n c_n x^n$ へ変形することにある。ここでは例として、 $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ が提示される⁴⁴。やはり左辺を $f(x, y)$ とするとき、まず $x=0$ として y の値を求め ($y=a$ となる)、 $y=y_0 (=a)+p$ として $f(x, y)=0$ に代入する。数係数方程式の例と同様に x と p それぞれ1次の項のみを残し、以下先の流れに沿っていく。結果として、

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \dots$$

となる。なお、最初に $x=0$ とする理由は、この論文「解析について」では記されていない⁴⁵。

加えてニュートンは、 x の値が大きくなる場合にも言及する。今度は例として、

$$y^3 + axy + xxy - a^3 - 2x^3 = 0 \quad (7)$$

をとる。すると、

⁴³図7は、[杉浦 1980]、105頁による。

⁴⁴[Newton MP], II, pp. 222-227.

⁴⁵1670 から 1671 年にかけて執筆されたニュートンの最大の数学論文「方法について」で詳細が明らかにされる (*Ibid.*, III, pp. 50ff.). だがここでは深入りしない。[林 2009b], 52ff, 60f頁参照。

- 1) 左辺 $f(x, y)$ において, x, y 双方について最高次数の項のみを取り ($y^3 + xxy - 2x^3$), 残りを 0 とする.
- 2) 1) で得られた式 = 0 の根 ($y = g(x) = x$) に対して, $y = g(x) + p$ とおく.
- 3) 以下, 上と同じ流れに沿っていく

ここで挙げられた方程式(7)の場合,

$$y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \dots$$

である.

ニュートンはこの論文の後半で「規則」の適用例を提供している. それは内容的に, 次の四つに分けることができる.

- 1) 円周上の長さを求める,
- 2) 双曲線に囲まれた領域が与えられたときに, 横幅 x を求める,
- 3) 正弦, 余弦の無限級数展開を与える,
- 4) 機械学的曲線 (サイクロイド, 円積線) の長さ, あるいはその曲線に囲まれた領域を求める.

とくに 4) は重要である. われわれの記号法を援用しつつニュートンの議論を確認しよう⁴⁶.

図 8 において, $AB = x$, $BD = y$, AH (=サイクロイドを生成する円の直径) = 1 とする. サイクロイドの性質を利用すると, 次が成り立つ.

$$y = BK + KD = BK + \text{弧 } AK \quad (8)$$

ただし $BK = \sqrt{CK^2 - BC^2} = \sqrt{x - x^2}$ である. ここに無限級数への展開法が適用されて, $BK = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \dots$ を得る. 一方で, 1) について, すでに同じ直

径 1 の円の弧の長さ AD を求めている⁴⁷. すなわち, 図 9 において, $AB = x$, $BD = y$, $AE = 1$ とする. いま微小な変化量 ($BK = GH$) を考え, 直角三角形の相似から



図 8 「解析について」より
サイクロイド曲線の求積



図 9 「解析について」より円周の求長

⁴⁶[Newton MP], II, pp. 238f.

⁴⁷*Ibid.*, pp. 232f.

$$GH : DH = BT : DT = BD(\sqrt{x-x^2}) : DC\left(\frac{1}{2}\right) = 1 : \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \quad (9)$$

式(9)で弧 AD を形成する量 DH を「モーメント」(momentum) と称して、弧 AD のモーメント $DH = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{\sqrt{x-x^2}}{2(x-x^2)}$ としている。これを再び無限級数で表示して、

$$\text{弧 } AD \text{ のモーメント} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{1/2} + \frac{3}{16}x^{3/2} + \frac{5}{32}x^{5/2} + \frac{35}{256}x^{7/2} + \dots$$

ここで規則(a) (=ベキ乗関数の積分公式)、規則(b) (=項別積分)によって、

$$\text{弧 } AD = x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{3}{40}x^{5/2} + \frac{5}{112}x^{7/2} + \dots \quad (10)$$

を得る。以上の式(10)を、再び図8で弧 AK に適用し、式(8)に代入して、弧 $AK = KD$ より、

$$y = 2x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{20}x^{5/2} - \frac{1}{56}x^{7/2} - \dots \quad (11)$$

となる。この式(11)の各項を項別積分することでサイクロイドの下側にある領域 $ABD = \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{15}x^{5/2} - \frac{1}{70}x^{7/2} - \frac{1}{252}x^{9/2} - \dots$ と導いている。加えてさらにニュートンは、より簡潔に求める方法も提示する。図8でサイクロイド上の点 D における接線と AK が平行であることを利用して、

$$AB \text{ のモーメント} : BD \text{ のモーメント} = AB : BK = x : \sqrt{x-x^2} = 1 : \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}$$

から⁴⁸、再び $\sqrt{x-x^2}$ を無限級数に展開し、

$$\frac{\sqrt{x-x^2}}{x} = x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{8}x^{3/2} - \frac{1}{16}x^{5/2} - \dots$$

となるので、

$$\begin{aligned} BD &= \int_0^x \frac{\sqrt{x-x^2}}{x} dx = \int_0^x \left(x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{8}x^{3/2} - \frac{1}{16}x^{5/2} - \dots \right) dx \\ &= 2x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{20}x^{5/2} - \frac{1}{56}x^{7/2} - \dots \end{aligned}$$

⁴⁸ D における接線の傾き = AK の傾き = $\frac{BK}{AB}$ であることに注意。

も得ている。ニュートンの言う「モーメント」の比 (AB のモーメント : BD のモーメント) とは、図 8 におけるサイクロイドの接線 DT の傾き $\left(= \frac{dy}{dx} \right)$, すなわち接点 D を頂点とする微小な三角形の直角をはさむ辺の比を表している。これは実質的にパスカルの特性三角形やライプニッツの微分三角形の発想と同等の言明と了解できる。同じことは図 9 において、微小三角形の辺 (DH, GH) の比についても考えて、有限な相似三角形 DTB (または CDB) の斜辺と底辺の比に等しいとすることに通じている。

今度は、円積線の例も見よう⁴⁹。まず、図 10 において、円の半径 AV (あるいはその延長) が等角速度で 90 度回転して ab 上に達する間に、線分 AV が等速度で ABE に沿って平行移動すると仮定する。このとき回転する AV と平行移動する AV との交点によって作られる曲線を円積線と呼ぶ。例えば、 AV が AK まで回転し、しかも AV が平行移動したときに、 AK の延長上の点 D が交点になる。したがって弧 $VK=DC=BA$ である。いま、図 10 で $AV=1, AB=x, BD=y$ のとき、円積線に対応する内部の円が AE と b で交わるとする。このとき円積線の定義から、

$$AB(x) : AE = \text{弧 } VK : \text{四分円 } VKb = \angle VAK : \frac{1}{2}\pi.$$

また $AB=CD=\text{弧 } VK=AV \times \angle KAG=x$ 。したがって $GK=\sin x, AG=\cos x$ となる。すでにニュートンは正弦、余弦の無限級数展開を得ているので、 GK, AK の式が得られる。したがって $BD=y$ とすると、 $KG:AG=AB:BD$ から、

$$y = \left(\frac{x \times AG}{KG} \right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 [+ \dots]}{1 - \frac{1}{6}xx + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 [+ \dots]}. \quad (12)$$

式(12)で分子を分母で割って、

$$y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots$$

となる。そして (規則 (b) によって) 領域

図10 「解析について」より
円積線の求積

⁴⁹[Newton MP], II, pp. 238-241.

$$AVDB = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7 - \dots$$

となる。

ニュートンは円積線の例を取り上げた後、論文の結論を述べている。その中で強調されているのは、彼自身の方法が機械学的な曲線に対して適用可能になっている点である。これは17世紀の数学者たちにとって何が肝要であるかを示している。デカルトが「幾何学」第2巻冒頭において、幾何学的とは「的確で精密なもの」、機械学的はそうではないものと規定している。その上で螺線、円積線等を機械学的な曲線に属するとして「ここで受け入れるものと考えている線の範囲に入らない」とした⁵⁰。すなわちデカルト独自の記号法に基づく、曲線の解析（＝曲線の方程式を立てること、方程式の標準形への変形、方程式の根と作図との関係等を考えること）の対象から外された曲線に対して、どのように解析の方法を拡張するかが17世紀後半の数学研究者たちのテーマであった。ニュートンはデカルトの代数曲線（＝有限項からなる代数方程式で表される曲線）の解析を、無限項からなる方程式の解析によって乗り越えたと自負している。実際、次のように印象深いコメントが述べられている⁵¹。

機械学的な曲線に対して（もしそれが他のやり方によってできないとしても）、接線はその助け〔無限級数化する方法〕によって引くことができる。また（可能なときには）有限の項数からなる方程式による一般的な解析が作り上げるものは何であれ、無限〔項の〕方程式を通じてこの方法がいつでも実行される。したがって私は、それに対しても解析という名を与えることに何のためらいもない。

実際、後者〔無限項の方程式による解析〕における推論は前者とくらべて不確実ということはないし、その方程式が正確でないということもない。たとえ有限の理性の持ち主であるわれわれ人間が、その方程式のあらゆる項を指し示すことができなくとも、またそこからわれわれが決定すべき量を正確に認識できるよう〔全体を〕把握できないとしてもである。ちょうど有限方程式の無理根を数として〔正確に〕示すことができないし、またどんな解析的方法によってもあるものの量が残りの項から判明かつ正確に知られるように示すことなどできないのと同じである。確かに、幾何学的に示すことはできても、ここでそれはできない。無論、最近になって幾何学に様々な曲線が導入される前は、2または3よりも次数が大きい方程式に対して、どんな作図も得られなかった。したがって曲線の面積や長さや、（なされたとして）その他のことが正確に幾何学的に決定されるという恩恵にあずかれるよう解析に正しく関わることを考えられる。

⁵⁰[Descartes 1996], VI, pp. 388ff. 邦訳[デカルト 2001], 16f 頁。

⁵¹[Newton MP], II, pp. 240-243.

この論文において、まさしく最も強く主張したかった部分であろう。

独力でニュートンの域に迫っていたライプニッツは、ニュートンのこの1669年論文を1676年10月にロンドンを訪れたとき（10月18日から1週間程度滞在）、コリンズを通じて入手し、筆写した。ライプニッツは、この1676年秋のロンドン滞在以前に王立協会のオルデンバーグやコリンズと書簡を通じてニュートンやジェームズ・グレゴリー等の研究に関して情報を得ていた。特に1676年7月26日付でオルデンバーグからライプニッツに宛てた書簡は、複数の内容を備えていた。その中にニュートンがオルデンバーグにあてた書簡（通常「前の書簡」(epistola prior)と称される）、コリンズがイギリスにおける研究の進展をまとめたもの（“Historia”，あるいは“Collectio”と名付けられている）などを含んでいた。前者は、間接的ではあるが、ニュートンとライプニッツ初めて交信する機会になったものである。また後者は、主にコリンズがグレゴリーとやり取りした書簡を抜粋し、研究の状況が把握できるような内容になっている⁵²。こうした経緯から、ロンドンの王立協会を訪れたライプニッツは「解析について」を筆写したいと考えたのだろう。

後に先取権論争がニュートン派、ライプニッツ派の間で勃発したときに、この1669年論文をライプニッツが参照していたことが問題となる。われわれは積分記号などあえてライプニッツの記号を用いてきた。その記号 \int が公刊論文上ではじめて現れたのは1686年のことであり、そこでもサイクロイドを表す方程式が同様に論じられていた⁵³。ライプニッツはその論文「深奥な幾何学ならびに不可分者と無限の解析について」(“De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum”)の中で、サイクロイドの方程式（「超越的な線」と呼んでいる）の表示のために積分記号を導入したのだった。ライプニッツは図8と同様な図と x, y の設定を考え（生成円の半径を1として）、

$$y = \sqrt{2x-xx} + \int dx : \sqrt{2x-xx} \left(= \sqrt{2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \right)$$

と与えた。特に第2項の円弧の長さに相当する部分が「超越的」なのである。

ライプニッツはこの論文において、同時代の先行研究者たちに言及している。ニュートンの名もあげて次のように述べている。

同じ発見に独力で到達したのみならず、一つの普遍的な方法によって完成したのが誠に深い才能を持つ幾何学者、アイザック・ニュートンである。もし彼が今なお隠していると私が理解する知見の数々を知らしめるならば、疑いなく私たちに学問の大きな進歩と節約への新たな接近を示してくれるであろう⁵⁴。

⁵²[Leibniz A], III-1, S. 429-558.

⁵³[Leibniz GM], V, S. 226-233. 邦訳[ライプニッツ 1997], 319-330頁.

⁵⁴Ibid., S. 232. 邦訳, 328頁.

ライプニッツの1686年論文が発表された時点で、ニュートンの論文は公にされておらず、また先取権論争も起きていなかった。ニュートンの論文は、彼の近辺で直接閲覧することができたもの以外に内容は知られぬままである。ライプニッツのこの論文における発言はそうした背景をもとに、論争的な態度ではなく、純粹にニュートンへの敬意を表明しており、その後の両者の争いを思うと、複雑な印象を抱かざるを得ない。

なお「解析について」は、末尾に「第1規則を証明するための準備」という内容が補足されている⁵⁵。そこでは、図11においてある曲線 $AD\delta$ の底辺 $AB=x$ とし、垂直に立てられた $BD=y$ 、さらに領域 $ABD=z$ とする。同様に $B\beta=o$ 、 $BK=v$ 、そして長方形 $B\beta HK$ (ov) は領域 $B\beta\delta D$ に等しいとする。このとき $A\beta = x+o$ かつ $A\delta\beta = z+ov$ である。これらを前提にすると、 x と z の間で任意に定められた関係から、以下に見るような方法で y を求めている。

いま仮に $\frac{2}{3}x^{3/2} = z$ 、または $\frac{4}{9}x^3 = z^2$ ととることとする。

x に $x+o$ ($A\beta$)、 z に $z+ov$ ($A\delta\beta$) を代入すると、(曲線の性質から)



図11 「解析について」第1規則

$$\frac{4}{9} \times (x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + ov^2$$

が得られる。等しいもの $\left(\frac{4}{9}x^3 + z^2\right)$ を取り去って、残ったものを o で割り算すると、

$$\frac{4}{9} \times (3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2$$

が残る。いま $B\beta$ は「無限に小さい」(infinite parva)、すなわち o は 0 であると仮定するならば、 v と y は等しくなり、また o がかけられた項は消滅する。その結果 $\frac{4}{9} \times 3x^2 = 2zv$ 、すなわち $\frac{2}{3}x^2 = (zy) = \frac{2}{3}x^{3/2}y$ 、つまり $x^{1/2} \left(= \frac{x^2}{x^{3/2}} \right) = y$ となる。

この議論の中で微小な量を表す o に対して、ニュートンは単に「 0 であると仮定する」と述べている。1711年の公刊版編者ジョーンズは「無限において減少した上で、消失すること (in infinitum deminui et evanescere)」という言葉に該当箇所に註釈として挿入した⁵⁶。実はこの言葉は、ニュートンが『プリンキピア』第1巻第1章補助定理11の註で公にしたニュートン自身の極限概念を反映している⁵⁷。ニュートンはこの「解析について」

⁵⁵[Newton MP], II, pp. 242-245.

⁵⁶*Ibid.*, p. 243, n. (136).

⁵⁷[Newton Principia], I, pp. 86ff. 邦訳[ニュートン 1972], 94-97頁.

