

# A short survey of affine deformations

Ryosuke Yamazaki

Abstract. Let  $\Sigma$  be a surface of finite type with complete hyperbolic structure, and  $G := \pi_1(\Sigma)$ . An *affine deformation* is a faithful representation into the affine isometry group  $\text{AffIsom}(\mathbf{E}_1^3)$  whose restriction to the linear part is a holonomy representation, that is, its image is a pair of a torsion-free discrete subgroup  $\Gamma$  of  $O^0(2, 1) \cong PGL(2, \mathbb{R})$  and *cocycle*  $u : G \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ .  $G$  canonically acts Minkowski space-time  $\mathbf{E}_1^3$  through a affine deformation. In this theory, we are most interested in properly discontinuous actions. A translational conjugacy class of cocycle is identified with an element in the cohomology group  $H^1(G, \mathbb{R}_1^3)$ . Margulis [8] characterized the space of proper cocycles by introducing the *Margulis invariant*.

## 1. Introduction

種数  $g$  で  $b$  個の境界成分をもつ曲面  $\Sigma = \Sigma_{g,b}$  ( $2g-2+b > 0$ ) を双曲計量と合わせて固定したとき, 基本群  $\pi_1(\Sigma)$  は (Fuchs 群を像にもつ)  $SO(2, 1)$  への自然な holonomy 表現と平行移動の合成により, Minkowski 空間  $\mathbf{E}_1^3$  へ作用する. この作用がいつ真性不連続になるかという自然な問いが生じるが, Margulis [8] は, affine Lorentz 変換の固定直線方向の移動を評価する不変量 (Margulis 不変量) を導入し, 曲面群が真性不連続に作用するための必要条件を記述した. さらに, Charette-Drumm-Goldman [1] により, 3 点穴空き球面群  $G = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 g_2 g_3 = 1 \rangle$  の場合は, 境界に対応する生成元  $g_1, g_2, g_3$  の Margulis 不変量が全て同符号であることと affine 作用の真性不連続性の同値が示された. 増田高行氏は, [9] において真性不連続性の崩壊を Margulis 不変量を用いて観察し, 学位論文 [10, 12] において affine twist cocycle とよばれる新たな不変量を導入した. それにより, Wolpert の余弦公式 [16] と類似する公式が得られることが示された. 本稿では, 曲面群の affine 変形とその Minkowski 空間への作用についてサーベイを行い, それらの結果の応用を考える.

## 2. Preliminaries

**2.1 Minkowski space.** はじめに, Minkowski 空間の幾何と, 双曲空間の双曲面モデルについて簡単に復習する. 詳細は [14, 15] 等の双曲幾何の標準的な教科書を参照せよ.  $\mathbb{R}^n$  上に符号  $(n-1, 1)$  の非退化 2 次形式  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$  を入れた空間  $\mathbf{E}_1^n$  を  $n$  次元 Minkowski 空間といい,  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を Lorentz 内積という<sup>1</sup>. 通常の内積と同様に,  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  のとき  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_1^n$  は Lorentz 直交しているといい,  $V^L$  で部分空間  $V \subset \mathbf{E}_1^n$  の Lorentz

<sup>1</sup> 正定値ではないので厳密には内積ではないが, 後述の通り, 双曲面モデルに制限すると正定値となる.

直交補空間を表す. さらに, Lorentz 外積  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} := J(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$  が自然に定義される. (ただし,  $J = \text{diag}(1, 1, \dots, -1)$ ,  $\times$  は Euclid 外積である)  $B(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ , すなわち  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  が  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  とそれぞれ Lorentz 直交することは, 直接計算により直ちに従う. 同様の直接計算により, 以下の各主張が得られる.

**Proposition 2.1.** (cf.[14]).  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{E}_1^n$  とせよ. このとき, 次が成り立つ.

- (2)  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = -\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$
- (3)  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
- (4)  $B(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{w}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{w})B(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - B(\mathbf{x}, \mathbf{z})B(\mathbf{y}, \mathbf{w})$
- (5)  $\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = -B(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} + B(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}$

**Definition 2.1.**  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_1^n$  について,

- (1) *time-like* であるとは,  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$  となることをいう.
- (2) *space-like* であるとは,  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$  となることをいう.
- (3) *null-like* であるとは,  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  となることをいう.

さらに  $\mathbf{x}$  が positive であるとは,  $x_n > 0$  であることをいう.

**Lemma 2.2.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}_1^n$  がともに positive (または negative) かつ non-space-like であるとせよ.

- (1)  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$ .
- (2)  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  の必要十分条件は,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  がともに null-like で 1 次従属となることである.

