微分加群の性質と
関数体上の超越性および代数的独立性（後）

鈴木佑一

概　　要

体とは四則演算について閉じている代数系であるが，さらに微分についても閉じている代数系として，微分体というものが考えられる．この概念は，微分方程式を満たす関数の超越性および代数的独立性を示すのに大いに寄与する．微分体の理論から得られる主張として，例えば次の 2 つが挙げられる．1 つは，紀要第 20 号（以下，前号（[関数体上の超越性および代数的独立性（前）]）にて記した，超越数論の未解決問題「Schanuel 予想」の有理関数体上における類似の結果「Ax の定理」である．もう 1 つは，与えられた関数の不定積分が初等関数で表されるための条件を定式化した「Liouville の定理」である．関数 e^{t^2} の“不定積分ができない”というのはよく知られた事実であるが，これは Liouville の定理の系である「Liouville 判定法」によって証明される．本稿では，後者を主定理とし，その証明や活用の概略，関連事項等を記す．なお，前号の内容と重複するが，証明に必要な事項の一部を再掲している．

1　Liouville の定理

高校数学における有名な事実として，関数 e^{t^2} は“不定積分ができない”ということが広く知られているが，それは原始関数が存在しないという意味ではなく，この関数の原始関数が初等関数によって表せないという意味である．まずは，この初等関数について定義する．

なお，基本的な言葉の定義などは前号を参照のこと．

定義 1.1　(E, D) を微分体，(F, D) をその有限生成微分拡大体とする．F/E が初等拡大であるとは，定数体 C_F と C_E が一致し，それが代数閉体であって，また，F/E の生成元 $t_1, \cdots, t_k \in F$ が存在し，各 $t_1, \cdots, t_k \in F$ に対して，以下のいずれかが成り立つことである．

(1) t_i が $\mathrm{E}(t_1, \cdots, t_{i-1})$ 上代数的である．

(2) $D(t_i) = D(u_i)/u_i$ をみたす $u_i \in E(t_1, \cdots, t_{i-1})$ が存在する．

(3) $D(t_i)/t_i = D(u_i)$ をみたす $u_i \in E(t_1, \cdots, t_{i-1})$ が存在する．

定義 1.2　初等拡大 $F/\mathbb{C}(t)$ について，F の元を初等関数という．ただし，$\mathbb{C}(t)$ は有理関数体である．

ある関数の原始関数を初等関数によって表すことができるということは，すなわち，原始関数が初等拡大の中に存在するということである．これが微分体を用いた定式化である．このことを踏まえ，主定理を以下に述べる．これは，関数 f の原始関数が初等関数で表せるための必要条件を与えているといえる．証明は 2 節にて行う．

定理 1.3（Liouville の定理）（E, D）を標数 0 の微分体，その定数体を C_E とする．F/E を初等拡大とする．$f \in E$ が v_0，・・・，$v_m \in F$ と a_1，・・・，$a_m \in C_E$ によって，

$$f = D(v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{D(v_i)}{v_i}$$

と表せることは，w_0，・・・，$w_m \in E$ と b_1，・・・，$b_m \in C_E$ が存在して，

$$f = D(w_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{D(w_i)}{w_i}$$

をみたすことと同値である．

この結果から，次のような判定法を考えることができる（Churchill［2］）．

系 1.4（Liouville 判定法）（E', D）を標数 0 の微分体，その定数体を $C_{E'}$ とする．また，$g \in E'$，$E = E'(e^g)$ とする．このとき，E/E' は定義 1.1 の（3）をみたす初等拡大となっている．ここで，e^g は E' 上超越的とする．さらに，F/E を初等拡大であるとする．$f \in E'$ に対して，fe^g が v_0，・・・，$v_m \in F$ と a_1，・・・，$a_m \in C_{E'}$ によって，

$$fe^g = D(v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{D(v_i)}{v_i}$$

と表せることは，$h \in E'$ が存在して，

$$f = D(h) + hD(g)$$

をみたすことと同値である．

例 1.5（e^{t^2} の原始関数が初等関数で表せないこと）

Liouville 判定法において，E' を有理関数体 $\mathbb{C}(t)$，$D = d/dt$ とする．また，$f = 1$，$g = t_2$（f，$g \in C(t)$）とおく．このとき，$D(g) = 2t$ であるから，e^{t^2} の原始関数が初等関数で表せることは，$h \in C(t)$ が存在して，