では o に対して無限小と了解できる考えを示したが、次第に無限小という概念を避けるようになり、1680年代の論考（例えば以下の3.2.2項で見る「曲線の幾何学」（1680年頃執筆））になると、「消失する量の究極の比」という発想を明確にするようになる。特にこの草稿が公刊される1711年頃は、ライプニッツ派との先取権論争が盛んであった。ライプニッツ流の無限小（ dx という記号で表示される）を用いた解析との違いを明確にする意図もあって（その後のニュートンの進展をふまえた上で）、ジョーンズが補足する形をとっていることがわかる。

3.2.2 「曲線の幾何学」（1680年頃）

「曲線の幾何学」執筆時期について

『ニュートン数学著作集』の编者ホワイトサイドは、この草稿の執筆時期を“handwriting style”を見て判断した結果、1680年頃の執筆と推定している⁵⁸。ただしホワイトサイドの判断については、この手稿の内容をもとに異論を唱えることもできる。例えば、「方法について」論文の補遺が執筆された1671年から翌年にかけての時期に近づけることも可能だろうし、反対に『プリンキピア』につながる研究を開始した1684年頃に遅らせることもできるだろう。いずれもこの草稿「曲線の幾何学」と記述スタイルの点で共通性を持ち、内容的に重なる部分がある。したがって執筆時期については一定の幅を考えに入れるのが自然である。ここでは「1680年頃の執筆」というホワイトサイドの推察を一応尊重する。それを前提にして、執筆の背景を述べたい。

「曲線の幾何学」執筆の背景について

ニュートンにとって、1680年頃は1670年代初めまでのように数学研究は最重要課題ではなく、数学よりも神学、錬金術関連の研究に打ち込んでいた。ただ、ケンブリッジ大学ルーカス教授職に課されたノルマを果たすために代数の講義を行っていたようである。そうした中で、あることを契機にニュートンは再び数学研究に気持ちを向けた。まず、1679年にフェルマーの『遺作集』やフィリップ・ラ・イールの著作『新円錐曲線原論』が刊行されたことである。これらの著作を通じてニュートンは、アポロニオスに始まる軌跡問題に関心をよみがえらせた。さらに、その問題関心に関連して、デカルトの「幾何学」を再読したことである。若き日にスホーテンのラテン語訳でデカルトの方法論を学び、多大な影響を受けていたニュートンだが、1680年頃にはデカルトの手法に対して、幾何学として違和感があることを書き残しているようである⁵⁹。

ニュートンはこの手稿で伝統的な「総合的方法」にこだわっている。その総合的方法とは、ユークリッド『原論』に代表される演繹的方法、すなわちすでに証明済みで既知となっ

⁵⁸MP, IV, p. 409.

⁵⁹[Westfall 1980], p. 379f, 邦訳[ウェストフォール 1993], I, 415f頁.

ている命題や仮定（公理，公準）から出発し，論証の末に目標とする命題の証明に達する議論展開をいう．それとは対照的に，目標としている命題が仮に成立したとするととき，必要な論証の手順や作図を補い，既知の命題や過程に辿り返す展開を「解析的方法」という．さらに17世紀以降はデカルト等により，図形の問題に対しても，「問題が解かれたとして」適切に未知量を定め方程式を立てる．さらにその方程式を解いて未知量を求めることで解決する方法が普及しつつあった．ニュートンの同時代人たちは，それを解析的（あるいは算術的）と称していた⁶⁰．ニュートンの批判の要点は，幾何学の問題を代数的方程式に還元する解析的手法では数学的議論として不十分ということにある．または数学的な成果を記すための伝統的な手段である総合的（演繹的）方法を取っていないことに対する不満である．証明の「厳密性」を保証するための構造が備わっていない．すなわち，説得力の面から見て問題があるという判断があった．また，デカルトの取り組んだ円錐曲線や他の曲線に対する問題，例えば接線問題や法線問題に対して十分な解決が成し遂げられておらず，そうした古典的著作の中に彼を刺激する要素が含まれていた．

したがってこの草稿の意図は，ニュートンが1670年代初めまでに（流率論にかかわる3主要論文などによって）すでに築いていた成果の基礎的部分を再構成しようとするものである．加えてデカルト「幾何学」第2巻で扱われた問題に対する解決をニュートン流の発想で図ろうとする．さらにはもっと先まで進んで行こうとしたのだろう．だがそれは成功裏に終わらず，途中で放棄されてしまった．

ニュートンの目には，流率論を演繹的に再構成することは，ある程度成功すると見通すことができたはずである．デカルトや他の先行研究に照らして，より明確化することができた部分もある．しかしこの草稿は，後半になると断片のみしか記されていない．全体として，ニュートンが企てた古典的な手法によって流率論を組み立て，成果を示すことは頓挫したまま終わったというしかない．外的な理由が草稿執筆を妨げたとも考えられる⁶¹．全体の内容を分析した上で，またこの草稿のニュートン流率論の中での位置づけ，並びに最終的に放棄されてしまった理由を推察することにしよう．

「曲線の幾何学」の内容について

この草稿は第1巻，第2巻に分かれる．第1巻は定義，公理・公準，30個の命題から構成され，体系的に結果を提示する意図が明瞭である．第2巻は，第1巻で証明された命題の応用編として問題が10個掲げられている．だが，後半は断片のみである．加えて，

⁶⁰ユークリッド，パッポス等の古代に属する数学における解析については，本講義第2回で詳説した（[林 2008] 参照）．さらには17世紀の記号代数の発達のもとでの解析の内容の変遷については，[マホーニ 2007]，第2章，第4章参照．

⁶¹ホワイトサイドは，1680年に出現した彗星に対する関心がニュートンを数学から遠ざけ，この草稿執筆を中断してしまっただけではないかと推測している（[Newton MP]，IV，p. 413，n. (18)）．ただこの手稿の執筆年代については，本文でも指摘したように一定の幅を持って考える必要がある．したがって，外的な理由に強くこだわらない方が無難であろう．

ホワイトサイドは第1巻に対する修正の試みも収録しているが、こちらも多くは断片にとどまっている⁶²。

「曲線の幾何学」第1巻の内容を確認しよう。全体に先立ち、序論が述べられる。ニュートンはその中で、特に以下の四つの事柄に注意している⁶³。

- 1) 記号的算術と幾何学を結びつけること、
- 2) 解析で解く習慣になっている問題の多くは、総合的方法によって解くことができること、
- 3) ユークリッド『原論』の方法だけでは曲線の考察には不十分であること、
- 4) 曲線図形を考える際、無限小の導入は不要であること。

1), 2) は、同時代に普及していた記号代数の利用と関連する。デカルトが示した方法論が、古代から取り組まれていた幾何学の問題（接線、法線の作図、等々）に必ずしも十分には応じていないとする判断がニュートンにはあった。だからこそ、旧来の総合的、演繹的な理論構成を保ちつつ、しかも自己の流率論の成果を組み入れ、どこまで望むような曲線図形の幾何学が構築できるか。ニュートンが試してみたいと考えたのも不思議ではない。ただし、3) にあるようにそのモデルとなるユークリッド『原論』に盛られた内容だけでは処理できない。まさにニュートンの流率論を披露するにふさわしい場がここに用意されているのである。

同時に4)で指摘されていることは、ニュートンの数学上の基礎にかかわる。ここでニュートンが直接批判の対象にするのは、カヴァリエリ（1598-1647）の方法論やバロウ『幾何学講義』（1670年刊）の手法だろう。カヴァリエリは、彼の著作『不可分者による連続体の幾何学』（1635年刊）で「不可分者」（*indivisibles*）の方法を提示した。カヴァリエリは、ある図形が次元の異なる別の図形によって生成されることを考える。例えば、曲線図形が直線による無数の切り口（不可分者）の総体によって作られるとするのである。そして直線どうしで成立する比例関係が総体の曲線図形に対しても成り立つと考え、いわゆる「カヴァリエリの原理」に達した⁶⁴。カヴァリエリの考える不可分者は、図形を構成する最小要素、あるいは無限小量ともとれる。ニュートンはそうした数学的概念の導入を嫌った。またバロウは、図形の中に直接微小な量を固定してとり、有限量との比例関係を考える。これについてもニュートンは違和感を覚えていた。

では、ニュートンはどのようなオルタナティヴを提示するのだろうか。「曲線図形〔の何らかの量〕を測ろうとした者は、それらがあたかも多くの無限に小さな部分から成ると考える習慣がある」と指摘し、次のように述べている⁶⁵。

⁶² *Ibid.*, pp. 484-505.

⁶³ *Ibid.*, pp. 420-425.

⁶⁴ カヴァリエリに関しては、[Andersen 1985], pp. 291-367 参照。

⁶⁵ [Newton MP], IV, pp. 422f.

私は最初からその無限に小さな部分が、より速いか、同じ速さか、またはより遅いかに応じて、より大きいとか、等しいとか、より小さいと論じ、いわば成長によって〔量が〕生成されると考えるだろう。またその成長の速さを量の流率 (fluxio) と呼ぶ。そのように線が点の運動によって描かれるとき、その点の速度、すなわち線の生成の速さを流率とする。推論の明確さや簡潔性のためにせよ、求められる結論や図を簡単にするためにせよ、これこそ確かな法則にしたがいがい、連続的な流れ (fluxus) によって生成された量を測る真の始点であると考えたい。

カヴァリエリの方法が、曲線図形を「多くの無限に小さな部分から」成ると考えていたかどうか、後世の者の目で見ると疑問の余地がある。またニュートン自身も、1669年頃の「解析について」では、無限小を自身の議論の中に組み入れてもいた。こうしたギリシア以来の伝統的な数学の中になかった概念を想定することは、この手稿の主旨から照らしてもふさわしくなかったろう。議論の根本において流率に関わる考え方をまず提示したことは記憶に値する。

この草稿では、全体の構成に先立ち、次の11個の「定義」が置かれている。

- 1. 流量, 2. 流率, 3. 正の流率, 4. 負の流率 (註あり: 負の量に対するニュートン流の解釈), 5. 流れ (正の流量, 負の流量), 6. 持続的な量, 安定的な量, 与えられた量, 7. 直線の極, 8. 動点の位置, 9. 運動の境界, 範囲, 10. 量を高めること, 11. 量を下げること.

この定義の中では、4「負の流率」を定義した後で、註が付されている点に興味深い。ニュートンが負の量に対して、どのような見解を持っていたのかがわかるからである。17世紀後半の段階において代数的な記号法は洗練の度合いを高めていた。それは方程式論の発展と直接関連する。さらに並行して虚量、負の量に対する認識も議論されていた。ただ負の量をどのように捉えるか、必ずしも広く数学者間で了解が存在した訳ではない。デカルト「幾何学」では、方程式の正の根を「真根」、負の根を「偽根」と称していたほどである。ニュートンは負の量をどう把握すべきか例を挙げて示す。すなわち、「債務の増加」の割合が資産の「負流率」、「債務の減少」が資産の「正流率」としている。こうした説明を見ると、何らかの教育的配慮が求められる人々をニュートンは読者として想定したのかもしれない。一つの可能性として考えられるだろう。ただ序論部を読む限り、明確に断定するには至らない。

定義に続けて、以下の6個の公理が立てられる。

- 1) たえず等しい流量どうしは、等しい流率によって生成される,
- 2) 等しい流率によって同時に生成された流量はみな等しい,
- 3) たえず与えられた比になっている流量は、流率も同じ比になる,
- 4) 与えられた比を持った流率によって同時に生成された流量は、それらの流率の比になる,

- 5) 全体の流率は、諸々の部分を同時に取りあげるとき、それぞれの流率の総和に等しくなる、
- 6) 諸々の量の流率は、生まれてくる部分の最初の比 (prima ratio) になる。あるいは同じことだが、負流率によって反対に流れて消えていく部分の最後の比 (ultima ratio) になる、

ただしニュートンは、「同時に生成されるとは、あらゆる流量が同じ時間内で生成されることと私は理解する」と述べている⁶⁶。さらに次の2個の公準が要請される。

- 1) 任意の線を幾何学的手段によって動かすこと、
- 2) 点によって、あるいは動かされた線の交点によって描かれる線が与えられること。

この草稿では、以上の設定の下で議論が展開される。個々の命題の条件において、あるいは証明を行う際に、流量・定量が図形の中に割り当てられる。例えば、直角三角形が与えられる。その中の特定の辺や直角以外の角に変化する量に対応する。そして他に定量が対応するというようにである。その上で、個々の性質や結果は比例論の用語で語られる。特に公理6の「最初の比」、「最後の比」がニュートン流の極限操作として機能する。明示されていないが変化する量に関して、時間をパラメータにし、瞬間的な変化の量(瞬間速度)が存在することを認めることで極限値の存在論的な議論を回避したいと考えたのだろう。

第1巻に含まれる30個の命題を7グループに分け、それぞれの内容を列挙すると次のようになる。ただし命題の系は主要なものに限って掲げる。また記号についてもニュートンの提示する内容に即して、現代風に書きかえている。例えば、流量 A に対して、その流率を $f(A)$ と表す。

- 第1グループ(命題1から命題7)：連続した比例関係にある三つの量と定量が与えられた場合の流率の比に関する命題；
 - 命題1： $B:C=C:D$, C が一定 $\Rightarrow B:D = -f(B) : f(D)$,
 - 命題2： $A:B=B:C$, A が一定 $\Rightarrow A:2B = f(B) : f(C)$,
 - 命題3： $A:B=B:C$, 定量なし $\Rightarrow 2B \times f(B) = A \times f(C) + C \times f(A)$,
 - 命題4： $A:B=B:C$, $A+C$ が一定 $\Rightarrow 2B:(C-A) = f(A) : f(B)$,
 - 命題5： $A:B=B:C$, $C-A$ が一定 $\Rightarrow 2B:(A+C) = f(A) : f(B)$,
 - 命題6： $A:B=B:C$, $A+B$ が一定 $\Rightarrow A:(2B+C) = f(B) : f(C)$,
 - 命題7： $A:B=B:C$, $B-A$ が一定 $\Rightarrow A:(2B-C) = f(B) : f(C)$.

第1グループの中から、命題1の論証を見よう。ここでは、ニュートンの論理の展開が典型的に表れている⁶⁷。

⁶⁶ *Ibid.*, pp. 426f.

⁶⁷ *Ibid.*, pp. 428f. ただし(他の命題の場合も含めて)「論証の概要」では、議論の見通しを良くするためにニュートンのテキストに現れない数式変形、行間の再構成も適宜加わっている。

命題 1 の論証の概要：(図 12 において) 二つの流れる量 B, D を線分 AB, AD によって表し、一直線上に置く。それらに垂直に定量を表す AC を立てる。このとき AB, AD が微小な量だけ変化して、 AG, AE になったとする (AB は減少し、 AD は増加する)。このとき仮定した比例関係から、微小な変化の後も同じ関係が成立すると考え、 $AG:AC=AC:AE$ が成り立つ。よって三角形 BCD, GCE はともに角 C を直角に持つ直角三角形となる。すると共通の角 DCG を除いて、角 $BCG=$ 角 DCE 。 AC の延長上に H をとり、 GC と平行になるような BH を引く。このとき角 $DCE=$ 角 $BCG=$ 角 HBC 、さらに角 $CED=$ 角 $GCA=$ 角 BHC より三角形 BCH と三角形 CDE は相似となる。よって $DE:CH=CD:BC=AD:AC$ が成り立つ。また GC と BH が平行なので $CH:BG=AC:AG$ 。よって等順位の関係 (ex aequo) を用いて $DE:BG=AD:AG$ 。ここで $AB \rightarrow AG, AD \rightarrow AE$ の変化を逆に戻して AG が AB, AB が AD に流れるとすると、消えゆく部分 $DE:BG$ の最後の比 $= fl(AD) : -fl(AB) = AD:AB$ となる。

図12 「曲線の幾何学」第1巻命題1より

相似に基づく比例関係 (ユークリッド『原論』第6巻の諸命題による) や、「等順位の関係」(『原論』第5巻の命題による) を利用していることから、古典的な手法によって証明が行われているように見える⁶⁸。だがニュートンが序論において、「ユークリッド『原論』はこうした曲線の考察にまったく不十分であるので、やむなく私は他の方法を組み合わせる」と述べているように、本質的な個所は『原論』のカテゴリーにない数学的技法の駆使である。すなわち、

- 1) 変化量を線分で表示した上で、微小な変化量を想定し、線分の延長・縮小で表現、
- 2) その際に成り立つ比例関係を求める、
- 3) 微小な変化を逆に戻し、「最後の比」という形で流率を求める。

関数概念を明白な形で持たず、またそれを表現する記号法もニュートンは持たない。伝統的な数学の中で確立した手法や推論の説得力を借りながら、彼なりに連続量の変化に対して成立する関係を定式する手段を示そうとしているのである。第1命題からこの草稿に含まれる特色は十分に伺うことができる。