**Lemma 2.3.** time-like ベクトルと Lorentz 直交するのは, 自身の定数倍と space-like ベクトルのみである.

**Lemma 2.4.** 任意の space-like ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して, Lorentz 直交する time-like ベクトル  $\mathbf{y}$  が存在する.

**Definition 2.2.**  $\mathbf{E}_1^n$  の部分空間  $V$  について,

- (1) *time-like* であるとは,  $V$  が time-like ベクトルを含むことをいう.
- (2) *space-like* であるとは,  $V$  の  $\mathbf{0}$  を除く任意の元が space-like であることをいう.
- (3) それ以外の場合を *null-like* という.

**Proposition 2.5.**  $V \subset \mathbf{E}_1^n$  を  $k$  次元部分空間とせよ.

- (1)  $V$ : time-like  $\Leftrightarrow V$  の符号が  $(k-1, 1, 0)$
- (2)  $V$ : space-like  $\Leftrightarrow V$  の符号が  $(k, 0, 0)$
- (3)  $V$ : null-like  $\Leftrightarrow V$  の符号が  $(k-1, 0, 1)$

ただし,  $V$  の符号とは, Lorentz 内積  $B$  の  $V$  への制限  $B|_V$  の符号のことである.

**2.2. Lorentzian transformations.** 次に, 双曲空間を双曲面モデルによって観察したうえで, 曲面群の affine 変形の「入れ物」となる群たちの構造をみておく.  $n-1$  次元双曲空間の双曲面モデルとは, 二葉双曲面の連結成分の一つ

$$\mathbb{H}^{n-1} = \{x \in \mathbf{E}_1^n \mid B(x, x) = -1\}$$

に Lorentz 計量  $B(x, y)$  を入れたものである.  $B$  を  $\mathbb{H}^{n-1}$  に制限すると正定値となるので,  $(\mathbb{H}^{n-1}, B)$  は Riemann 多様体であり, Poincaré 球体モデルや Beltrami 上半空間モデルとも同型である. 双曲空間の理想境界を,

$$\partial^\infty \mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbf{E}_1^n \setminus \{0\} \mid B(x, x) = 0\} / \mathbb{R}^\times$$

と定める. 即ち,  $|x| \rightarrow +\infty$  における (null like 方向の) 漸近線 (Euclid 直線) が極限点を表す.

**Definition 2.3.** Minkowski 空間  $\mathbf{E}_1^n$  の変換群

- $\text{Isom}(\mathbf{E}_1^n) := \{\phi : \mathbf{E}_1^n \rightarrow \mathbf{E}_1^n \mid B(\phi(x), \phi(y)) = B(x, y)\}$
- $\text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^n) := \{\phi : \mathbf{E}_1^n \rightarrow \mathbf{E}_1^n \mid B(\phi(x) - \phi(y), \phi(x) - \phi(y)) = B(x - y, x - y)\}$

をそれぞれ Lorentz 変換群, affine Lorentz 変換群という.

**Lemma 2.6** (cf. [15]).  $O(n-1, 1) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid 'AJA = J\}$  と  $O(n-1, 1) \times \mathbb{R}_1^n$  は  $\mathbf{E}_1^n$  に行列の積と平行移動の合成として自然に作用する. このとき, 次の同型が成り立つ.

- (1)  $\text{Isom}(\mathbf{E}_1^n) \cong O(n-1, 1)$ ,
- (2)  $\text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^n) \cong O(n-1, 1) \times \mathbb{R}_1^n$ ,
- (3)  $O^0(n, 1) := \{A \in O(n, 1) \mid \text{positive vector を positive vector にうつす}\} \cong \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ,
- (4)  $SO^0(n, 1) := O^0(n, 1) \cap SO(n, 1) \cong \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ .

ただし,  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  は双曲空間  $\mathbb{H}^n$  の等長変換群,  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  は  $\mathbb{H}^n$  の向きを保つ等長変換群である.

Lemma 2.6 (4) を踏まえ, 次の定理の証明を目指す.

**Theorem 2.7** ([14] p.167).  $SO^0(2, 1)$  の元は, 共役を除き次の 3 種類に限る.

$$(i) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & -s & s \\ s & 1 - \frac{s^2}{2} & \frac{s^2}{2} \\ s & -\frac{s^2}{2} & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)$$

**Proposition 2.8.** 2次元部分空間  $\Pi \subset \mathbf{E}_1^3$  に対し, 次の2条件は同値である.

- (1)  $\Pi$  は time-like である.
- (2)  $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1$  を満たす space-like ベクトル  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^3$  が存在して,  $\Pi = \langle \mathbf{p} \rangle^L$ .