$$1 = D(h) + 2ht$$

をみたすことと同値である．p，$q \in \mathbb{C}[t]$（ただし p と q は互いに素）として，

$$h = \frac{p}{q}$$

とおく．これと，$D(h) = \{qD(p) - pD(q)\}/q^2$ を代入して整理すると，

$$q - D(p) - 2pt = -\frac{pD(q)}{q}$$

を得る．したがって，$pD(q)$ は q で割り切れることになるが，p と q は互いに素より，$D(q)$ が q で割り切れることになる．次数を考えると，$D(q) = 0$，すなわち，q は定数多項式となるから，$h \in \mathbb{C}[t]$ である．ここで，$1 = D(h) + 2ht$ の左辺は 0 次であるから，$h = 0$ でなければならないが，このとき，$1 = 0$ となり矛盾する．以上より，e^{t^2} の原始関数が初等関数で表せないことが示される． □

このように，Liouville 判定法は，$f(x)e^{g(x)}$ の原始関数が初等関数で表せるかどうかを判定するのに対し，$f(x) \log x$ の原始関数が初等関数で表せるかどうかを判定する，Liouville-Hardy の判定法というものもある．これらを含め，一連の考え方は，関数の不定積分を行うアルゴリズムである Risch Algorithm に結びつく．指数関数や対数関数を含む不定積分を，微分代数の問題に帰着させることが，着想の根幹にあるといえよう．

2 主定理の証明

この節では，1 節で述べた Liouville の定理の証明を行う．このために，微分加群の定義，およびその性質を，いくつか再掲する．これらの証明は，前号を参照のこと．

以下，C を標数 0 の体とし，F/C を体の有限生成拡大とする．

定義 2.1 F 上の線形空間 V について，V から F への線形写像全体のなす線形空間を V の双対空間という．特に，F 上の線形空間 $Der(F/C)$ の双対空間を $\Omega_{F/C}$ と表し，F の C 上の微分加群という．

さて，E を F/C の中間体とする．このとき，自然な単射として，

$$f_{E/C} : Der(F/E) \to Der(F/C)$$

を考えることができる．F の E 上の微分は，F の C 上の微分と考えられるからである．また，この写像の双対をとると，自然な全射として，

$$\phi_{E/C} : \Omega_{F/C} \to \Omega_{F/E}$$

を得る．簡単のため，$\phi = \phi_{E/C}$，$f = f_{E/C}$ と略記する . 加えて，

$$d_{F/C} : F \to \Omega_{F/C}$$

を，$x \in F$，$D \in Der(F/C)$ に対して，

$$d_{F/C}(x)(D) = D(x)$$

と定義する．なお，これらも，$d_1 = d_{F/C}$，$d_2 = d_{F/E}$ と略記する．

命題 2.2　$d_1 \in Der_C(F, \Omega_{F/C})$ である．

命題 2.3　$\phi d_1 = d_2$ である．

命題 2.4　F/C の超越基底を x_1，$\cdots\cdots$，x_m とする．このとき，$x \in F$ に対して，

$$d_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x}{\partial x_i} d_1(x_i)$$

が成り立つ．

命題 2.5　a_1，$\cdots\cdots$，$a_m \in C$ を $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立とする．x, y_1，$\cdots\cdots$，$y_m \in F$ が，

$$d_1(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{d_1(y_i)}{y_i} = 0$$

をみたすならば，

$$d_1(x) = d_1(y_1) = \cdots = d_1(y_m) = 0$$

である．

定義 2.6　$D_1 \in Der(F/C)$ は $D_1(E) \subset E$ をみたすとする．また，$D_2 \in Der(F/E)$，$\omega \in \Omega_{F/E}$ とする．ここで，$[D_1, D_2]$ を，