⁶⁸「等順位の関係」とは、ユークリッド『原論』第5巻定義17、あるいは命題22に登場する比の関係のことである。具体的には、

$$A:B=a:b, B:C=b:c \Rightarrow A:C=a:c$$

のように、比例関係の途中の項を消去して比をつなげることである。[ユークリッド2008], 165, 370, 400f頁参照。

- 第2グループ (命題8から命題10) : 任意の個の連続して比例関係にある量と定量が与えられた場合の流率の比に関する命題 ;
 - 命題8 : A, B, C, D, E, F, G が連続して比例, C が一定 $\Rightarrow -2A : -B : D : 2E : 3F : 4G = fl(A) : fl(B) : fl(D) : fl(E) : fl(F) : fl(G)$,
 - 命題8系 : $1 : A = A^2 : A^3 \Rightarrow 3A^3 : A = fl(A^3) : fl(A)$, $1 : A^{1/3} = A^{2/3} : A \Rightarrow \frac{2}{3}A^{2/3} : A = fl(A^{2/3}) : fl(A)$
 - 命題9 : $A : B = C : D$, A が一定, $B : E = E : C \Rightarrow A : E = E : D$, $A \times fl(D) = B \times fl(C) + C \times fl(B)$.
 - 命題9の系 : $fl(AB) = B \times fl(A) + A \times fl(B)$, $fl(ABC) = BC \times fl(A) + AC \times fl(B) + AB \times fl(C)$.
 - 命題10 : $A : B = C : D$, $B : E = E : C$, $A : E = E : D \Rightarrow A \times fl(D) + D \times fl(A) = 2E \times fl(E) = B \times fl(C) + C \times fl(B)$.
- 第3グループ (命題11から命題13) : 直角三角形 ABC (角 B が直角, 頂点 B から底辺 AC への垂線への足を D , AC の中点を E とする) の各辺に対する流率の比 ;
 - 命題11 : 斜辺 AC が一定 $\Rightarrow fl(BD) : fl(DC) : fl(BC) : -fl(AB) = 2ED : 2BD : AB : BC$,
 - 命題12 : 直角をはさむ一方の辺 AB が一定 $\Rightarrow fl(BC) : fl(AC) : -fl(AD) : fl(DC) : fl(BD) = AC^2 : BC \times AC : BC \times AD : BC \times (AC + AD) : AB \times AD$,
 - 命題13 : 一定量なし $\Rightarrow AB \times fl(AB) + BC \times fl(BC) = AC \times fl(AC)$.
- 第4グループ (命題14から命題17) : 与えられた円 (半径1とする) における流率の比 ;
 - 命題14 : $fl(\theta) : fl(\sin \theta) = 1 : \cos \theta$, $fl(\theta) : fl(\tan \theta) = \cos \theta : \frac{1}{\cos \theta}$, $fl(\theta) : fl\left(\frac{1}{\cos \theta}\right) = \cos \theta : [-] \tan \theta$,
 - 命題15 : θ_1 が一定 $\Rightarrow fl(\sin(\theta + \theta_1)) = \cos(\theta + \theta_1)$, $fl\left(\frac{1}{\cos(\theta + \theta_1)}\right) = \frac{[-] \sin(\theta + \theta_1)}{\cos^2(\theta + \theta_1)}$ 他,
 - 命題16 : 三つの弧を P, Q, R , 正弦を A, B, C , 余弦を D, E, F とし, P, Q, R の和, あるいは二つの和の第3に対する超過分が与えられる $\Rightarrow \frac{fl(A)}{D} + \frac{fl(B)}{E} + \frac{fl(C)}{F} = 0$,
 - 命題17 : 二つの角が一定の比を保ちながら流れ, $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow fl(\sin \theta_1) : fl(\sin \theta_2) = (\cos \theta_1 : \cos \theta_2) \times (\theta_1 : \theta_2)$.

第2グループの命題9の系で, 積の流率計算が公式されている. また第4グループの命題14は, 全体の中でのハイライトの一つである. あくまでも未発表の草稿であるが, こ

ここで「三角関数」に対する流率（微分）計算の公式が表明されているからである。繰り返すがあくまでも、ニュートンには（われわれのいう意味での）関数概念は備わっていない。そこで円の中に現れる量として捉えている。ニュートン流の極限操作も含めてその論証を確認しよう⁹⁹。

命題 14 の論証の概要：（図 13 において） AB を中心 C ，半径 $AC=1$ によって描かれた円の弧とする。 AT は与えられた点 A においてその円に接する直線とする。また B において弧と交わる線 CT を引き，この線に対して角 ACS の正弦 AS を下ろす。いま弧 AB と正接 AT は Ab と At まで流れるとする。このとき切片

$$CBb = \frac{1}{2} CA \times Bb. \quad \text{三角形 } CTt = \frac{1}{2} CA \times Tt \text{ となるので,}$$

弧の一部分 Bb ：正接の一部分 Tt ＝切片 CBb ：三角形 CTt となる。

いま別の三角形 Cpq を同じ線分 CT と Ct の間に作図する。角 Cpq を角 CTt に等しくすると，三角形 Cpq は三角形 CTt に相似で，しかも切片 CBb の面積に等しくなる。ここでユークリッド『原論』第 6 卷命題 19「相似な三角形は互いに対して対応する辺の 2 倍の比〔平方の比〕にある」から，これらの三角形は辺の平方の比になる。すなわち弧 Bb ： $Tt = Cp^2$ ： CT^2 。

よってもし点 T と t とが一致するまで逆に流れるならば，点 p と q はまた同様に重なった上で，中間の弧に一致し， Cp は CB に等しくなる。したがって最後の比 Cp^2 ： CT^2 ，すなわち消えゆく弧 Bb ：消えゆく線分 Tt の最後の比は CB^2 ： CT^2 となる。一方で， $CB=CA$ より， CB^2 ： $CT^2 = CA^2$ ： CT^2 。また CA ： $CS=CT$ ： CA から $CA^2=CS \times CT$ 。これを前の比例式で置き換えて CB^2 ： $CT^2 = CS$ ： CT を得る。ゆえに公理 6 によって， $fl(AB) : fl(AT)$ （＝消えゆく弧 Bb ：消えゆく線分 Tt ）＝ CS ： CT になる。すなわち角

$$ACB = \theta \text{ とすると } d\theta : d(\tan \theta) = \cos \theta : \frac{1}{\cos \theta}.$$

また命題 12 によって $CT : AT = fl(AT) : fl(CT)$ となるので，ゆえに比を結合することによって $CS : AT = fl(AB) : fl(CT)$ 。再び命題 12 より， $CT : CS = fl(CT) : -fl(CS)$ 。このときすでに導いたように $CT : CS = fl(AT) : fl(AB)$ から， $fl(CT) : -fl(CS) = fl(AT) : fl(AB)$ 。ここでユークリッド『原論』第 5 卷命題 16 により，比の交換を行う。すると $fl(CT) : fl(AT) = -fl(CS) : fl(AB)$ となる。これを $CT : AT = fl(AT) : fl(CT)$ とつなげて， $fl(AT)$ を消去すると， $CT : AT = fl(AB) : -fl(CS) = CA : AS$ 。す

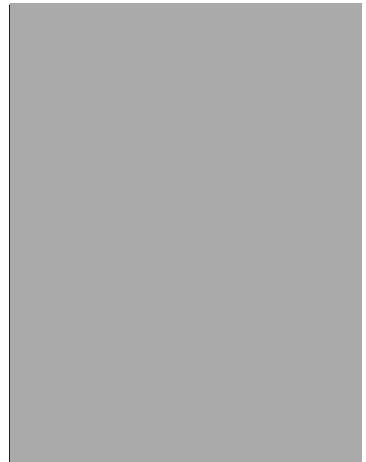


図13 「曲線の幾何学」
第1卷命題14より

⁹⁹[Newton MP], IV, pp. 440–443.

なわち $d\theta : -d(\cos \theta) = 1 : \sin \theta$.

さらに命題 11 によって $AS : CS = -fl(CS) : fl(AS)$. 他方 $fl(AB) : -fl(CS) = CA : AS$ だった. 再び等順位の関係において $-fl(CS)$ を消去すると, $CA : CS = fl(AB) : fl(AS)$. すなわち $d\theta : d(\sin \theta) = 1 : \cos \theta$.

一端, 微小な量だけ流れた (変化した) 量 ($AB \rightarrow Ab, AT \rightarrow At$) の間に成立する比例式を求める. それをまた元に引き戻す. 変化した量が消えるのと同時に「最後の比」による比例関係の構築が行われている. 固定された無限小(量)を用いて式を作り, 後で必要に応じてそれを 0 とみなすのではなく, 動的なプロセス (微小な変化を想定→その変化をもとに戻す) によって比例関係を求めるのがニュートン流である. 加えて直角三角形に対して成立する命題 11, 12 が有効利用されている点に注意したい. すなわち,

- 命題 11: 直角三角形の斜辺が定量であることを仮定した命題→図 13 で三角形 CAS に適用,
- 命題 12: 直角三角形の直角をはさむ一辺が定量であることを仮定した命題→図 13 で三角形 ATC に適用,

といった形で証明済みの命題が活かされている. 加えて『原論』第 5 巻の諸命題が駆使されている.

三角関数に対する (われわれの用語で) 微分計算は, ニュートンにとっての先行研究であるバロウ『幾何学講義』の中 (講義 X, 例 5) でも行われていた. バロウは図 14 において, 接線問題の一例として, $(\tan \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ と読みとれる結果を示していた. ただしニュートンのように一般的に計算公式として定式化する意図はない. また結果を得る過程も異なる⁷⁰. 一方で, 17 世紀後半の数学研究者たちは, 正弦, 余弦, 正接, 対数といった超越量を無限級数に直し, 項別微分によって計算する手法を身につけていた. ニュートン自身論文「解析について」ではその手法を頻繁に用いていた. この手稿では解析的手法ではなく, 古典的幾何学の体系的な議論の構成によって, 明確に三角関数の「微分公式」を提示したことは注意すべきである. 数学史上の重要な出来事として記憶に値する.



図14 バロウ『幾何学講義』X, 例 5

- 第5グループ (命題 18 から命題 19) : 任意の三角形における流率の比 (頂角 C から底辺への垂線の足を D , D から辺 BC への垂線の足を F , BC の延長上に DF と平行に AE となる点 E をとる);
 - 命題 18 : 底辺 AB , 頂角 C が一定 $\Rightarrow fl(AC) : fl(\sin B) = AC : \sin B$,
 - 命題 19 : 頂角 C , 角をはさむ一方の辺 AC が一定 $\Rightarrow fl(AB) : fl(CB) : -fl(CD) : fl(AD) = EB : AB : (AE - DF) : CF$.
- 第6グループ (命題 20 から命題 25) : 任意の鋭角三角形における流率の比 (頂角 C から底辺 AB への垂線の足を G);
 - 命題 20 : $AC \times fl(AC) - BC \times fl(BC) = AB \times fl(AG) - BG \times fl(AB)$,
 - 補題 : 垂心 X の存在,
 - 命題 21 : $BX \times fl(AC) + AX \times fl(BC) = GX \times fl(AB) + AB \times fl(GC)$,
 - 命題 22 : 半径 $\times fl(AB) - \cos A \times fl(AC) - \cos B \times fl(BC) = CG \times fl(\text{弧 } C)$,
 - 命題 23 : $\sin B \times fl(BC) - \sin A \times fl(AC) = AG \times fl(\text{弧 } A) - BG \times fl(\text{弧 } B)$,
 - 命題 24 : $\sin B \times fl(BC) - \sin A \times fl(AC) = AB \times fl(\text{弧 } A) + BG \times fl(\text{弧 } C)$,
 - 命題 25 : $fl(\text{角 } C) : fl(\text{角 } B) = AB \times fl(AB) - AF \times fl(AC) - BE \times fl(BC) : AC \times fl(AC) - CE \times fl(BC) - AG \times fl(AB)$.
- 第7グループ (命題 26 から命題 30) : 回転, 移動する直線における流率の比 (命題 26 以外は断片のみ, あるいは抹消の印);
 - 命題 26 : 直線の交点から角の運動の中心への距離 : 交点を囲んでいる角の正弦 = 位置において与えられた直線の流率 : 交点を囲んでいる角に張られた弧の流率,
 - 命題 27 : 曲線に対する接線の作図,
 - 命題 28 : 与えられた角を保ち回転する 2 直線とその 2 直線に対する垂線の交点から 2 直線の回転に共通の極を見いだす,
 - 命題 29 : 角が一定でない直線の回転について命題 28 と同様の考察,

⁷⁰バロウの証明の概要は次の通り (現代的表記を用いて表す). 図 14 左 (120 番) において, $CB=r$, $CK=f$, $EK=g$ とする. また右図 (121 番) で, $AP=\text{弧 } BE$, $MP=BG$, $AQ=\text{弧 } BF$, $NQ=BH$, さらに $MR=a$, $NR=e$ とする. そして点 M における接線を考え, その接線影 $TP=t$ を求めている. いま角 $ECK=\theta$ とし, $AP=r\theta$, $MP=r \tan \theta=m$ より, t を求める. これから正接の微分計算を実質的に示すことになる. ただしバロウは左図の KL や右図の NR は微小な量と考えている. この時その微小な三角形と有限量を持つ三角形の間に次のような比例関係が成立する.

$$CE : EK = (\text{微小な}) \text{弧 } EF : KL = QP : KL \Leftrightarrow r : g = e : KL \quad (13)$$

この(13)から, e^2 の項は無視して $LF = \sqrt{CF^2 - (CK + KL)^2} = \sqrt{r^2 - \left(f + \frac{ge}{r}\right)^2} \approx \sqrt{g^2 - \frac{2fge}{r}}$ を得る. また

$$CL : LF = CB : BH = CB : QN \Leftrightarrow f + \frac{ge}{r} : \sqrt{g^2 - \frac{2fge}{r}} = r : m - a \quad (14)$$

から, $r : m = f : g$ を用いて, かつ e^2 , a^2 等の 2 次 の項を無視して, $rfa = gr^2e + gm^2e$ を得る. 最終的に a を m に e を t に置き換えて, $t = \frac{r^2m}{r^2+m^2} = \frac{CB^2}{CG^2} \times BG = \frac{CK^2}{CE^2} \times BG$ を得ている. [Barrow 1670], p. 84.

- 命題[30]：円と直線と流率,
- 命題 30：直線と曲線の接線と流率.

第7グループの命題 26 は, 1670-71 年に記された「級数と流率の方法について」論文, 定理 4 の一般化を試みたものとなっている⁷¹. こちらも論証の概要を確認しよう⁷².

命題 26 の論証の概要：図 15 において, AB を位置において与えられた直線とし, BD は交わっている直線とする. $BP : \sin ABD = fl(AB) : fl(\text{弧 } ABD)$ となるように点 P をとる. すると点 P は直線 BD の角運動の極になる.

いま BD が bd の位置に達するまで少しだけ動かす. また Q を直線 BD, bd の交点, そして QD を与えられた円の半径, Dd をその角 DQd に張られた弧とする. このとき弦 dD を引いて, それを E で直線 AB に交わるまで延長する. そしてそれに平行な線 BC を Qd と C において交わるように引く. すると三角形 BbC, Ebd の相似により, また同様に三角形 QDd と QBC の相似により, $Bb : BC = Eb : Ed$, かつ $BC : Dd = BQ : DQ$ となる. そして二つの比例式から $BC = \frac{Bb \times Ed}{Eb} = \frac{Dd \times BQ}{DQ}$, すなわち $Bb \times \left(DQ \times \frac{Ed}{Eb} \right) = Dd \times BQ$ より $Bb : Dd = BQ : DQ \times \frac{Ed}{Eb}$ となる.