*Proof.*  $\Pi \subset \mathbf{E}_1^3$  を 2-dim time-like subspace とせよ.  $\Pi$  の Euclid 内積の意味で法線ベクトル  $q \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\}$  の第3成分の符号を変えれば,  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}_1^3; B(x, \mathbf{p}) = 0\}$  を満たす  $\mathbf{p}$  が得られる. このとき,  $\Pi \cap \mathbb{H}^2 \neq \emptyset$  なので, Lemma 2.3 より  $\mathbf{p}$  は space-like であり, これを正規化すれば  $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1$  を得る.

逆に,  $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1, \Pi = \langle \mathbf{p} \rangle^L$  のとき, Lemma 2.4 から  $\Pi$  が直ちに time-like であることが従う. (q.e.d.)

**Definition 2.4.** 測地線  $\ell \subset \mathbb{H}^2$  を含む 2次元 time-like 部分空間  $\Pi \subset \mathbf{E}_1^3$  に対する, Proposition 2.8 の space-like ベクトル  $\mathbf{p}$  を,  $\ell$  の極ベクトルという.

**Proposition 2.9.**  $\ell \subset \mathbb{H}^2$  を測地線,  $\mathbf{p}$  を  $\ell$  の極ベクトルとする.  $\mathbf{a} \in \ell$  と  $\mathbf{u} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{a}$  に対し,  $\ell$  は

$$\mathbf{x}(t) = (\cosh t)\mathbf{a} + (\sinh t)\mathbf{u} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

と表され,  $\mathbf{u}$  は  $\ell$  の点  $\mathbf{a}$  における接ベクトルである.

*Proof.*  $\Pi$  を  $\ell$  を含む 2-dim time-like subspace とせよ.  $B(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = 0, B(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0$  より  $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in \Pi$ . このとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{u} &= \mathbf{a} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{a}) \\ &= -B(\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{p} + B(\mathbf{a}, \mathbf{p})\mathbf{a} \\ &= \mathbf{p} \neq 0. \end{aligned}$$

したがって,  $\mathbf{a}, \mathbf{u}$  は一次独立. よって,  $\Pi = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle$  なので,  $\mathbf{x} \in \ell$  は

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{u}$$

と表される。このとき、

$$\begin{aligned} -1 = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \lambda^2 B(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2\lambda\mu B(\mathbf{a}, \mathbf{u}) + \mu^2 B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= -\lambda^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

より、 $\lambda^2 - \mu^2 = 1$  となって、 $\lambda = \cosh t, \mu = \sinh t$ 。さらに  $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{u}$  を得る。 (q.e.d.)

**Definition 2.5.**  $a \in \mathbb{H}^2$  を通る測地線  $\ell$  の方程式を

$$\mathbf{x}(t) = (\cosh t)\mathbf{a} + (\sinh t)\mathbf{u}$$

と表すとき、 $t \geq 0, t \leq 0$  の部分を  $\mathbf{a}$  を始点とする半直線という。半直線に対し、上記の方程式を満たす  $\mathbf{u}$  は半直線に対して唯一通りに定まるので、この  $\mathbf{u}$  を半直線の方向ベクトルという。実際、 $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{u}$  なので、半直線の  $\mathbf{a}$  における接ベクトルになっている。

**Lemma 2.10.**  $a \in \mathbb{H}^2$  を始点とする半直線  $h$  の方向ベクトルを  $\mathbf{u}, \mathbf{p} := \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}$  とすると、次が正しい。

- (1)  $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 1, B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1, B(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$ .
- (2)  $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$  は互いに Lorentz 直交する。

**Definition 2.6.** Lemma 2.10 の主張を満たす  $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$  を、 $\mathbb{R}_1^3$  の Lorentz 正規直交基底 (Lorentz orthonormal basis, L.O.B) という。Lorentz 正規直交系は一般の次元で同様に定義される。

次の主張が定義より直ちに従う。

**Lemma 2.11.** 次の 2 条件は同値である。

- (1)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$  は L.O.B である。
- (2)  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}) \in O(n, 1)$

以上の議論を用いて、Theorem 2.7 を証明する。

*Proof of Theorem 2.7.*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3$  を  $A \in SO^0(2, 1)$  の固有値 1 に属する固有ベクトルとせよ。

(Case 1)  $\mathbf{x}$  : time-like

定数倍を取って  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2$  としてよい。Lemma 2.10 より、 $\mathbb{R}_1^3$  の L.O.B.  $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{x}$  が取れて、

$$P := (\mathbf{p} \ \mathbf{u} \ \mathbf{x}) \in O^0(2, 1).$$

$\det P = -1$  のときは、 $\mathbf{p}$  の代わりに  $-\mathbf{p}$  を取ることで  $\det P = 1$  となり、 $P \in SO^0(2, 1)$