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

と定義し，また，$D^1\omega$ を，

$$D^1\omega(D_2) = D_1(\omega(D_2)) - \omega[D_1, D_2]$$

と定義する．ここで，微分の定義より，$[D_1, D_2] \in Der(F/E)$，$D^1\omega \in \Omega_{F/E}$ である．

命題 2.7　定義 2.6 の仮定のもとで，$x \in F$ に対して，

(1) $D^1(x\omega) = D_1(x)\omega + xD^1\omega$
(2) $D^1 d_2(x) = d_2(D_1(x))$

が成り立つ．

命題 2.8　定義 2.6 の仮定のもとで，$x, y \in F$ を C 上代数的従属であるとする．このとき，

$$D^1(xd_2(y)) = d_2(xD_1(y))$$

が成り立つ．

命題 2.9　(F, D) を微分体とし，$E = C = C_F$ とする．$\omega_1, \cdots\cdots, \omega_m \in \Omega_{F/C}$ が F 上 1 次従属で，$1 \leq i \leq m$ に対して，$D^1\omega_i = 0$ をみたすならば，$\omega_1, \cdots\cdots, \omega_m$ は C 上 1 次従属である．

以上を踏まえて，以下，主定理を示す．

定理 3.3 の証明　F/E の生成元の個数が 1 つの場合を示せば，帰納的に生成元を増やせるので十分．初等拡大の 3 つの条件で場合分けする．まず，生成元が E 上代数的である場合を考える．E は標数 0 より，F/E は分離拡大であり，必要ならその正規閉包をとることにより，これをガロア拡大と考えてよい．このとき，$\sigma \in \mathrm{Aut}(F/E)$ に対して，$\sigma^{-1}D\sigma = D$ が成り立つ．仮定の式の両辺にトレースをとると，

$$Tr_{F/E}(f) = \sum_{k=1}^{[F:E]} \sigma_k(f) = f[F:E] = D(Tr_{F/E}(v_0)) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{D(N_{F/E}(v_i))}{N_{F/E}(v_i)}$$

を得る．ただし，Tr がトレース，N がノルムである．$Tr_{F/E}(v_0), N_{F/E}(v_1), \cdots, N_{F/E}(v_m) \in E$ であるから，これは主張をみたしている． 続いて，t が E 上超越的で $F = E(t)$ であって，$u \in E$ が存在し，$D(t) = D(u)/u$ が成り立つ場合を考える．$a_1, \cdots, a_r$ が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるとすると，a_i $(r+1 \leq i \leq m)$ は $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合でかける．このとき，係数の分母を払うことで，

$$p a_i = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} a_j (p \in \mathbb{N},\ p_{ij} \in \mathbb{Z})$$

と表せる．これを仮定の式に代入すると，

$$f = D(v_0) + \sum_{j=1}^{r} a_j \frac{D(v_j)}{v_j} + \sum_{i=r+1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{p_{ij} a_j}{p} \frac{D(v_i)}{v_i} \right)$$

となる．右辺を整理し，

$$f = D(v_0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{p} \left(p \frac{D(v_j)}{v_j} + \sum_{i=r+1}^{m} p_{ij} \frac{D(v_i)}{v_i} \right)$$

を得る．ここで，$\tilde{v}_j = v_j^p \prod_{i=r+1}^{m} v_i^{p_{ij}}$ とおくと，上式は，

$$f = D(v_0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{p} \frac{D(\tilde{v}_j)}{\tilde{v}_j}$$

と表せる．すなわち，a_1，・・・，a_m をはじめから $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立としても一般性を失わない．仮定の式に，$d_2 \in Der_E(F, \Omega_{F/E})$ を作用させると，

$$d_2(f) = d_2 \left(D(v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{D(v_i)}{v_i} \right)$$

であり，この右辺に命題 2.8 を適用すれば，

$$D^1 \left(d_2(v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d_2(v_i)}{v_i} \right) = 0$$

を得る．さて，$u \in E$ のとき，$D(u)/u \in E$ である．よって，命題 2.7(2) より，

$$D^1 d_2(t) = d_2(D(t)) = d_2 \left(\frac{D(u)}{u} \right) = 0$$

である．ここで，$b \in F$ に対して，

$$d_2(v_0) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d_2(v_i)}{v_i} = b d_2(t) \quad (*)$$

とおく．このとき $D^1 d_2(t) = 0$ と命題 2.7(1) より，

$$0 = D^1(b d_2(\mathrm{t})) = D(b) d_2(t) + b D^1 d_2(t) = D(b) d_2(t)$$

となるから，$b \in C$ を得る．（＊）の右辺を移項して，

$$d_2(v_0 - bt) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d_2(v_i)}{v_i} = 0$$