いま位置において直線 dQ を先の DQ に戻す. そして与えられた円 Dd の中心を Q に重ねる. このとき Ed と Eb が ED と EB へと消失するならば, 消失する直線 Bb : 消失する弧 Dd の最後の比は, $BQ : DQ \times \frac{ED}{EB}$ となる. 一方で $EB : ED = \text{半径} : \sin ABD$. かつ「補題」により $BQ : \sin ABD = \text{直線 } Bb : \text{弦 } Dd$ の最後の比, すなわち = 直線 Bb : 弧 Dd の最後の比になる. したがって公理 6 によって, 直線 AB の流率 : 角 ABD に張られた弧の流率は $BQ : \sin ABD$ になる. 角 ABD の正弦に対して同じ比を持っている BQ と BP は等しい. すなわち, とともに進んでいる直線 bd, BD の究極の交点は, 点 P に向けて取られ, それは結局, 定義 7 より直線 BD の角運動の極になる.

ニュートンの証明中に言及される「補題」に相当するものは, この草稿中には存在しない. 実質的には『プリンキピア』第 1 巻補助定理 7 (「弧, 弦, 接線間の比の極限は 1 に等し

⁷¹[Newton MP], III, pp. 342-345.

⁷²*Ibid.*, IV, pp. 466-469.

い]が対応していると考えられる⁷³⁾。曲率中心を求めて接線の作図をすることにつながる意図があったかのように見える。逆2乗則により向心力が与えられる場合に軌道を求める問題(いわゆる「逆問題」)への応用を、この段階でニュートンがどの程度視野に入っていたか。われわれには判断の材料が乏しい。『プリンキピア』へと結びつく力学研究の中で、ここで作られた流率法の諸命題を直接応用していることが確認できるならば、われわれの議論は非常に明快になるだろう。だが『プリンキピア』に含まれる諸命題と対応関係がきれいに結ばれるわけではない。草稿「曲線の幾何学」は『プリンキピア』への準備において一定の役割を果たしていると考えられるが、直接つなげる意図があったとも判断できない。そうするには少し論拠が不足している。研究の次の段階へ進んでいく一過程としておくことが穏当だろう。

第2巻の問題の内容を列挙すると次のようになる(問題5, 6は証明なし):

- 問題1: 四つの比例中項の第1の量を最大にするように直線を分割すること,
- 問題2: 直線と角が与えられたとき, 1点から最大, 最小の距離を見いだすこと,
- 問題3: 楕円上の任意の点における法線影を求めること,
- 問題4: 楕円に接線を引く作図,
- 問題5: 第2類の楕円へ接線, 法線を引く, デカルト『幾何学』第2巻で扱われる屈折の問題への言及
- 問題6: 第2類の放物線へ接線, 法線を引くこと,
- 問題7: コンコイド, シッソイドについて,
- 問題8-11: 断片のみ.

問題3以降は, デカルト「幾何学」第2巻において取り上げられていた問題である。ニュートンにとって, 自分自身の方法論でそれらを解決するのが当初からの目標の一つだったろう。以下に例として問題3の議論を確認しよう⁷⁴⁾。

問題3の論証の概要: 図16で, BC は楕円の一つの軸 AD に対して垂直に立てられ, BT, BP がそれぞれ点 C における接線影, 法線影とする。 D, E を与えられた量とするとき, もし $AB \times BD : BC^2 = D^2 : E^2$,

すなわち $AB : \frac{BC \times D}{E}$ が続けて比例するな

らば, 第1巻命題4によって $\frac{2BC \times D}{E} : BD - AB = fl(AB) : fl\left(\frac{BC \times D}{E}\right)$ となる。あるいは, $\frac{2BC \times D^2}{E^2} : BD - AB = fl(AB) : fl(BC) \left(= fl\left(\frac{BC \times D}{E} \times \frac{E}{D}\right) \right)$ となる。また

図16 「曲線の幾何学」第2巻問題3より

⁷³⁾[Newton Principia], I, p. 78f, 邦訳[ニュートン 1972], 89f頁。

⁷⁴⁾[Newton MP], IV, pp. 476f.

比例の最右辺は、直角三角形 CTB と相似な微小三角形における辺の比となるので、
 よって $fl(AB) : fl(BC) = BT : BC = BC : BP$ となる。 $BD - AB = 2AX - 2AB = 2BX$ から、
 よって $BP = \frac{E^2}{D^2} \times BX$ である。

デカルト「幾何学」は、接線（あるいは法線）の問題に対して、（与えられた図形を表す）
 代数方程式と接線、あるいは法線を表わす代数方程式を立てる。それらを連立させ、重根
 を持つ（＝変量の一つに絞った後に、平方完成する）という考えで処理する。これに対し
 てニュートンは、代数的方程式の手法によらず、問題解決する。ニュートンの与えた結果
 は、デカルトのものと同等である⁷⁵。これはニュートンが抱いたデカルト批判の観点から
 すると、うまく成功収めた例になっているといえよう。ただしこうして円錐曲線に対する
 適用を論じたところまでが、この草稿「曲線の幾何学」における限界であったとも考えら
 れる。実際、1670-71年論文「級数と流率の方法について」でも扱われていたコンコイド
 曲線などが登場する段階で、この草稿は中断されてしまう。結局、ニュートンにとって既
 知の内容を体系立てる作業は挫折を余儀なくされる。

さらにホワイトサイドが編纂したテキストには、「曲線の幾何学」第1巻を修正しよう
 とした試みも含まれている。その内容を列挙すると次のようになる⁷⁶。

- 命題 11 から 19 までの修正、
- 「比について」（＝命題 1 から 14 までの修正）
- 「直角三角形について」（＝命題 11 から 13 までの修正）、
- 「頂角が与えられた斜角三角形について」（＝命題 18, 19 の修正）、
- 「与えられた角を持たない斜角三角形について」（＝命題 20 から 25 までの修正）、
- 「線の流率について」（＝命題 26 から 30 までの修正か）。

これらの中には、前項で第1グループに分類した命題群に加えて、四つの続けて比例する
 量を仮定する場合考えてもいる。ただ全体としてこの修正は本質的な変更ではない。あく
 までも第1巻の流れを変えずに多少の試行錯誤を行っているものと判断できよう。また修

⁷⁵デカルト「幾何学」第2巻の「与えられた曲線、またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法」の
 内容に対応している。デカルトは、楕円に関してアポロニオス『円錐曲線論』第1巻命題 13 に言及し、その方
 程式を与えている。いま図 16 において、楕円の通径を r 、横径 AD を q 、 $AB = x$ 、 $BC = y$ とすると、楕円 ACD は

$$y^2 = rx - \frac{r}{q} x^2$$

と表される。デカルトは以上の設定のもとで、楕円に対して内側から接する円の方程式を連立させる。それら
 が重根を持つことから、法線影 $BP = \frac{1}{2}r - \frac{r}{q}x$ を得ている（[Descartes 1996], VI, pp. 414f, 邦訳[デカルト 2001],
 32-36 頁）。ニュートンがこの問題 3 で示したことは $(BP = \frac{E^2}{D^2} BX = \frac{E^2}{D^2} (AX - AB))$ 、そのデカルトの結果と同
 じである。すなわち、楕円の通径の横径に対する比の値 $\frac{r}{q}$ を $\frac{E^2}{D^2}$ と考えればよい。

⁷⁶[Newton MP], IV, pp. 484-505.

正の意図はあっても断片にとどまっているものも多い。

ニュートン流率論における「曲線の幾何学」の位置づけについて

ニュートンの流率論は、1660年代後半から1671年初め頃までに基本的には確立されていた。その後、1670-71年論文「級数と流率の方法について」の補遺では、この「曲線の幾何学」と同様の意図で部分的に議論が再構成されていた⁷⁾。デカルトに代表される代数的手法による接線問題、その他の幾何学的問題に対して、ニュートンなりのオルターナティブを提示する作業はどのように評価されるべきであろうか？

ホワイトサイド編纂のテキストでは、1690年代以降のニュートン流率論の展開を見ることができる。1691年から93年頃にかけて記された草稿は、1704年に『光学』の付録として公刊される論文「曲線の求積論」(3.2.3項参照)に向けて準備した跡である。これらの内容は、1669年論文「解析について」や1670-71年論文「級数と流率の方法について」の内容をふまえたものである。特にもっとも重要な技法である無限級数の利用を軸に、曲線の式が与えられたときに流率計算による関係式に変形するか、あるいは逆に流率に係る関係式が与えられたときに、(われわれの用語でいう)積分計算の結果を与えるのが主眼である。ある意味、ニュートン流率論の「主流」を示した内容になっている。こちらを本筋と考えるならば、この中間的な時期である1680年頃に執筆されたと推定されたこの草稿の様相は随分と異なるように見える。

そもそもこの草稿の執筆年代は推定の域を出ない。仮に1670年代の初めの頃に設定しても、1680年代の半ばまで遅らせても、デカルト批判、さらには古典的な幾何学の手法に対するニュートンの敬意が動機の一つになっていることは注意を払うべきである。しかしニュートンの流率論の本質が変容したと考えるのは誤りであろう。用語の相違はあるにせよ、流率論の基本概念、すなわち運動に基づいた変化量(流量)を設定は一貫している。「最後の比」などのある種の極限操作を行うことは、『プリンキピア』を経て「曲線の求積論」へと受け継がれる。無限小導入に対する批判も、運動に根ざしたニュートン流の認識の表明として必ずしも古典的な幾何学を重要視することと連動しているわけではない。

一方で、「曲線の幾何学」のいくつかの命題で示された結果は、1680年代半ばに進んだ『プリンキピア』執筆やそれ以前の準備草稿「運動について」(1684年頃執筆)との関連を想像することもできる。例えば、第1巻の最終部分、第7グループ(命題26-30)は、未完成に終わってしまったが、「運動について」から『プリンキピア』における重要問題、すなわち物体の運動の軌道が与えられたときに働く力を見いだす問題(順問題)と逆2乗則にしたがって運動する物体の軌道を考える問題(逆問題)の中で活用される余地があったようにも見るることができる。例えば、この「運動について」の初期稿では、「運動の始まりにおいて(motus initio)任意の中心力によって(quaeunque vi centripeta)駆動され

⁷⁾ *Ibid.*, III, pp. 328-353.

た物体が描く軌跡は、時間の2重比になる」という言明を述べている⁷⁸。こうしたニュートン力学において重要な認識に至る中で、ニュートンが独自の極限操作である「最初の比」、「最後の比」を利用していることも考えられる。ただし「運動について」では、流率計算を表面に出して結果を導いている様子はない。回転の極を持った直線にかかわるこの第7グループの命題などは、力学研究への何らかの応用の可能性をはらんでいたように考えられるが、史料的な裏づけがなく推測の域を出ない。

また『プリンキピア』第1巻補助定理11「接点において有限の曲率を持つあらゆる曲線において、消えゆく接触角に立てられた辺 (subtensa evanescens anguli contactus) は、その立てられた辺と共通する終点との間にある弧の2乗に最終的には比例する」では、「曲線の幾何学」で活用されたニュートン流の極限操作「最初の比」、「最後の比」を用いて、(図17で) $AB^2 : Ab^2 = BD : bd$ を導いている⁷⁹。ここでニュートンは利用する自らの手法に関して、「注解」として説明を加えている。「曲線の幾何学」の中では、第1巻公理6で流率概念と組にして「最初の比」、「最後の比」を簡単に導入していた。この『プリンキピア』の註釈では、カヴァリエリの不可分者の考え方を論評しつつ(「いささかぎこちないように見ええるし、その方法は非幾何学的と思われる」)、次のように論じられている⁸⁰。

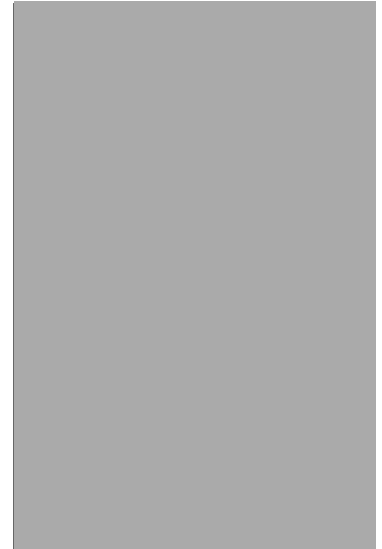


図17 『プリンキピア』
第1巻補助定理11

量を微小部分から成るかのように考えると、直線の代わりに短い曲線を使おうとくかという場合、不可分者を意味するのではなく、消滅していく可分量と解して欲しい。確定した部分の和や比ではなく、和と比の極限 (limes) といつも考えて欲しい。〔中略〕

究極の速さとは、それでもって物体が最終の場所に達し、その運動が止む前でも後でもなく、ちょうど到達するその瞬間に運動する速さを意味する。すなわち、それで物体が、その最終の場所に達し、運動が止むその速さである。また同様に消えゆく量の最後の比というのも、消える前でもなく後でもなく、まさに消えるところの比と解されるべきである。〔中略〕

諸量が消えてゆくという最後の比は、実際に最後の量の比ではなく、限りなく減少

⁷⁸草稿「運動について」は[Newton UP], pp. 243.

⁷⁹[Newton Principia], I, pp. 83ff, 邦訳[ニュートン 1972], 93f頁。ちなみに接触角とは、図17で、曲線ABとAにおける接線ADとではさまれた角をいう。また(以下も含めて)『プリンキピア』の邦訳に関して、引用者の判断で変更を加える。

⁸⁰*Ibid.*, pp. 86f, 邦訳, 95ff頁。

していく諸量の比へとたえず近づいていく極限である。また与えられた任意の差に対するよりもいっそう近くまで達することはできるが、決して超えることはできず、それらの量が無限に小さく減少するよりも先に到達することができないものである。

「曲線の幾何学」の段階に比して、公刊を意識して説得力を増すようにし、より精密に自己の極限操作の方法に対して誤解が生じないように工夫しているのが分かる。まさしくわれわれが取り上げた草稿における基本技法が明確化する好例である。また『プリンキピア』第2巻の補助定理2は、「ゲニタ (genita) [被生成量] のモーメント [瞬間的な変化量] は、そのゲニタを生み出す各項のそれぞれのモーメントに、同じ項のベキ指数とその項の係数 (coefficient) を続けてかけたものに等しい」と主張する。ニュートンは、「モーメントの代わりに、増加及び減少の速さ (それは、量の運動とか量の変動とか量の流率とか名づけてもよい) を使っても、あるいはその速さに比例する任意の有限な量を使っても同じことになる」と述べ、流率という語も用いている。この補助定理は実質的にベキ乗の微分公式、

$$x^n \text{ のモーメント} = n \times \dot{x} \times x^{n-1}$$

を示す⁸¹。またこの補助定理から得られる系1は、「曲線の幾何学」第1巻命題8 (あるいは修正版命題14) と同一である。こうしてニュートンが流率論を比例論の枠の中で再構築した試みは、基本概念・公式の形で別の研究において吸収されていったのであろう。

すでに一度序論部で述べられている記述をもとに、この手稿の意図として四つの事柄を列挙した。われわれはさらに「深読み」することもできる。すなわち、ニュートンの意図は、自身が1670年代初めまでに作り上げた成果を当時の数学研究者、あるいは後進の者たち (その中には彼が教鞭をとっていたケンブリッジの学生も含まれるだろう) に対してより説得力のある形で示したかったということではないか。17世紀後半においてもユークリッド『原論』の記述スタイルは、相変わらず規範としての役割を果たしていた。他者に伝達するためにより安全な手法をとることだったと考えられる。それは序論中の「私が以下の論考を記したのは、解析によって解くなのが習慣になっている多くの種類の問題が、(少なくとも大部分は) 総合によってより簡単に解くことができる」(下線引用者) という一文に込められた思いだったかもしれない。

ニュートンは、この「曲線の幾何学」全般において「教育的配慮」に類するメッセージを発していない。だがわれわれが特に注目した第1巻命題14などは、当時の先端技法である無限級数によらず、三角関数の流率計算を公式化していた。これをデカルト批判と結びつけ、方法論の変化と捉えるだけでは不十分のように考えられる。この「曲線の幾何学」は、確かに伝統的な総合的な表現スタイルで成果が提示される。そして実際に、デカルト