とできる. このとき,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (P^{-1}Ap \ P^{-1}Au \ P^{-1}Ax) \\ &= (P^{-1}Ap \ P^{-1}Au \ e_3) \quad (\because Pe_3 = x) \\ &= \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ n_{31} & n_{32} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この行列の各列は Lorentz 直交するので,  $n_{31} = n_{32} = 0$ . これより,

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$$

となり,

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ i.e. } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Case 2)  $x$ : space-like

同様に  $B(x, x) = 1$  としてよい.  $\Pi := \langle x \rangle^L$  上の測地線は  $x$  を極ベクトルにもつので, 測地線上の半直線を取り, その始点を  $a$ , 方向ベクトルを  $u$  とすると,  $a$  が positive なので,

$$P := (x \ u \ a) \in O^0(2, 1)$$

$\det P = -1$  のときは, 逆の半直線を取るにより,  $P \in SO^0(2, 1)$  とできる. このとき,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (P^{-1}Ax \ P^{-1}Au \ P^{-1}Aa) \\ &= (e_1 \ P^{-1}Au \ P^{-1}Aa) \quad (\because Pe_1 = x) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} \\ 0 & n_{22} & n_{23} \\ 0 & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) と同様に,  $n_{12} = n_{13} = 0$ . これより,

$$\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \in \text{SO}(1, 1)$$

となり,

$$\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \text{ i.e. } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

(Case 3)  $x$ : null-like

$a \in \mathbb{H}^2$  を任意に固定する.  $\Pi := \langle x, a \rangle$  に対し, 測地線  $\Pi \cap \mathbb{H}^2$  の極ベクトルを  $p$ ,  $\Pi \cap \mathbb{H}^2$  上の  $a$  を始点とする半直線の方向ベクトルを  $u$  とせよ. このとき,  $\Pi = \langle u, a \rangle$ ,  $B(x, x) = 0$  より,

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{a}, \lambda^2 - \mu^2 = 0.$$

よって  $\lambda = \pm \mu$  だが,  $\lambda = -\mu$  のときは, 逆の半直線を取ることにより  $\lambda = \mu$  とできる. よって,

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \quad (\lambda \neq 0).$$

このとき,  $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$  より,  $A\mathbf{u} + A\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{a}$ . 一方, (i) と同様に

$$P := (\mathbf{p} \ \mathbf{u} \ \mathbf{a}) \in \text{SO}^0(2, 1)$$

としてよい. このとき,

$$\begin{aligned} P^{-1}A\mathbf{u} + P^{-1}A\mathbf{a} &= P^{-1}(A\mathbf{u} + A\mathbf{a}) \\ &= P^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because P\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}, P\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}) \end{aligned}$$

を得る.  $P^{-1}AP$  の (3, 1) 成分を  $s$  とすると,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (P^{-1}A\mathbf{p} \ P^{-1}A\mathbf{u} \ P^{-1}A\mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} n_{11} & -s & s \\ n_{21} & n_{22} & 1 - n_{22} \\ n_{31} & n_{32} & 1 - n_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この行列の各列が L.O.B をなすので, 第 2, 3 列から

$$\begin{aligned} -(-s)^2 + n_{22}^2 - n_{32}^2 &= 1 \\ -s^2 + (1 - n_{22})^2 - (1 - n_{32})^2 &= -1 \end{aligned}$$

より,  $n_{22} - n_{32} = 1$  となって  $n_{32} = -\frac{s^2}{2}$  を得る. これで第 2, 3 列は決定された.

同様に,

$$\begin{aligned} -n_{11}^2 + n_{21}^2 - n_{31}^2 &= 1 \\ -n_{11}(-s) + n_{21}\left(1 - \frac{s^2}{2}\right) - n_{31}\left(-\frac{s^2}{2}\right) &= 0 \\ -n_{11}s + n_{21}\frac{s^2}{2} - n_{31}\left(1 + \frac{s^2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

より,  $n_{21} - n_{31} = 0$ , i.e.  $n_{11} = \pm 1$ .  $\det P^{-1}AP = 1$  に注意すると, 以上から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -s & s \\ s & 1 - \frac{s^2}{2} & \frac{s^2}{2} \\ s & -\frac{s^2}{2} & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix}$$

を得る.

(q.e.d.)

**Definition 2.7.**  $A \in \text{SO}^0(2, 1)$  とせよ. Theorem の 3 種類の型に対して,  $A$  が

- (i) に共役のとき, 楕円型変換 (*elliptic transformation*) という.
- (ii) に共役のとき, 双曲型変換 (*hyperbolic transformation*) という.
- (iii) に共役のとき, 放物型変換 (*parabolic transformation*) という.