となる．ここで，$v_0 - bt$，v_1，・・・，$v_m \in F$ で a_1，・・・，a_m が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であることから，命題 2.5 が適用できて，

$$d_2(v_0 - bt) = d_2(v_1) = \cdots = d_2(v_m) = 0$$

である．よって，$v_0 - bt$，v_1，・・・，$v_m \in E$ を得る．$\omega_0 = v_0 - bt$ とおくと，$v_0 = \omega_0 + bt$ で

あるから，

$$D(v_0)=D(\omega_0+bt)=D(\omega_0)+D(bt)=D(\omega_0)+bD(t)=D(\omega_0)+b\frac{D(u)}{u}$$

となる．これを踏まえ，

$$f=D(v_0)+\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{D(v_i)}{v_i}=D(\omega_0)+b\frac{D(u)}{u}+\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{D(v_i)}{v_i}$$

を得る．これは，$b=a_{m+1}, u=v_{m+1}$ とおけば，

$$f=D(\omega_0)+\sum_{i=1}^{m+1} a_i\frac{D(v_i)}{v_i}$$

とでき，主張をみたしている．

最後に，t が E 上超越的で，$F=E(t)$ であって，$u\in E$ が存在し，$D(t)/t=D(u)$ が成り立つ場合を考える．先と同様に, $a_1,\cdots,a_m$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるとしてよい．命題 2.7(2) より，

$$D^1\left(\frac{d_2(t)}{t}\right)=d_2\left(\frac{D(t)}{t}\right)=d_2(D(u))=0$$

である．ここで，$b\in F$ に対して，

$$d_2(v_0)+\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{d_2(v_i)}{v_i}=b\frac{d_2(t)}{t}\qquad (**)$$

とおくと，先ほどと同様にして，$b\in C$ を得る．もし，a_1，$\cdots$，a_m，b が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立とすると，命題 2.5 より，$d_2(t)=0$ で $t\in E$ となるが，これは，t が E 上超越的であることに矛盾するから，a_1，$\cdots$，a_m，b は $\mathbb{Q}$ 上 1 次従属である．すなわち，b は $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合でかける．このとき，係数の分母を払うことで，

$$pb=\sum_{i=1}^{m} p_i a_i\,(p\in\mathbb{N},\ p_i\in\mathbb{Z})$$

と表せる．$(**)$ の両辺を p 倍して，

$$pd_2(v_0)+\sum_{i=1}^{m} pa_i\frac{d_2(v_i)}{v_i}=pb\frac{d_2(t)}{t}$$

となる．ここに代入して，

$$pd_2(v_0)+\sum_{i=1}^{m} pa_i\frac{d_2(v_i)}{v_i}=\sum_{i=1}^{m} p_i a_i\frac{d_2(t)}{t}$$

である．これを整理して，

$$pd_2(v_0)+\sum_{i=1}^{m}a_i\left(p\frac{d_2(v_i)}{v_i}-p_i\frac{d_2(t)}{t}\right)=0$$

を得る．ここで，$\omega_i=v_i^{p}t^{-p_i}$ とおくと，上式は，

$$pd_2(v_0)+\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{d_2(\omega_i)}{\omega_i}=0$$

となる．ここでも命題 2.5 を適用すれば，

$$d_2(v_0)=d_2(\omega_1)=\cdots=d_2(\omega_m)=0$$

である．よって，v_0，ω_1，・・・，$\omega_m\in E$ となる．

$$p\frac{D(v_i)}{v_i}=\frac{D(\omega_i)}{\omega_i}+p_iD(u)$$

より，

$$\begin{aligned}
f=D(v_0)+\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{D(v_i)}{v_i}&=D(v_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{p}\left(\frac{D(\omega_i)}{\omega_i}+p_iD(u)\right)\\
&=D(v_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{p}\frac{D(\omega_i)}{\omega_i}+bD(u)\\
&=D(v_0+bu)+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{p}\frac{D(\omega_i)}{\omega_i}
\end{aligned}$$

を得る．$\omega_0=v_0+bu$ とみれば，これは主張をみたしている． □

参考文献

［1］ 西岡久美子，微分体の理論，共立出版，2010.

［2］ R. C. Churchill, Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions, Hunter College and the Graduate Center, 2006.

［3］ M. Van Der Put, Galois Theory of Differential Equations, Algebraic Groups and Lie Algebras, J. Symbolic Computation（1999）28, 441-473.