⁸¹ *Ibid.*, pp. 364f, 邦訳, 278ff 頁。

が成し得たのと同じ程度、比例論に則った議論を構築できた。ただある段階まで来て、この草稿の執筆が止まってしまったことは、外的な理由にもよるだろうが、この草稿の数学的内容自身が備えていた目標自体にも原因があるように見受けられる。やはりニュートンの流率法建設における基本技法である無限級数を排除したことが足かせになっている。その手法抜きでは、自分自身が過去に得た結果を十分に取り込むことはできないからである⁸²。上にも述べたが、先端にいた研究者のみならず他の人々に対してもより説得力を増す記述法に書き直すことは、当然ニュートン自身が得た最高の結果を盛ることに至らない。ニュートンも最初からそれを意図していなかったとも考えられる。本草稿の冒頭にあるように、「曲線の幾何学」は4巻構成を思い描いていた⁸³。だがこの記述スタイルに沿うならば、第3巻として予定した逆流率法をどのように示すのか。1670-71年の「方法について」でまとめられた積分計算のパターン分類を示すことは想像しづらい⁸⁴。ニュートンがなぜこうした論考を書こうとしたのか。「デカルト批判→古典幾何学への回帰」という図式のみでは捉えにくい。

その一方で、流率論の再構築、比例論の論法で結果を積み重ねていくことは、『プリンキピア』（あるいはその準備的な草稿）などの力学研究の中に応用の場面を作り出したように見える。それによって発展解消したというのが実情ではなかろうか。その意味で、1670-71年論文「級数と流率の方法について」の補遺（1671年から72年にかけて執筆）から「曲線の幾何学」へと至るニュートン流率論の分枝は、数学上の限界と他の問題への展開・吸収へと歩んでいったと考えるのが良いのだろう。

3.2.3 「曲線の求積論」（1704年）

本項では1704年に『光学』の付録として出版され、ニュートンの流率論に関する初めての本格的な公刊論文である「曲線の求積論」を分析する。現在、われわれはホワイトサイドによる『ニュートン数学著作集』全8巻を手に行っている。ニュートンの数学研究の進展を草稿の類からつぶさに見ていくことが可能である。だが、18世紀初頭の数学研究者の事情は異なる。一部のニュートンの薫陶を直接受けることができた者や直接手稿を閲覧することができた者を除いて、その研究の詳細を知ることは叶わなかった。したがってニュートンの流率法を知るために、この「曲線の求積論」の公刊は多くの研究者から歓迎され、第一の文献として参照されたはずである⁸⁵。

⁸²原亨吉は、この草稿「曲線の幾何学」を1670-71年論文「級数と流率の方法について」に対して内容的に「後退と見える」と評価した。単純な「後退」ではなく、異なる意図に基づいて構想された論考と捉えるべきであろう。[原1975], 314頁参照。

⁸³[Newton MP], IV, pp. 422-425.

⁸⁴*Ibid.*, III, pp. 244-255.

「曲線の求積論」執筆の背景について

1687年の『プリンキピア』初版刊行後も、ニュートンはケンブリッジ大学のルーカス数学教授職にとどまっていた(1701年まで)。1690年代初めの時期に、際立って新しい数学研究成果があったわけではない。ただ外的な状況からニュートンは、過去の数学的成果を公表しようと考えていたようである。一つは、ライプニッツが1684年に彼の微分学の成果を発表し、学界に影響を与えていたことがある。またイギリス国内でも新しい研究者たちの著作が刊行され、自分の先取権を守る必要に迫られていた。そこでこの時期にニュートンは自身の研究成果を振り返り、新たな進展も付け加えるためにいくつかの草稿を残した⁸⁶。一方で、数学以外の研究対象(例えば光学)もあった。結局、数学論文を単独で出版する形はとらなかった。準備段階を経て、1704年に『光学』を出版する際に、付録として「曲線の求積論」は公にされた。同時に「3次曲線の列挙」という流率論とは異なる内容の論考もあわせて加えられた。ニュートンの流率法は、基本概念・公式に関して『プリンキピア』にも記されていた。また草稿の回覧や筆写も行われていたので、一部の研究者たちにとって未知のものではなかっただろう。しかし、ようやく初めて本格的にその内容を知る機会ができたのである。このときニュートンは、前年1703年春に死去したロバート・フックの後を継いで、同年11月にロンドン王立協会の会長に選出され、名実ともにイングランドの研究者の頂点に立っていた⁸⁷。

前項の「曲線の幾何学」の解説でも述べたが、ニュートンは古典的な幾何学に敬意を抱き続けてきた。自己の流率論を伝統的な比例論で書き換え、再構築を(必ずしも成功裏には終わらなかったが)試みた時期もあった。そのような研究の方向性とは別に、元来ニュートンが残していた数学研究成果をまとめあげることが、課題としてニュートンの後半生において意識されていたに違いない。ここでは以下に、この「曲線の求積論」の内容分析を行う。1690年代における準備草稿とこの論文とを対照することも行いたい。

「曲線の求積論」準備草稿について

1690年代初頭における「曲線の求積論」の準備草稿は、次の三つがホワイトサイド編纂の『ニュートン数学著作集』に収められている(執筆年代推定はホワイトサイドによる)。

- 第1草稿(1691年11月頃執筆)⁸⁸,
- 第2草稿(1691年終わりから1692年初め頃執筆)⁸⁹,

⁸⁵18世紀中にラテン語の原著だけでなく、英訳を含めて8回出版されている([Gjertsen 1986], p. 581)。テキストとして初版[Newton 1704]ではなく、ホースリーが編纂し、1779年から1785年にかけて出版された『アイザック・ニュートン全集』([Newton H], I)所収のものを採用する。この版では、初版の誤りが修正されている。また初版刊行後に様々な研究者が加えた注釈を脚注に添えている。適宜、本文理解のためにその注を参照した。

⁸⁶[Newton MP], VII, pp. 3-20.

⁸⁷[Westfall 1980], pp. 629, 639f, 邦訳[ウェストフォール 1993], II, 186, 196f頁。

⁸⁸[Newton MP], VII, pp. 24-48.

⁸⁹*Ibid.*, pp. 48-129.

- 第3草稿（「幾何学」第2巻（*Geometriae Liber secundus*）（1693年頃執筆）⁹⁰。

最後に掲げた第3草稿「幾何学」第2巻は、実質的に完成稿に近い。1704年に刊行された論文と比較すると、細かに字句が追加，修正されたり，特定の具体例が削除されている。しかしそれらを除けばほぼ同じ内容である。命題・定理の主張，証明の論理構成，配列，掲げられる応用例は変わらない。さらに『光学』刊行前に第3草稿の内容が検討された（1703年終わり頃）。そして公表を控えて序文，注解が最終的に考案され付け加えられた⁹¹。

上に記したように，この「曲線の求積論」へとつながる準備草稿は，もともとニュートンが自分自身の成果の先取権を主張するために記された。したがって第1草稿，第2草稿ともにライプニッツに向けた書簡（1676年10月24日付オルデンバーグ宛，通称「後の書簡」）に盛られた事柄を示すことから始まっている⁹²。すなわち，次が記されている。

- （ライプニッツを試すために記した）アナグラムの謎解き（「いくつかの流量を含んだ方程式が与えられたとき，その流率を見いだすこと．およびその逆」），
- 曲線の縦線 $= dz^{\theta} \times (e + fz^{\eta})^{\lambda}$ とするとき，

$$\text{曲線による面積} = Q \times \left(\frac{z\pi}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{\eta}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{\eta}} + \dots \right)$$

が与えられること。ただし $\lambda + r = s$ ， $Q = \frac{d}{\eta f} \times (e + fz^{\eta})^{\lambda+1}$ ， $r\eta - \eta - \pi$ ， $A = \frac{z\pi}{s}$ ， $B = \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}$ ， 等々となる。

第2草稿には，いくつかの適用例も示されているが，これも「後の書簡」に掲げられているものと同一である。だが1704年に公刊される「曲線の求積論」では，そうしたライプニッツがらみのことは一切省かれてしまう。1693年にウォリスの『数学著作集』（[Wallis 1693-1699]）が出版されたことは，ニュートンの草稿執筆に影響を及ぼした。その第2巻には，第2草稿前半部をまとめた論文が掲載される。ニュートンのドット記号が初めて公にされたのもこの論考においてである。加えて「後の書簡」に対する言及も含まれていた⁹³。ニュートンは，前年1692年8月，9月にウォリスに書簡を送り，自己の成果の公表に許可を与えていたのだった。ニュートンは，それで自己の先取権は守られると考えたかもしれない。したがって第3草稿以降，1704年に公刊された版でも「後の書簡」への言及は消えてしまう。

第1草稿，第2草稿と刊行版との差異は他の点にも見受けられる。第1草稿は，定理1

⁹⁰ *Ibid.*, pp. 507-561.

⁹¹ *Ibid.*, VIII, pp. 92-159.

⁹² *Ibid.*, VII, pp. 24-27, 48-51.

⁹³ *Ibid.*, pp. 170-182. 「後の書簡」自体は，同じウォリスの『数学著作集』（[Wallis 1693-1699]）第3巻（1699年刊）に所収される。

から定理 13 まで提示される。だがその定理 1 と定理 9 から 11 までは実質的な内容を欠いている。この草稿は全体を通じて完成度が低い。まだニュートンの中で、自己の流率論をコンパクトに示す道筋が定まっていないうに見える。第 1 草稿と 1704 年論文と内容的に類似する部分は以下の通りである。

- 第 1 草稿の定理 6 → 刊行版の命題 3,
- 第 1 草稿の定理 7, 場合 1 から場合 4 → 刊行版の命題 7, 場合 1 から場合 4.

これらだけが、同じ形で活かされている。刊行版との関連性を見いだすことはできるが、後に姿を変えていく事柄が多い。全体の構成が固まっている段階ではない。

第 2 草稿は、第 1 草稿に比べて格段に整えられている。冒頭の命題 1 にはまだ「後の書簡」への言及が残っている。だが以下の内容は刷新され、命題 2, 命題 3 は刊行版の中に取り入れられる。命題 4 から 5, および命題 7 から命題 10 は、刊行版の命題 1 から命題 6 に繰り上がり、付された例も含めて同一の内容になっている。議論の構成に関してニュートン自身の中で整理が進んだことをうかがわせる。ただし後半部分、すなわちウォリス『数学著作集』に掲載されなかった部分について、以下に掲げる事柄に対して付された例や場合分け、または『プリンキピア』の諸命題と関連する問題群が第 3 草稿以降大きく変更される。

- 命題 11: 二つの単純な量の流率を含む方程式が与えられたとき、それらの量の関係を見いだすこと,
- 命題 12: 二つの流量、またはただ一つの流量、あるいはそれらの流率が一緒になった項を含む方程式から、無限収束列を通じていくつかの量を引き出すこと,
- 命題 13: 前述の命題 12 によって問題を解くこと,
- 問題 1: 位置において中心へ重さを持つ物体があり、天に向けて投げられた物体が重力によって同じ中心へと曲げられているとする。非抵抗媒体の中でそうした運動によって物体が描く曲線が与えられ、個々の位置において重力の量が求められる,
- 問題 2: 位置において与えられ中心に向けて重さを持ち、かつ重力の法則が与えられるとき、与えられた方向に与えられた速さで、与えられた場所から非抵抗空間の中を通る物体の運動を見いだすこと.

これらは、刊行論文には収録されなかった。しかし数学的に興味を引く内容である。一部その具体的内容を紹介しておこう。

命題 11 は、われわれの用語で微分方程式の解法に関連する。ニュートンはここで流率や高次の流率を含む方程式を以下のような七つの場合に分けて論じている⁹⁴。

- 場合 1: 方程式が流量のうち一方を欠いている場合,

$$\text{例) } 2zz - 3zy + ay = 0 \text{ (流率 } y \text{ を含んでいない)} \iff \frac{2zz}{3z-a} = y$$

⁹⁴ *Ibid.*, pp. 70-92. 一部の例において、ホワイトサイドの注によって方程式を修正している。

- 場合 2：方程式が両方の流量を含んでいて、両辺にそれぞれの流量と流率とが分離している場合（変数分離型），

$$\text{例) } -axy^2 = a^4\dot{y} + a^3xy \iff \left(\frac{-ax}{a-x}\right)\dot{x} = \frac{a^3}{y^2}\dot{y}$$

- 場合 3：方程式の両辺において二つの流量が分離されていない場合，

$$\text{例) } a^4y^3\dot{z} + a^2y^3z^2\dot{z} - 2y^4z^3\dot{z} = z^4y^3\dot{y} + a^5z^2\dot{y} \iff \frac{a^4}{z^2}\dot{z} + a^2\dot{z} - 2yz\dot{z} = z^2\dot{y} + \frac{a^5}{y^3}\dot{y}$$

$$\rightarrow P = -\frac{a^4}{z} + a^2z, \quad Q = -z^2y, \quad R = -\frac{2a^5}{y^2} \text{ とし,}$$

$$\text{定数を } c \text{ とするとき } P+Q=R+c$$

- 場合 4：場合 3 と同様な方程式で，場合 3 の解法が利用できない場合，

$$\text{例) } ay\dot{z} + 2az\dot{z} + 2yzz - y^2\dot{z} = 2az\dot{y} + z\dot{y}$$

- 場合 5：一方の流量 z が一様に流れる ($\dot{z}=1$) が，もう一方の流量 y はそうでない場合，

$$\text{例) } 12zy^2 + 24z^2y\dot{y} + 6z^3y^2 + 3z^3y\dot{y} - 24zy^2\dot{y} - 6y - 12z^2y\dot{y} - 4z^2y^2\dot{y} = 0$$

- 場合 6：一様に流れる量 z を方程式に含まず， y の高次の流率を含んでいる場合，

$$\text{例) } 4\dot{y}^3 = \dot{y}^2 \iff 4x^3 = v \quad (x = \dot{y}, v^{1/2} = \dot{y} \text{ とおいて}) \iff \frac{1}{v^{1/2}} = \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

- 場合 7：二つの流量 y と z の関係が場合 1 から 6 のやり方を通じて見いだせない場合。流量の上についたドットの個数が流率の階数を表わしている。命題 12 は，特に系 3 が注目に値する⁹⁵。この場でニュートンは無限級数

$$y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \dots$$

を考え，「 z が消えるとき」（すなわち， $z=0$ の近辺で）

$$\frac{\dot{y}}{z} = a, \quad \frac{\ddot{y}}{z^2} = 2b, \quad \frac{\dddot{y}}{z^3} = 6c, \quad \frac{\text{よ}^{\text{四}}}{z^4} = 24d, \quad \frac{\text{よ}^{\text{五}}}{z^5} = 120e$$

とおくことで， y の諸々の流率が与えられるとしている。いま $z=0$ のとき $y=y_0$ とするならば，

⁹⁵Ibid., pp. 96-99.

$$y = y_0 + \frac{\dot{y}}{z} z + \frac{1}{2} \frac{\ddot{y}}{z^2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{\dot{\ddot{y}}}{z^3} z^3 + \frac{1}{24} \frac{\ddot{\ddot{y}}}{z^4} z^4 + \frac{1}{120} \frac{\dot{\ddot{\ddot{y}}}}{z^5} z^5 + \dots$$

となる。仮に z を従属変数として、かつ関数概念を前提するならば ($y=f(z)$, $z=1$)、このニュートンの成果は現代的な表記を利用して次のように表現することもできる。すなわち、 $y_0^{(i)} = \left. \frac{d^i y}{dz^i} \right|_{z=0}$ と書くと、

$$y = y_0 + y_0^{(1)} z + \frac{1}{2} y_0^{(2)} z^2 + \frac{1}{6} y_0^{(3)} z^3 + \frac{1}{24} y_0^{(4)} z^4 + \dots \quad (15)$$

となる。「テイラー展開」へとつながる一過程が示されていると判断してよいだろう⁶。

「曲線の求積論」の内容について

1704 年の公刊論文の分析に移ろう。まず全体に先立ち「序論」が置かれている。そこには全部で 11 の事柄が述べられている。それぞれの内容を列挙すると次のようになる⁷。

- 1) 数学的な量が連続的な運動によって規定されること、
- 2) 流量、流率の定義。増加・生成の元、生み出された量が流量であり、増加分の速さが流率であること、
- 3) 流率、流量の変化、増加分の最初の比は線分によって表現可能であること、

⁶式(15)は、現在「マクローリン展開」と呼ばれている。マクローリン (1698-1746) は、ニュートンよりも後の時代に活躍した数学者である。ニュートンは少なくとも 1693 年の段階で同等の結果に達していたことがわかる。加えてニュートンは、同じ命題 12 の系 4 で、 $z=w+x$ として、

$$y = ex + fx^2 + gx^3 + hx^4 + \dots$$

と無限級数展開し、そのとき

$$\frac{\dot{y}}{z} = e, \quad \frac{\ddot{y}}{z^2} = 2f, \quad \frac{\dot{\ddot{y}}}{z^3} = 6g, \quad \frac{\ddot{\ddot{y}}}{z^4} = 24h$$

を得ている。(x=0 のとき) $y=y_1$ とし (また $y=f(x)$, $x=z=1$ を仮定する), $y_1^{(i)} = \left. \frac{d^i y}{dx^i} \right|_{x=0}$ と書くと式(15)を一般化した

$$y = y_1 + y_1^{(1)} x + \frac{1}{2} y_1^{(2)} x^2 + \frac{1}{6} y_1^{(3)} x^3 + \frac{1}{24} y_1^{(4)} x^4 + \dots \quad (15)$$

に達する。これはまさしくわれわれが「テイラー展開」と称している公式である。テイラー (1685-1731) もニュートンより後の時代に活躍した。テイラーは 1715 年に『直接及び逆増分法』という書を刊行し、その命題 7 (定理 3) に上記の公式を示している ([Taylor 1715], pp. 21ff)。

一方で、ニュートンだけでなく、テイラー、マクローリンに先んじてグレゴリーも同様な結果に達していたように見える。1670 年から翌年にかけて冬の時期に残した草稿の中で、グレゴリーは三角関数の微分計算に相当する内容を記している ([Gregory 1939], pp. 347-353)。そのグレゴリーの未発表手稿を編纂して刊行したターンプルは、そこに示されている結果がテイラーを先取りしていると評価している (*Ibid.*, pp. 356f)。

⁷[Newton H], I, pp. 333-338.