**Lemma 2.12** ([5]). 写像

$$\begin{aligned} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) &\xrightarrow{\rho} \text{SO}^0(2, 1) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1+2bc & -ac+bd & ac+bd \\ -ab+cd & \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2} & \frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{2} \\ ab+cd & \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2} & \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により,  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{SO}^0(2, 1)$  となる. この同型対応において,  $\text{SO}^0(2, 1)$  の元の Definition 2.7 における型の分類は  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  の元の型の分類と一致する.

### 3. Affine deformations of a three holed sphere

この § では主に, Charette-Drumm-Goldman [1] や増田 [10], [11] における 3 点空き球面群の Margulis 不変量に関する結果を中心に紹介する.

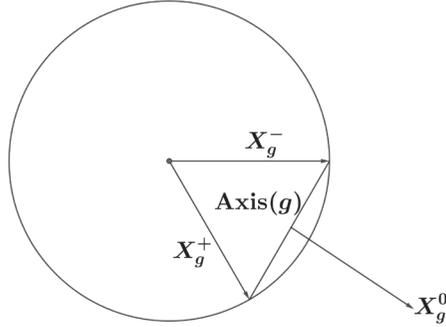
**3.1. Hyperbolic Lorentzian transformations.** まず, 曲面群の不連続作用をもつ affine 変形を議論するうえで本質的な, Minkowski 空間における双曲型変換のふるまいを調べる.

**Lemma 3.1** ([14]). 双曲型変換  $g \in \text{SO}^0(2, 1)$  は相異なる固有値  $\lambda_g < 1 < \lambda_g^{-1}$  ( $0 < \lambda_g < 1$ ) をもつ. また, それらに属する固有ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{X}_g^-, \mathbf{X}_g^0, \mathbf{X}_g^+$  とすると,  $\mathbf{X}_g^0$  は space-like,  $\mathbf{X}_g^\pm$  は null-like であり,  $\mathbf{X}_g^0$  と  $\mathbf{X}_g^\pm$  は互いに Lorentz 直交する. さらに,  $\mathbf{X}_g^\pm$  を positive に取ると,  $\det(\mathbf{X}_g^0 \mathbf{X}_g^- \mathbf{X}_g^+) > 0$ .

以降,  $\mathbf{X}_g^0$  を positive かつ  $B(\mathbf{X}_g^0, \mathbf{X}_g^0) = 1$  に,  $\mathbf{X}_g^\pm$  の Euclidean length を 1 に正規化する. 次が, 双曲型変換の Lorentz 幾何における最重要補題である<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> 勿論, 私的見解.

**Lemma 3.2.**  $g \in \text{SO}^0(2, 1)$  を双曲型変換,  $X_g^-, X_g^0, X_g^+$  を Lemma 3.1 の固有ベクトル,  $\Pi_g$  を  $X_g^- X_g^+$  で張られた線型部分空間とする. このとき,  $\Pi_g = \langle X_g^0 \rangle^L$  であって time like である. さらに,  $\Pi_g \cap \mathbb{H}^2$  は  $g$  の (双曲型変換としての) 軸である.



*Proof.* 前半は固有ベクトル  $X_g^-, X_g^0, X_g^+$  の取り方と Proposition 2.8 から直ちに従う. また,  $X_g^+$  は null like な  $g$  の固有ベクトルなので,  $g$  の  $\partial^\infty \mathbb{H}^2$  における固定点は  $X_g^+$  方向の Euclid 直線であり, 後半の主張を得る. (q.e.d.)

**Definition 3.1.** 双曲曲面  $\Sigma$  に対し,  $\rho: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^3)$  が affine 変形 (affine deformation) であるとは, 射影  $L: \text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^3) \rightarrow \text{O}^0(2, 1)$  との合成  $L \circ \rho$  が  $\pi_1(\Sigma)$  の holonomy 表現になっていることをいう. また, affine 変形  $\rho: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^3)$  が proper であるとは,  $\rho(\pi_1(\Sigma))$  の  $\mathbf{E}_1^3$  への作用が真性不連続であることをいう.

**Theorem 3.3** (Drumm [4]). 自由群に同型な全ての曲面群は proper な affine 変形をもつ.

さらに, 次の定理が極めて重要であり, proper な affine 変形を議論する対象は穴空き曲面, 即ち自由群に同型な曲面の基本群に絞られる.