- 4) 流率を運動を伴う縦線として表すこと，有限量との比例関係を求める，
- 5) 消えゆく部分の最後の比としての流率，有限量との比例関係を求める，
- 6) 運動を伴った一様な半径×横線の流率＝円，面の流率＝円周×円弧の流率を求める，
- 7) 与えられた極のまわりに直線が回転するときの流率を求める，
- 8) 与えられた極のまわりに直線が回転し，他の直線と交わるとき流率を求める，
- 9) 与えられた極のまわりに直線が回転し，与えられた他の曲線と接するときの流率を求める，
- 10) 量 x^n の流率を 2 項展開を通じて求める，
- 11) 線の流率，面の流率，角の流率を求める，一方で無限小を排除すること，
- 12) 流率から流量を見いだすことは，より難しい問題であること．

特にニュートンの流率論にとって重要な認識論的前提 1), 2), 3) については，すでに 3.1.2 項で見た．ニュートンは量の連続的な変化を「流量」という物理的なイメージを伴った概念で表現する．このとき，流れる量の瞬間的な変化（速さ）が流率である．ある種の具体的な描像の助けを借り，かつ時間というパラメータを陰に含みつつ，微小な変化が存在することが直観的に導入される．加えて，ニュートンは極限操作の代替物として独自の手法を提唱する．それが，生まれつつある（あるいは，消えつつある）有限量の「最初の比」（あるいは，「最後の比」）である．これによってユークリッド『原論』以来の比例論の中に流率法の基礎部分を収めることができると考えたのだろう．こちらも，すでに 3.2.2 項において 1680 年頃の草稿「曲線の幾何学」でニュートンの表明を見た．こうした手法を駆使し，三角関数の流率計算の公式を与えていたのだった．

10) は流率法の基本公式が次のように導かれる（一部テキストの記述を変更）．

量 x が一様に流れるとせよ．そして量 x^n の流率が見いだされなければならないとする．量 x が流れることによって $x+o$ に達する間に，量 x^n は $(x+o)^n$ に達する．すなわち無限級数の方法によって， $x^n+no+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\dots$ となる．増分 o と $nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\dots$ の比は，互いに $1:nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}+\dots$ となる．いまそうした増分が消えてゆくとせよ．するとその最後の比は， $1:nx^{n-1}$ となる．したがって量 x の流率：量 x^n の流率は， $1:nx^{n-1}$ である．

2 項定理を利用し，増分が消えた時の最後の比という発想で求められている．加えて 11) では，無限小を排除することに関して

最初の比と最後の比の方法によって，線の流率，または直線，あるいは曲線の流率は，任意の場合において面の流率，角の流率，その他の量の流率のようになると結論することができる．さらにこのように有限量の解析において定めると，生まれつつある，

または消えつつある有限量の最初の比，または最後の比を見いだすことは，古代人の幾何学にも合致している．したがって流率法では，無限に小さな図形などというものを幾何学の中に導入する必要がない．私はそれを示すことを望んでいた．むしろ有限であれ，無限小であれ，任意の図形において消えてゆく図形〔という発想〕によって同様なことが行われ，解析を完成することができる．そして無限小の代わりに不可分者の方法を用いることが習わしになっている図形においても，また注意して進んでいけばよい．

と述べている．すでにこの「曲線の求積論」が刊行された時には，ライプニッツ派との先取権論争は始まっていた．相手との差異を明確にするとともに，ニュートン独自の数学的認識論の基本が表明されているのである．

ニュートンが「曲線の求積論」を刊行する以前の1696年に，ロピタル（1661-1704）による微分算の教科書『曲線理解のための無限小解析』が出版されていた．この書は，ライプニッツ流の無限小解析（微分法）を全面的に展開した初の教科書として刊行された．ロピタルは冒頭に「要請，あるいは仮定」を二つ置く⁹⁸．その第1で，

- 無限に小さな量のみ互いに異なる二つの量の一方を，他方のものと区別なくとることができる．すなわち，（同じことだが）一方の量がそれと無限小量だけ小さい他の量へと増加，あるいは減少したときは，同じ量のままであると考えることができる，

と読者に対して要請している．また2番目は，

- 曲線は，各々が無限小である無限に多くの直線の集まりと考えることができる．すなわち，（同じことだが）各々が無限に小さい辺を無限に多く持つ多角形と考えられ，辺と辺の間にできる角によって曲線の曲がり具合が決められる．

ロピタルはパリにあって，ドイツのハノーファーにいるライプニッツと書簡をやりとし，強く影響を受けた．ライプニッツ流の記号法（量 x に対して無限小の変化を dx と表す）によって微分計算の成果を展開した．彼の議論の根本的な部分に「無限小」の概念が前提されていることはニュートンと対照的である⁹⁹．

序論に続けて，流率を表す記号としてドット記号 (\dot{x}) が導入される．また流量（逆流率）を表す記号としてダッシュ記号 (x') も導入される．そして流量と流率の関係が逆であることを記号を通じて確認する．以上の議論をもとに，ニュートンは本論「曲線の求積について」を展開する．全部で11の命題が証明されるが，前半（命題1から4）と後半（命題5から11）に内容は分かれる．

⁹⁸[L'Hospital 1696], p. 2f.

⁹⁹ただし「無限小」に関して，ライプニッツや彼の後継者たち（ロピタル，（ヤコブ，ヨハンの）ベルヌーイ兄弟，ヘルマン等）が一枚岩であったかと言えば，必ずしもそうではなかった．数学史研究においてニュートン派とライプニッツ派の無限小をめぐる数学上の表現，認識論的な差異が対比されて論じられることが多い．だが，事情はそう単純でない．[林 2000]参照．

- 命題 1 から 4：流率計算の方法と例，無限級数に対するその適用，
- 命題 5 から 11：逆流率計算にかかわる諸命題.

前半（命題 1 から命題 4）の内容は次の通りである（ x, y, z は流量を表わし，他の文字は定量を表わす）¹⁰⁰.

- 命題 1（問題 1）：任意の流量を含んだ方程式から流率を見いだすこと；

$$\text{例：} x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0 \Rightarrow 3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$$

- 命題 2（問題 2）：求積可能な曲線を見いだすこと，
- 命題 3（定理 1）：曲線によって囲まれる面積 $z^{\theta}R^{\lambda}$ ， $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \dots$ が与えられる
 \Rightarrow 縦線（曲線の縦座標）= $\{ \theta e + (\theta + \lambda\eta) \times fz^{\eta} + (\theta + 2\lambda\eta) \times gz^{2\eta} + (\theta + 3\lambda\eta) \times hz^{3\eta} + \dots \}$
 $\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$
- 命題 4（定理 2）：面積 $v = z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ の場合，ただし $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \dots$ ， $S = k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \dots$ に対して命題 3 を拡張すること.

命題 1 は，（われわれのいう）微分計算の基本公式の適用例である．ニュートンの流率論における最大の論文「級数と流率の方法について」（1670-71 年執筆）の問題 1 例 1 として，同様な例が掲げられていた¹⁰¹．ただし，「級数と流率の方法について」では，ドット記号は用いられていない．方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ に対して，

$$3m\dot{x}x - 2m\dot{x}a + a\dot{m}y - 3n\dot{y}y + a\dot{n}x = 0$$

と \dot{x} の代わりに m が， \dot{y} の代わりに n という記号で表わされていた．命題 2 は（図 18 参照），

ABC を見いだすべき図形とし， BC は直角に正しく立てられた線（*ordinatim applicata rectangula*）〔縦線〕， AB は横線とする．いま CB を E まで， $BE=1$ となるように延長し，平行四辺形 $ABED$ を作り上げることにする．すると領域 ABC ， $ABED$ の流率が， BC ， BE のようになる．したがって領域の関係を定義づける任意の方程式が定められ，命題 1 によって縦線 BC と BE の関係が与えられる．これが見いだされるべきことであった．



図18 「曲線の求積論」
命題 2 より

と述べられている．この具体例として，命題 3，4 が示されている．命題 3 は以下のように証明が論じられる¹⁰²．〔図 18 において〕横線 AB ，領域 AE ，すなわち $AB \times 1$ の代わり

¹⁰⁰[Newton H], I, pp. 339-343.

¹⁰¹[Newton MP], III, pp. 74f.

に、一般に z と書くことにし、また $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}+\dots$ の代わりに R と書くことにする。さらに曲線の領域 $ABCA$ を $z^\theta R^\lambda$ とする。

もし $z^\theta R^\lambda = v$ とするならば、(命題 1 によって) $\theta zz^{\theta-1} R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R} R^{\lambda-1} = \dot{v}$ となる。この方程式の第 1 項で R^λ の代わりに $RR^{\lambda-1}$ を、そして第 2 項で z^θ の代わりに $zz^{\theta-1}$ と書くことにせよ。すると $(\theta zR + \lambda z\dot{R}) \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = \dot{v}$ となる。だが、 $R = e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \dots$ であったので、それゆえ (命題 1 によって) $\dot{R} = \eta fzz^{n-1} + 2\eta gzz^{2n-1} + 3\eta hzz^{3n-1} + \dots$ となる。これらを代入し、かつ z の代わりに BE 、すなわち 1 と書くと、 $\{\theta e + (\theta + \lambda\eta) \times fz^n + (\theta + 2\lambda\eta) \times gz^{2n} + (\theta + 3\lambda\eta) \times hz^{3n} + \dots\} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = \dot{v} = BC$ になる。これが証明されるべきことであった。

微分演算の基本公式が多項式の各項に対して個別に運用された上で、整理されていることがわかる。

命題 5 以降は逆計算、すなわち求積問題へと進む。その内容を列挙すると以下のようになる¹⁰³。

- 命題 5 (定理 3) :

$$\text{縦線} = z^{\theta-1} R^{\lambda-1} \times (a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + \dots), \quad (16)$$

$$\text{かつ } \frac{\theta}{\eta} = r, \quad r + \lambda = s, \quad s + \lambda = t, \quad t + \lambda = v, \quad \dots \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{面積} = z^\theta R^\lambda \times \left\{ + \frac{\frac{1}{\eta} a}{re} + \frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{(r+1) \times e} z^n + \frac{\frac{1}{\eta} c - (s+1) \times fB - tgA}{(r+2) \times e} z^{2n} \right. \\ \left. - \frac{\frac{1}{\eta} d - (s+2) \times fC - (t+1) \times gB - v hA}{(r+3) \times e} z^{3n} \right. \\ \left. - \frac{\left[\frac{1}{\eta} e \right] - (s+3) \times fD - (t+2) \times gC - (v+1) \times hB [\dots A]}{(r+4) \times e} z^{4n} + \dots \right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} A = \text{第 1 項の係数 } \frac{\frac{1}{\eta} a}{re}, \quad B = \text{第 2 項の係数 } \frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{(r+1)} \\ C = \text{第 3 項の係数 } \frac{\frac{1}{\eta} c - (s+1) \times fB - tgA}{(r+2) \times e}, \quad \dots \end{aligned}$$

¹⁰² テキストの表記を便宜上現代風に改めた。() 内に記された項はテキストでは、縦に並べられ、{ } の代わりに全体に上線が記されている。

¹⁰³ [Newton H], I, pp. 344-377.

命題5は、それ以降の議論の屋台骨になる命題である。これは上記の1690年代初めに執筆した第2草稿の中に命題9・定理6として（証明抜きで）示されていた。式(16)において、 $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ の指数部分は分数や負数の場合も想定されている。実際、1番目に掲げられる例は次の通りである。

$$\text{縦線} = \frac{3k-lz^2}{z^2\sqrt{kz-lz^3+mz^4}} = z^{-5/2} \times (3k-lz^2) \times (k-lz^2+mz^3)^{-1/2}$$

このとき、式(16)で $\theta = -\frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ となる。また次の例では、

$$\text{縦線} = \frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4} = \frac{z^3(z^2+z-8)}{(z-1)^3(z+2)^2}$$

より、分母を平方化するために分母、分子に $z-1$ をかけて、

$$\text{縦線} = \frac{z^3(z^3-9z+8)}{(z^3-3z+2)^2}$$

より、やはり式(16)で $\theta=4$, $\lambda=-1$ の場合となる。命題6, 7, 8は命題5をより一般化したものである（簡略化のために一部現代的表記を用いる）。

- 命題6（定理4）： $R=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\dots$, $S=k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\dots$, $\dot{v}=z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \times (a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+\dots)$ から v を求めること。
- 命題7（定理5）： $R=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\dots$, 縦線 $=z^{\theta\pm n\eta}R^{\lambda\pm r}$ とする。加えて p, q を定数として、以下の場合に分ける；

- 場合1：

$\dot{v}_1=pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, 面積 $v_1=pA$, $\dot{v}_2=qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, 面積 $v_2=qB$, 面積 $v=z^{\theta}R^{\lambda}$ のとき,

$$\text{縦線 } \dot{v}-\dot{v}_1-\dot{v}_2 = \{(\theta e-p) + \{(\theta+\lambda\eta)f-q\}z^{\eta} + \{(\theta+2\lambda\eta)gz^{2\eta}\}\}z^{\theta-1}R^{\lambda-1},$$

$$\theta e=p, (\theta+\lambda\eta)f=q \text{ とおくと, 縦線} = (\theta+2\lambda\eta)gz^{2\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1},$$

$$\text{面積} = z^{\theta}R^{\lambda} - pA - qB = z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - (\theta+\lambda\eta)fB,$$

$$\frac{\text{面積}}{(\theta+2\lambda\eta)g} = C \text{ とする } \Rightarrow rC = \text{縦線 } rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1} \text{ の場合の面積 (} r \text{ は定数).}$$

- 場合2：

$\dot{v}_1=pz^{\theta-1}R^{\lambda}$, $v_1=pA$, $\dot{v}_2=qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$, $v_2=qB$

$\dot{v}_3=a\{\theta e + (\theta+\lambda\eta)fz^{\eta} + (\theta+2\lambda\eta)gz^{2\eta}\}z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, $v_3=az^{\theta}R^{\lambda}$,

$\dot{v}_4=b\{(\theta+\eta)ez^{\eta} + (\theta+\eta+\lambda\eta)fz^{2\eta} + (\theta+\eta+2\lambda\eta)gz^{3\eta}\}z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, $v_4=bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ のとき,

$$\text{縦線 } \dot{v} = \sum_{j=1}^4 \dot{v}_j \text{ とし, } \frac{\dot{v}}{z^{\theta-1}R^{\lambda-1}} \text{ の定数項, } z^{2\eta}, z^{3\eta} \text{ の係数を } 0 \text{ にする } \Rightarrow$$

$$p = -\theta a, \quad q = -b(\theta + \eta + 2\lambda\eta), \quad b = \frac{2ag}{f}, \quad \text{縦線} = \frac{\lambda\eta a(f^2 - 4eg)}{f} z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1},$$

$$\frac{\text{面積} \times f}{\lambda\eta a(f^2 - 4eg)} = D \text{ とする} \Rightarrow D = z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} \text{ を縦線に持つ曲線の面積.}$$

- 場合 3 : $z^\theta R^\lambda$, $z^{\theta+\eta} R^\lambda$ の面積から $z^{\theta\pm\sigma} R^{\lambda\pm\tau}$ の面積を求める (σ, τ は任意の整数).