**Theorem 3.4** (Mess [13]).  $\text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^3)$  の部分群  $G$  が  $\mathbf{E}_1^3$  に真性不連続に作用するとき,  $G$  は閉曲面群に同型でない.

holonomy 表現  $\rho_0: \pi_1 \Sigma \rightarrow \text{O}^0(2, 1)$  を固定すれば, affine 変形は Fuchs 群  $G = \rho_0(\pi_1 \Sigma)$  の affine Lorentz 変換群  $\text{Aflsom}(\mathbf{E}_1^3) = \text{O}^0(2, 1) \times \mathbb{R}_1^3$  への埋め込み  $g \mapsto (g, \mathbf{u}(g))$  とみなすことができる. したがって, 「曲面群の affine 変形がいつ proper であるか?」という問題は, 平行移動パート  $\mathbf{u}: G \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  の議論に帰着される. affine 変形の「入れ物」として, 局所係数コホモロジー群を定義する.

**Definition 3.2.**  $G$  を  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) = \text{O}^0(2, 1)$  の部分群 (主として離散群) とする.

- 写像  $\mathbf{u}: G \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  がコサイクルであるとは,

$$\mathbf{u}(gh) = g(\mathbf{u}(h)) + \mathbf{u}(g) \text{ for } g, h \in G$$

を満たすことをいう。affine 変形の平行移動パート  $\mathbf{u} : G \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  はコサイクルである

- コサイクル  $\mathbf{u}$  がコバウンダリーであるとは、ある  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^3$  が存在して、

$$\mathbf{u}(g) = \mathbf{v} - g(\mathbf{v})$$

と表されることをいう。また、2つのコサイクル  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  が  $T$ -同値であるとは、 $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$  がコバウンダリーであることをいう。

- コサイクル全体の集合を  $Z^1(G, \mathbb{R}_1^3)$ 、コバウンダリー全体の集合を  $B^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  とする。 $B^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  は  $Z^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  の線型部分空間である。そこで、コホモロジー群を

$$H^1(G, \mathbb{R}_1^3) := Z^1(G, \mathbb{R}_1^3) / B^1(G, \mathbb{R}_1^3)$$

と定める。

**3.2. Margulis invariants.** Margulis [8] は、affine Lorentz 変換に対して固定直線方向の移動を評価する不変量 (Margulis 不変量) を導入し、曲面群の affine 変形が proper となるための必要条件を記述した。なお、以降の議論はほとんどが向き付け可能曲面の affine 変形によるので、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \text{SO}^0(2, 1)$  の部分群を扱う。そこで、向きを保つ affine Lorentz 変換群を、

$$\text{AfIsom}^+(\mathbb{E}_1^3) := \text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}_1^3$$

で表す。

**Definition 3.3.**  $\gamma = (g, \mathbf{u}(g)) \in \text{AfIsom}^+(\mathbb{E}_1^3)$  を双曲型 affine 変換とせよ。(ただし、 $(g, \mathbf{u}(g))$  が双曲型であるとは、Möbius 変換パート  $g \in \text{SO}^0(2, 1)$  が双曲型であることである。)  $\gamma$  に対する Margulis 不変量を、

$$\alpha(\gamma) := B(\gamma(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \mathbf{X}_g^0) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3)$$

と定める。

**Lemma 3.5** ([8]). Margulis 不変量  $\alpha(\gamma)$  について、次が成り立つ。

- (1) 基点  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3$  の取り方に依存しない。
- (2)  $\alpha(\gamma^n) := |n|\alpha(\gamma)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )
- (3)  $\text{SO}^0(2, 1)$ -共役不変量である。

次が Margulis による顕著な主張である。

**Theorem 3.6** (Margulis [8], Charette-Drumm [2]).  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{AffIsom}(\mathbf{E}_1^3)$  を自由群に同型な曲面群の proper な affine 変形とする. このとき,  $\rho(\pi_1(\Sigma))$  の単位元を除く任意の元の Margulis 不変量は, 0 でなく同じ符号である.

今, Fuchs 群  $G \subset \text{SO}^0(2, 1)$  とコサイクル  $u \in Z^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  に対して

$$\alpha_u(g) = B(u(g), X_g^0) \quad (g \in G)$$

と定める. このとき, 次が成り立つ.

**Proposition 3.7** (Drumm-Goldman [3]). 自由群に同型で純双曲的な Fuchs 群  $G \subset \text{SO}^0(2, 1)$  に対して, コサイクル  $u, u' \in Z^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  が互いに  $T$ -同値であるための必要十分条件は,  $\alpha_u \equiv \alpha_{u'}$  が成り立つことである.

したがって, 曲面がコンパクトでなく境界がカスプに潰れていないという仮定をする<sup>3</sup> ことにより, Margulis 不変量  $\alpha_u$  はコホモロジー類  $[u] \in H^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  に対して well-defined となる.

以下, 双曲曲面として最も単純な 3 点穴空き球面の場合に着目する.

**Theorem 3.8** (Charette-Drumm-Goldman [1]).  $G = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 g_2 g_3 = 1 \rangle$  を 3 点穴空き球面群の純双曲的  $\text{SO}^0(2, 1)$ -Fuchs 群表現とする.

$$H^1(G, \mathbb{R}_1^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3, [u] \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_u(g_1) \\ \alpha_u(g_2) \\ \alpha_u(g_3) \end{pmatrix}$$

は線型同型写像である. さらに, コサイクル  $[u] \in H^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  が proper な affine 変形に対応するための必要十分条件は,  $\alpha_{[u]}(g_1), \alpha_{[u]}(g_2), \alpha_{[u]}(g_3)$  が同符号であることである.

より一般の穴空き球面群 (任意有限個の境界をもつ球面の Fuchs 群表現) については, 増田 [10, 12] により affine ツイストコサイクルを用いた  $H^1(G, \mathbb{R}_1^3)$  の新しい座標が導入されている.

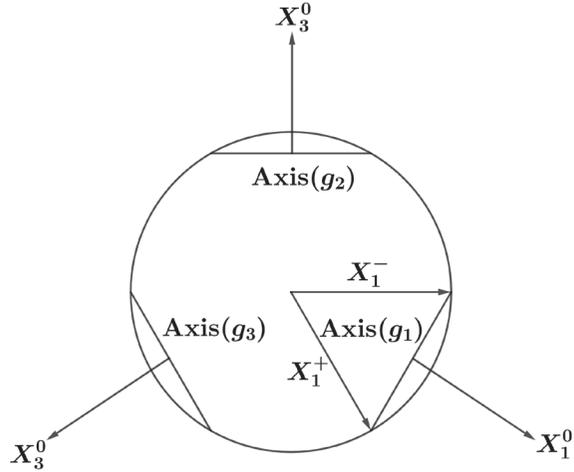
**Lemma 3.9** ([9]).  $G = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 g_2 g_3 = 1 \rangle$  を Theorem 3.8 の Fuchs 群,  $X_i^-, X_i^0, X_i^+$  を  $G$  の生成元  $g_i$  の固有値  $\lambda_i < 1 < \lambda_i^{-1}$  に属する固有ベクトルとし,  $g_1, g_2, g_3$  の軸 (を定義する time-like subspace) および  $X_1^0, X_2^0, X_3^0$  が下図のような位置関係になっているとする<sup>4</sup>. この

<sup>3</sup> 逆に, 放物型変換を含む Fuchs 群の proper な affine 変形が存在するかというのが一番の問題であるが, [2] で Margulis 不変量が調べられた以外, 全く手がつけられていないものと思われる.

<sup>4</sup> Klein モデルに射影した図である.

とき、次が成り立つ.

- (1)  $B(\mathbf{X}_i^0, \mathbf{X}_j^0) < 0$ ,
- (2)  $B(\mathbf{X}_i^0, \mathbf{X}_j^\pm) < 0$ ,
- (3)  $B(\mathbf{X}_i^\pm, \mathbf{X}_j^\pm) < 0$ .



### 3.3. Fixed axes and Margulis invariants.

**Proposition 3.10** (Masuda [9]). 双曲型 affine 変換  $\gamma = (g, \mathbf{u}(g)) \in \text{AffSom}^+(\mathbf{E}_1^3)$  により不変な Euclid 直線が  $\mathbb{R}^3$  に存在する. (この直線を  $\gamma$  の固定軸とよぶ.) 特に, 固定軸が唯一つ存在するための必要十分条件は, Margulis 不変量  $\alpha(\gamma)$  が 0 でないことである.

*Proof.*  $\gamma$  の平行移動パート  $\mathbf{u}(g) = \alpha(\gamma)\mathbf{X}_g^0 + c^-\mathbf{X}_g^- + c^+\mathbf{X}_g^+$  に対して,

$$P_u(g) := \frac{c^-}{1-\lambda_g} X_g^- + \frac{c^+}{1-\lambda_g^{-1}} X_g^+$$

とすると, Euclid 直線  $C_g := \{t\mathbf{X}_g^0 + P_u(g); t \in \mathbb{R}\}$  は  $\gamma$  で不変である. 実際,

$$\begin{aligned} \gamma(t\mathbf{X}_g^0 + P_u(g)) &= (t + \alpha(\gamma))\mathbf{X}_g^0 + \left(\frac{\lambda_g c^-}{1-\lambda_g} + c^-\right)\mathbf{X}_g^- + \left(\frac{\lambda_g^{-1} c^+}{1-\lambda_g^{-1}} + c^+\right)\mathbf{X}_g^+ \\ &= (t + \alpha(\gamma))\mathbf{X}_g^0 + P_u(g) \in C_g. \end{aligned}$$