- 場合 4 : $R = \sum_{i=0}^l a_i z^i$, $z^{\theta\pm\sigma} R^{\lambda\pm\tau}$ (σ, τ は整数) のうち i 個の面積を与えるとき, 他の面積を求めること.

• 命題 8 (定理 6) : $R = \sum_{i=0}^l a_i Z^i$, $S = \sum_{j=0}^l b_j Z^j$, $z^{\theta\pm\sigma} R^{\lambda\pm\tau} S^{\mu\pm\nu}$ (σ, τ, ν は任意の整数) のうち $(i+j)$ 個の面積を与えるとき, 他の面積を求めること.

命題 9 は, (われわれの用語で) 置換積分のための変数変換に係わる. そして置換の例が以下のように 10 個列挙される. これらは基本的な命題 5 と合わせて命題 10 で活用され, さらに命題 10 の註に添えられた積分表 1 から 4 で利用される.

• 命題 9 (定理 7) : $\dot{z} : \dot{x} = \nu : y$ ($\Leftrightarrow ydz = \nu dx$) の条件下で, $y = f(z)$, $\nu = g(x)$ の面積は等しいこと, 置換による縦線の式の変形.

- 系 1 : 二つの曲線が与えられ, 横線の流率間における関係式と流率に反比例する縦線が与えられる \Rightarrow 面積の等しい曲線が与えられる,

- 系 2 : $z^{\theta-1} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^\lambda$, かつ $\frac{\eta}{\nu} = s$, $z^s = x$ とおくと $\Rightarrow \frac{\nu}{\eta} x^{(\nu\theta-\eta)/\eta} \times (e + fx^\nu + gx^{2\nu} + \dots)^\lambda$,

- 系 3 : $z^{\theta-1} \times (a + bz^\eta + cz^{2\eta} + \dots) \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^\lambda$, かつ $\frac{\eta}{\nu} = s$, $z^s = x$ とおくと $\Rightarrow \frac{\nu}{\eta} x^{(\nu\theta-\eta)/\eta} \times (a + bx^\nu + cx^{2\nu} + \dots) \times (e + fx^\nu + gx^{2\nu} + \dots)^\lambda$,

- 系 4 : $z^{\theta-1} \times (a + bz^\eta + cz^{2\eta} + \dots) \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^\lambda \times (k + lz^\eta + mz^{2\eta} + \dots)^\mu$, かつ $\frac{\eta}{\nu} = s$, $z^s = x$ とおくと $\Rightarrow \frac{\nu}{\eta} x^{(\nu\theta-\eta)/\eta} \times (a + bx^\nu + cx^{2\nu} + \dots) \times (e + fx^\nu + gx^{2\nu} + \dots)^\lambda \times (k + lx^\nu + mx^{2\nu} + \dots)^\mu$,

- 系 5 : $z^{\theta-1} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^\lambda$, かつ $\frac{1}{z} = x$ とおくと $\Rightarrow \frac{1}{x^{\theta+1}} \times (e + fx^{-\eta} + gx^{-2\eta} + \dots)^\lambda$,

- 系 6 : $z^{\theta-1} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^\lambda \times (k + lz^\eta + mz^{2\eta} + \dots)^\mu$, かつ $\frac{1}{z} = x$ とおくと $\Rightarrow \frac{1}{x^{\theta+1}} \times (e + fx^{-\eta} + gx^{-2\eta} + \dots)^\lambda \times (k + lx^{-\eta} + mx^{-2\eta} + \dots)^\mu$,

- 系 7 : $y^\alpha \times (e + fy^\eta z^\delta + gy^{2\eta} z^{2\delta} + hy^{3\eta} z^{3\delta} + \dots) = z^\beta \times (k + ly^\eta z^\delta + my^{2\eta} z^{2\delta} + \dots)$, かつ $s = \frac{\eta - \delta}{\eta}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, $\lambda = \frac{\eta - \delta}{\alpha\delta + \beta\eta}$ とおくと $\Rightarrow \frac{1}{s} \nu^{\alpha\lambda} \times (e + f\nu^\eta + g\nu^{2\eta} + \dots)^\lambda \times (k + l\nu^\eta + m\nu^{2\eta}$

- +...)^{-λ}=x,
- 系 8 : $y^\alpha \times (e + fy^\eta z^\delta + gy^{2\eta} z^{2\delta} + hy^{3\eta} z^{3\delta} + \dots) = z^\beta \times (k + ly^\eta z^\delta + my^{2\eta} z^{2\delta} + \dots) + z^\gamma \times (p + qy^\eta z^\delta + ry^{2\eta} z^{2\delta} + \dots)$, かつ $s = \frac{\eta - \delta}{\eta}$, $x = \frac{1}{s} z^s$, $\mu = \frac{\alpha\delta + \beta\eta}{\eta - \delta}$, $\nu = \frac{\alpha\delta + \gamma\eta}{\eta - \delta}$ とおく $\Rightarrow v^{\alpha\lambda} \times (e + fy^\eta + gy^{2\eta} + \dots) = s^\mu x^\mu \times (k + lv^\eta + mv^{2\eta} + \dots) + s^\nu x^\nu \times (p + qv^\eta + rv^{2\eta} + \dots)$,
- 系 9 : $\pi z^{\theta-1} \times \{\nu e + (\nu + \eta) fz^\eta + (\nu + 2\eta) gz^{2\eta} + \dots\} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1} \times \{a + b \times (ez^\nu + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \dots)\}^\omega$, かつ $\theta = \lambda\nu$, $x = (ez^\nu + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \dots)^\pi$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, $\Theta = \frac{\lambda - \pi}{\pi}$ とおく $\Rightarrow x^\theta \times (a + bx^\sigma)^\omega$,
- 系 10 : $ez^\nu + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \dots = R$, $\nu ez^{\nu-1} + (\nu + \eta) fz^{\nu+\eta-1} + (\nu + 2\eta) gz^{\nu+2\eta-1} + \dots = r$, $k + lz^\eta + mz^{2\eta} + \dots = S$, $\eta lz^{\eta-1} + 2\eta mz^{2\eta-1} + \dots = s$. 縦線 = $(\pi Sr + \varphi Rs) \times R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \times (aS^{-\nu} + bR^r)^\omega$, かつ $\frac{\mu - \nu\omega}{\lambda} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\varphi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \Theta$, $R^\pi S^\sigma = x$ とおく $\Rightarrow x^\theta \times (a + bx^\sigma)^\omega$.

• 命題 10 (問題 3) : 上記の命題, 及び系を適用する具体例.

- 場合 1 : 縦線 = $az^{\theta-1} \Rightarrow$ 面積 = $\frac{1}{\theta} az^\theta$,
- 場合 2 : 縦線 = $az^{\theta-1} \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1} \Rightarrow \frac{a}{\eta} \times x^{(\theta-\eta)/\eta} \times (e + fx + gx^2 + \dots)^{\lambda-1}$,
- 場合 3 : 縦線 = $z^{\theta-1} \times (a + bz^\eta + cz^{2\eta} + \dots) \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1}$, 縦線を部分的に $z^{\theta-1} \times a \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1} \times bz^\eta \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1}$ 等々に分割すること,
- 場合 4 : 縦線 = $z^{\theta-1} \times (a + bz^\eta + cz^{2\eta} + \dots) \times (e + fz^\eta + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda-1} \times (k + lz^\eta + mz^{2\eta} + \dots)^{\alpha-1}$ の場合,
- 場合 5 : 縦線が異なる部分からなる場合は, 個々の部分が同じだけ項数を含んでいること.

命題 10 に引き続き, 註と曲線と求積が一覧になった表が与えられている¹⁰⁴. ここでは以下の事柄が示されている.

- 求積可能となる曲線でより単純なものに変換される曲線の表,
- 楕円と双曲線と比較可能となり, より単純なものに変換される曲線の表.

実際, 表の中で z は横線を, y は直角に立てられた縦線を, t は求積されるべき曲線の面積を表す. また d, e, f, g, h, η は十と一の符号を合わせて与えられた量を示す. 表 3 は, 一部のみ掲げる (全体で 11 の場合が掲げられているが, そのうちの場合 I から IV まで). これらは, 1670-71 年論文「方法について」中の問題 9 「任意の与えられた曲線の面積を決定すること」に付随している「曲線のカatalog」と基本的に同一である¹⁰⁵. こうした成

¹⁰⁴ *Ibid.*, p. 378f (の間).

¹⁰⁵ [Newton MP], III, pp. 236-255.

表2 「曲線の求積論」から1

		曲線の式	曲線の面積
I		$dz^{n-1}=y$	$\frac{d}{\eta}z^n=t$
II		$\frac{dz^{n-1}}{e^2+2efz^n+f^2z^{2n}}=y$	$\frac{dz^n}{\eta e^2+\eta efz^n}=t$, あるいは $\frac{-d}{\eta ef+\eta f^2z^n}=t$
III	1	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}=y$	$R=\sqrt{e+fz^n}$ とおくととき, $\frac{2d}{3\eta f}R^3=t$
	2	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{-4e+6fz^n}{15\eta f^2}dR^3=t$
	3	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{16e^2-24efz^n+30f^2z^{2n}}{105\eta f^3}dR^3=t$
	4	$dz^{4n-1}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^n-180ef^2z^{2n}+210f^3z^{3n}}{945\eta f^4}dR^3=t$
IV	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{2d}{\eta f}R=t$
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{-4e+2fz^n}{3\eta f^2}dR=t$
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{16e^2-8efz^n+6f^2z^{2n}}{15\eta f^3}dR=t$
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^n-36ef^2z^{2n}+30f^3z^{3n}}{105\eta f^4}dR=t$



図19 「曲線の求積論」より曲線の求積例 1



図20 「曲線の求積論」より曲線の求積例 2



図21 「曲線の求積論」より曲線の求積例 3



図22 「曲線の求積論」より曲線の求積例 4

表3 「曲線と求積論」から2

	曲線の式	円錐曲線		曲線の面積
		横線	縦線	
I	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$	$\frac{1}{\eta}s=t=\frac{\alpha GDB}{\eta}$, 図 19
	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{2\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$	$\frac{d}{\eta f}z^{\eta}-\frac{e}{\eta f}s=t$
	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{3\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$	$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta}-\frac{de}{\eta f^2}z^{\eta}+\frac{e^2}{\eta f^2}s=t$
II	$\frac{dz^{(1/2)\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$	$\frac{2xv \div 4s}{\eta}=t=\frac{4}{\eta}ADGa$, 図 21, 22
	$\frac{dz^{(3/2)\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$	$\frac{2d}{\eta f}z^{(1/2)\eta}+\frac{4es-2exv}{\eta f}=t$
	$\frac{dz^{(3/2)\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$	$\frac{2d}{3\eta f}z^{(3/2)\eta}-\frac{2de}{\eta f^2}z^{(1/2)\eta}+\frac{2e^2xv-4e^2s}{\eta f^2}=t$
III	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$	$\frac{4de}{\eta f} \times \left(\frac{v^3}{2ex} - s \right) = t = \frac{4de}{\eta f} \times aGDT$, あるいは $APDB \div TDB$, 図 20, 21, 22
	あるいは同様に	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{8de^2}{\eta f^2} \times \left(s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} + \frac{f^2v}{4e^2x} \right) = t = \frac{8de^2}{\eta f^2} \times aGDA$ $+ \frac{f^2v}{4e^2x}$, 図 20, 21, 22
	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$	$\frac{-2d}{\eta}s=t=\frac{2d}{\eta}APDB$, あるいは $\frac{2d}{\eta}aGDB$, 図 20, 21, 22
	あるいは同様に	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{4de}{\eta f} \times \left(s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{2e} \right) = t = \frac{4de}{\eta f} \times aGDK$, 図 21, 22
	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{-d}{\eta}s=t=\frac{d}{\eta}x-aGDB$, あるいは $BDPR$, 図 22
	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{3dfs-2dv^3}{6\eta e}=t$
IV	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$	$\frac{4d}{\eta f} \times \left(\frac{1}{2}xv \div s \right) = t = \frac{4d}{\eta f} \times PAD$, あるいは $aGDA$, 図 20, 21, 22
	あるいは同様に	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{8de}{\eta f^2} \times \left(s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} \right) = t = \frac{8de}{\eta f^2} \times aGDA$, 図 21, 22
	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$	$\frac{2d}{\eta e} \times (s-xv) = t = \frac{2d}{\eta e} \times POD$, あるいは $AODGa$, 図 20, 21, 22
	あるいは同様に	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{4d}{\eta f} \times \left(\frac{1}{2}xv \div s \right) = t = \frac{4d}{\eta f} \times aDGa$, 図 21, 22
	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{d}{\eta e} \times (3s \div 2xv) = t = \frac{d}{\eta e} \times 3aDGa \div \triangle aDB$, 図 21, 22
	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$	$\frac{10dfxv-15dfs-2dex^2v}{6\eta e^3}=t$



図23 「曲線の求積論」命題 11 より

果はニュートンにとって、すでに 30 年以上前に得られたものであったわけである。
最後の命題 11 は、次のような主張となる¹⁰⁶。

[図 23 で] もし $ADIC$ が横線 $AB=z$ 、縦線 $BD=y$ を持つ任意の曲線 [に囲まれた領域] であるとせよ。また $AEKC$ は、縦線 BE が単位に対して前の [横線、縦線よる] 面積 ADB に等しく立てられた別の曲線 [領域] とする。さらに $AFLC$ は、縦線 BF が単位に対して第 2 の面積 AEB に等しく立てられた第 3 の曲線、 $AGMC$ は、縦線 BG が単位に対して第 3 の面積 AFB に等しく立てられた第 4 の曲線、 $AHNC$ は、縦線 BH が単位に対して第 4 の面積 AGB に等しく立てられた第 5 の曲線とし、以下同様に続いていく。いま A, B, C, D, E, \dots を共通の横線が z で、 $y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, \dots$ という縦線を持つ曲線の面積とする。

任意の横線 $AC=t$ 、かつ $BC=t-z=x$ とし、 P, Q, R, S, T, \dots を共通の横線が x で、縦線 $y, xy, x^2y, x^3y, x^4y, \dots$ を持つ曲線の面積とする。

さらにこれらすべての面積：与えられた横線全体 AC という比や、また位置において与えられ、無限に延長された縦線 CI に対する比が定められるとする。

するとはじめに与えられた面積の関係は次のようになる。

$$\text{第 1 : } ADIC = A = P$$

$$\text{第 2 : } AEKC = tA - B = Q$$

$$\text{第 3 : } AFLC = \frac{t^2A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R$$

$$\text{第 4 : } AGMC = \frac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S$$

$$\text{第 5 : } AHNC = \frac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T$$

¹⁰⁶[Newton H], I, pp. 379–383.

現代的な表記を用いてこの命題の主張を再構成するならば、次のようになる。 $ADB = \int_0^z ydz$, $AEB = \int_0^z (ADB) dz = \int_0^z \int_0^z ydz^2$, $AFB = \int_0^z (AEB) dz = \int_0^z \int_0^z \int_0^z ydz^3$, ... また $ADIC = \int_0^t ydz$, $AEKC = \int_0^t (ADB) dz = \int_0^t \int_0^z ydz^2$, $AFLC = \int_0^t (AEB) dz = \int_0^t \int_0^z \int_0^z ydz^3$, ... となる。このとき、

$$\mathbf{A} = \int_0^t ydz, \quad \mathbf{B} = \int_0^t z ydz, \quad \mathbf{C} = \int_0^t z^2 ydz, \quad \dots$$

である。一方で、

$$\mathbf{P} = \int_0^t ydz = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^t x y dz = \int_0^t (t-z) y dz = t \int_0^t y dz - \int_0^t z y dz = t \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{R} = \int_0^t x^2 y dz = \int_0^t (t-z)^2 y dz = \int_0^t (t^2 - 2tz + z^2) y dz = t^2 \mathbf{A} - 2t \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad \dots$$

である。また

$$A_z = \int_0^z y dz, \quad B_z = \int_0^z z y dz$$

とおく。すると、同様に

$$ADIC = \mathbf{A} = \mathbf{P}$$

が成り立つが、さらに部分積分することによって、

$$AEKC = \int_0^t \int_0^z y dz^2 = \int_0^t A_z dz = [z A_z]_0^t - \int_0^t z y dz = t \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned} AFLC &= \int_0^t \int_0^z \int_0^z y dz^3 = \int_0^t (z A_z - B_z) dz = \left[\frac{1}{2} z^2 A_z - z B_z \right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{1}{2} z^2 y - z^2 y \right) dz \\ &= \left[\frac{1}{2} (z^2 A_z - 2z B_z) \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t (z^2 y) dz = \frac{1}{2} (t^2 \mathbf{A} - 2t \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mathbf{R} \end{aligned}$$

等々を得ることもできる。

さらに最後にもう一つ註が¹⁰⁷付されている。ここでは次のことが述べられている¹⁰⁷。

z^n を流れる量とし、それが流れることによって $(z+o)^n$ が生じるとする。さらに収束する級数 $z^n + \eta o z^{n-1} + \frac{\eta^2 - \eta}{2} o^2 z^{n-2} + \frac{\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta}{6} o^3 z^{n-3} + \dots$ へと展開されるならば、

¹⁰⁷ Ibid., p. 384.

この級数の第1項 z^n は、先の流れる量になり、第2項 ηoz^{n-1} は、その第1項の増加分、すなわち第1差分であり、その生まれつつある量に1次流率が比例する。第3項 $\frac{\eta^2 - \eta}{2} o^2 z^{n-2}$ は、第2項の増加分、すなわち第2差分であり、その生まれつつある量に2次流率が比例する。第4項 $\frac{\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta}{6} o^3 z^{n-3}$ は、第3項の増加分、すなわち第3差分であり、その生まれつつある量に3次流率が比例する。以下同様に無限に続く。

一般的にまとめるならば、

$$(z+o)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\eta}{i} o^i z^{n-i} \text{ とすると、第}(i+1)\text{項は第}i\text{項の増加分} \\ = \text{生まれつつある量に比例する差分}$$

とニュートンは主張する。ただし、この箇所の記述には注意を要する。実際、

$$\text{第1項の増加分} = (z+o)^n - z^n = \eta oz^{n-1} + \text{高次項。よって1次流率} = \eta z^{n-1},$$

また、

$$\text{第2項の増加分} = \eta o(z+o)^{n-1} - \eta oz^{n-1} = (\eta^2 - \eta) o^2 z^{n-2} + \text{高次項。} \\ \text{よって2次流率} = \eta(\eta - 1) z^{n-2}$$

さらに、

$$\text{第3項の増加分} = \frac{\eta^2 - \eta}{2} o^2 (z+o)^{n-2} - \frac{\eta^2 - \eta}{2} o^2 z^{n-2}, = \frac{\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta}{2} o^3 z^{n-3} + \text{高次項。} \\ \text{よって3次流率} = \frac{\eta(\eta - 1)(\eta - 2) z^{n-3}}{2}$$

となる。以上からわかるように第 i 項の増加分 = 第 $(i+1)$ 項とは必ずしもなっていない。また第 $(i+1)$ 項が i 次流率に比例するとしても、その比例定数は異なる。この命題 11 は、第1草稿、第2草稿には含まれてない。第3草稿の段階で命題 11・定理 8 として登場する。ただ第3草稿とは別に、第1、第2草稿の部分改良も残されており、類似した結果をニュートンは示していた¹⁰⁸。

「曲線の求積論」と流率論の展開について

ニュートンは 1690 年代初め、彼自身の数学的成果を公表しようと思いついたとき、流率論が達した最も高い成果を示したいと考えただろう。いわゆる「3 主要論文」に盛られ

¹⁰⁸[Newton MP], VII, pp. 164-169.

た内容の一部は、この論文の中にそのまま反映している。またその後、1690年以降に発展させた内容も盛られている。一方で、ニュートンが流率論に関していろいろと行ってきた試行錯誤の諸々の事柄は、入り込む余地がなかったとも言える。1680年頃には純幾何学的な記述スタイルによる流率論の再構成に、ニュートンは一定のエネルギーを注いだはずである。第2草稿には、まだその残滓が見られる。われわれは1680年代の力学研究に活用の場面を見いだしたことで、そうした流率論を古典的な数学構造の中に収める取り組みは一段落したのではないかと推定した。特に無限級数の手法は、古典的な比例論の枠では展開すべくもなかった。

「曲線の求積論」は、ニュートンが作り上げた流率論を整理した形で示している。そもそも自身の数学的成果の先取権を主張する意図が執筆の動機にあったことは本解説の冒頭でも述べた。もちろんすべてが読者たちに容易に理解されたわけでない。1745年、ジョン・スチュアートは、この「曲線の求積法」英訳を出版する際に、詳細な注釈を付けた¹⁰⁹。やはりニュートンの論考の理解を補助するために詳細な説明を求める需要はあったと考えられる。この「曲線の流率論」は、ニュートンが若き日に作り上げ、公にされなかった成果を満を持して発表した「完成された」著作である。後続の研究者たちからは歓迎されただろう。だが、それに沿って発展させる余地を多く残していなかったようにも見える。皮肉なことである。18世紀初頭のイギリスの数学者たちは、この「曲線の求積法」に典型的な姿を見せるニュートンの流率論は、いわば「つけ入るすきのない」ものと考えていたふしがある。むしろ同じ『光学』の付録に収められた「3次曲線の枚挙」の方に数学的関心を寄せたのだった¹¹⁰。

(未完。以下は続編)

4 『プリンキピア』(1687年初版刊行)をめぐって

4.1 『プリンキピア』と流率法

4.2 『プリンキピア』の諸命題を読む

5 代数学研究、幾何学研究

5.1 『普遍算術』(1707年)

5.2 「3次曲線の枚挙」(1704年)

¹⁰⁹[Stewart 1745]参照。

¹¹⁰グイッチャルディーニは、ニュートンの流率論に対するコメントの代表的な例としてマクローリンの発言に言及している。[Guicciardini 1989], p. 28. また「3次曲線の枚挙」の内容分析、または18世紀における解釈の例については、[Guicciardini 2009]第Ⅱ部第6章参照。

文 献

1 次文献 (翻訳も含む)

- [Barrow 1670] Barrow, Isaac, *Lectiones geometricae* (1670₁) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1976) (1674 年版の rep.).
- [Descartes 1996] *Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (1897–1913₁) (Paris: J. Vrin, 1996).
- [Gregory 1939] *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, edited by Herbert Western Turnbull (London: G. Bell & Sons Ltd, 1939).
- [Leibniz A] *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften (Berlin: Akademie Verlag, 1923–).
- [Leibniz GM] *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1849–1863₁) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).
- [Leibniz GP] *Gottfried Wilhelm Leibniz Die philosophische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1875–1890₁) (Hildesheim, Zurich, New York: Georg Olms Verlag, 1996) (rep.).
- [Leibniz QA] *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch (Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1993).
- [L'Hospital 1696] L'Hospital, Guillaume F. A. de, *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris, 1696).
- [Mercator 1668] Mercator, Nicolaus, *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova* (1668₁) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1975) (rep.).
- [Newton 1704] Newton, Isaac, *Opticks: or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures* (1704₁) (Bruxelles: Culuture et Civilisation, 1966) (rep.).
- [Newton C] *The Correspondence of Isaac Newton*, edited by H. W. Turnbull *et al.*, vol. I – VII (Cambridge: Cambridge University Press, 1959–1977).
- [Newton H] *Isaaci Newtoni opera quae exstant omnia*, commentariis illustrabat Samuel Horsley, vol. I – V (Londini, 1779–1785₁) (Stuttgart- Bad Canstatt: Friedrich Frommann Verlag, 1964) (rep.).
- [Newton MP] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, edited by D. T. Whiteside, vol. I – VIII (Cambridge: Cambridge University Press, 1967–81).
- [Newton Principia] Newton, Isaac, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (3rd ed., 1726), assembled and edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen (Cambridge: Harvard University Press, 1972).
- [Newton UP] *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton: A Selection from the Portsmouth*

- Collection in the University Library, Cambridge*, edited by A. Rupert Hall and Marie Boas Hall (Cambridge: Cambridge University Press, 1962).
- [Stewart 1745] Stewart, John, *Sir Isaac Newton's Two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equations of an Infinite Number of Terms, Explained* (1745₁) (LaVergne: Kessinger Publishing, 2009) (rep.).
- [Taylor 1715] Taylor, Brook, *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londini 1715₁, 1717₂).
- [Viète 1646] François Viète *Opera mathematica*, edited by Frans van Schooten (Leiden, 1646₁) (Hildesheim etc.: Georg Olms Verlag, 2001) (rep.).
- [Wallis 1693–1699] John Wallis *Opera mathematica*, vol. 1–3 (Oxford, 1693–1699₁) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag 1972) (rep.).
- [Wallis 2004] Stedall, Jacqueline A., *The Arithmetic of Infinitesimal: John Wallis 1656* (New York etc.: Springer-Verlag, 2004).
- [デカルト 2001] 『デカルト著作集』1 『幾何学』他 原亨吉 他訳 (1973年₁) (白水社, 2001年) (増補復刊).
- [ニュートン 1972] 河辺六男編訳 『ニュートン』(中公バックス世界の名著 31) (中央公論社, 1979年).
- [ライプニッツ 1989] 『ライプニッツ著作集』9 『後期哲学』西谷祐作・米山優・佐々木能章訳 (工作舎, 1989年).
- [ライプニッツ 1997] 『ライプニッツ著作集』2 『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳 (工作舎, 1997年).
- [ライプニッツ 1999] 『ライプニッツ著作集』3 『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長島秀男訳 (工作舎, 1997年).
- [ユークリッド 2008] 斎藤憲・三浦伸夫訳・解説 『エウクレイデス全集』第1巻: 原論 I–VI (東京大学出版会, 2008年).

2 次文献

- [Andersen 1985] Andersen, kirsti, “Cavalieri’s Method of Indivisibles,” *Archive for History of Exact Sciences*, **31** (1985), pp. 291–367.
- [Cajori 1928–29] Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations* (1928–1929₁) (Dover, 1993) (rep.).
- [Cohen and Smith 2002] *The Cambridge Companion to Newton*, edited by I. Bernard Cohen and George E. Smith (Cambridge: Cambridge University Press, 2002).
- [Feingold 1990] *Before Newton: The Life and Times of Isaac Barrow*, eduted by Mordechai Feingold (Cambridge, New York etc.: Cambridge University Press, 1990).
- [Gjertsen 1986] Gjertsen, Derek, *The Newton Handbook* (London, New York: Routledge and Kegan Paul, 1986).

- [González- Velasco 2007] González- Velasco, Enrique A., “James Gregory’s Calculus in the *Geometriae Pars Universalis*,” *American Mathematical Monthly*, **114** (2007), pp. 565–576.
- [Guicciardini 1989] Guicciardini, Niccolò, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700–1800* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1989).
- [Guicciardini 2009] Guicciardini, Niccolò, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method* (Cambridge, London: The MIT Press, 2009).
- [Hall 1980] Hall, Rupert A., *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz* (Cambridge: Cambridge University Press, 1980).
- [Hall 2002] Hall, Marie Boas, *Henry Oldenburg: Shaping the Royal Society* (Oxford: Oxford University Press, 2002).
- [Mahoney 1990] Mahoney, Michael Sean, “Barrow’s Mathematics: Between Ancients and Moderns,” in [Feingold 1990], pp. 179–249.
- [Mahoney 1994] Mahoney, Michael Sean, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665* (2nd edition) (Princeton: Princeton University Press, 1994).
- [Malet 1993] Malet, Antoni, “James Gregorie on Tangents and the “Taylor” Rule for Series Expansions, *Archive for History of Exact Sciences*, **46** (1993), pp. 97–137.
- [Panza 2003] Panza, Marco, *Newton* (Paris: Les Belles Lettres, 2003).
- [Panza 2005] Panza, Marco, *Newton et les origines de l’analyse: 1664–1666* (Paris: Albert Blanchard, 2005).
- [Shapin 1981] Shapin, Stephen, “Of Gods and Kings: Natural Philosophy and Politics in the Leibniz- Clarke Disputes,” *Isis*, **72** (1981), pp. 187–215.
- [Stedall 2002] Stedall, Jacqueline A., *A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685* (Oxford etc.: Oxford University Press, 2002).
- [Vailati 1997] Vailati, Ezio, *Leibniz and Clarke: A Study of Their Correspondence* (New York, Oxford: Oxford University Press, 1997).
- [Westfall 1980] Westfall, Richard S., *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1980).
- [ウェストフォール 1993] ウェストフォール, リチャード S. 『アイザック・ニュートン』 I, II, 田中一郎・大谷隆昶訳 (平凡社, 1993年).
- [金子 2005] 金子務 『オルデンバーク：十七世紀科学・情報革命の演出者』 (中央公論新社, 2005年).
- [杉浦 1980] 杉浦光夫 『解析入門』 I (東京大学出版会, 1980年).
- [高橋 2003] 高橋秀裕 『ニュートン：流率法の変容』 (東京大学出版会, 2003年).
- [ドップズ 2000] ドップズ, B・J・T 『錬金術師ニュートン』 大谷隆昶訳 (みすず書房, 2000年).
- [中村 1980] 中村幸四郎 『近世数学の歴史：微積分の形成をめぐって』 (日本評論社,

1980).

- [林 2000] 林知宏「17-18世紀における無限小をめぐる論争：ライプニッツを中心に」, 『数学の思考』(『現代思想』2000年10月臨時増刊号)(青土社, 2000年)所収, 176-195頁.
- [林 2003] 林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』(東京大学出版会, 2003年).
- [林 2008] 林知宏「数学史講義(第2回): ユークリッド『原論』, 論証学問の成立」, 『学習院高等科紀要』6(2008年), 23-52頁.
- [林 2009a] 林知宏「アイザック・ニュートンの1680(?)年草稿「曲線の幾何学」について」, 『京都大学数理解析研究所講究録』1625(2009年), 45-55頁.
- [林 2009b] 林知宏「数学史講義(第3回): パリ時代(1672-1676)のライプニッツ」, 『学習院高等科紀要』7(2009年), 31-73頁.
- [林 2009c] 林知宏「ライプニッツの数学: 方程式論と代数的思考様式」, 酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』(世界思想社, 2009年)所収, 37-56頁.
- [林 2010] 林知宏「数学史講義(第4回): アルキメデスの求積法」, 『学習院高等科紀要』8(2010年), 11-33頁.
- [林 2011] 林知宏「数学史講義(第5回): 17世紀における記号代数と方程式論」, 『学習院高等科紀要』9(2011年), 11-38頁.
- [原 1975] 原亨吉「近世の数学: 無限概念をめぐって」, 伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』(筑摩書房, 1975年)所収, 119-372頁.
- [原 1987-89] 原亨吉「ニュートンとライプニッツ: 微積分法をめぐって」, 『数学セミナー』(日本評論社), 1987年12月号-1989年3月号連載.
- [マホーニイ 2007] マホーニイ, マイケル・S, 『歴史の中の数学』佐々木力編訳(ちくま学芸文庫, 2007年).