一意性について考える.  $\tilde{C}_g = \{t\mathbf{X} + \mathbf{P}; t \in \mathbb{R}\}$  が  $\gamma$  の固定軸であるとせよ.

$$\mathbf{X} = a\mathbf{X}_g^0 + b\mathbf{X}_g^- + c\mathbf{X}_g^+, \mathbf{P} = \xi\mathbf{X}_g^0 + \eta\mathbf{X}_g^- + \zeta\mathbf{X}_g^+$$

とすると,

$$\gamma(t\mathbf{X} + \mathbf{P}) = t(a\mathbf{X}_g^0 + b\lambda_g\mathbf{X}_g^- + c\lambda_g^{-1}\mathbf{X}_g^+) + (\xi + \alpha(\gamma))\mathbf{X}_g^0 + (\lambda_g\eta + c^-)\mathbf{X}_g^- + (\lambda_g^{-1}\zeta + c^+)\mathbf{X}_g^+$$

これが  $\tilde{C}_g$  に含まれるので,

$$\begin{aligned} aX_g^0 + bX_g^- + cX_g^+ &= k(aX_g^0 + b\lambda_g X_g^- + c\lambda_g^{-1} X_g^+) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ \text{i.e. } (k-1)aX_g^0 + (k\lambda_g - 1)bX_g^- + (k\lambda_g^{-1} - 1)cX_g^+ &= 0. \end{aligned}$$

$X_g^0, X_g^-, X_g^+$  が一次独立なので、これが満たされるには  $X = X_g^0, X_g^-, X_g^+$  (あるいはその定数倍) である必要がある。

(Case 1)  $X = X_g^0$  のとき

$a = 1, b = c = 0$  より,

$$\gamma(tX_g^0 + \mathbf{P}) = (t + \xi + \alpha(\gamma))X_g^0 + (\lambda_g \eta + c^-)X_g^- + (\lambda_g^{-1} \zeta + c^+)X_g^+ \in \tilde{C}_g$$

より,  $\lambda_g \eta + c^- = \eta, \lambda_g^{-1} \zeta + c^+ = \zeta$  となり,

$$\eta = \frac{c^-}{1 - \lambda_g}, \zeta = \frac{c^+}{1 - \lambda_g^{-1}}$$

を得る. よって, このような固定軸は  $C_g$  に一致する.

(Case 2)  $X = X_g^-$  のとき

$b = 1, a = c = 0$  より, 同様にすると  $\xi = \xi + \alpha(\gamma), \lambda_g^{-1} \zeta + c^+ = \zeta$  なので,

$$\alpha(\gamma) = 0, \zeta = \frac{c^+}{1 - \lambda_g^{-1}}.$$

したがって, この場合に固定軸が存在するための必要十分条件は  $\alpha(\gamma) = 0$  のときであり, 固定軸は  $\tilde{C}_g = \{tX_g^- + \xi X_g^0 + \frac{c^+}{1 - \lambda_g^{-1}} X_g^-; t \in \mathbb{R}\}$  となる. このとき, 固定軸は  $\xi \in \mathbb{R}$  の分, すなわち実 1 次元の任意性があり一意的でない.

(Case 3)  $X = X_g^+$  のとき

$c = 1, a = b = 0$  より, (ii) と同様に, この場合に固定軸が存在するための必要十分条件は  $\alpha(\gamma) = 0$  のときであり, 固定軸は  $\tilde{C}_g = \{tX_g^+ + \xi X_g^0 + \frac{c^-}{1 - \lambda_g} X_g^+; t \in \mathbb{R}\}$  で, 一意的でない.

以上より, 固定軸の一意性と  $\alpha(\gamma) \neq 0$  が同値であることが証明された.

(q.e.d.)

あらためて, 双曲型変換  $g \in \text{SO}^0(2, 1)$  のコサイクル  $u$  に応じて定まる固定軸を

$$C_g^u = \{tX_g^0 + \mathbf{P}_u(g); t \in \mathbb{R}\} \text{ where } \mathbf{P}_u(g) = \frac{c^-}{1 - \lambda_g} X_g^- + \frac{c^+}{1 - \lambda_g^{-1}} X_g^+$$

と定める. この後に証明する, 増田 [9] による不連続性の崩壊の Margulis 不変量による

観察をみるため、この固定軸は Margulis 不変量が 0 であるとき、すなわち一意性が崩れているときにも定義されていることに注意しておく。

**Lemma 3.11.**  $u, u'$  を互いに  $T$ -同値なコサイクル,  $u'(g) = u(g) + v - g(v)$ ,  $v = e_g^0 X_g^0 + e_g^- X_g^- + e_g^+ X_g^+$  とする. 次の主張が成り立つ.

$$(1) P_{u'}(g) = P_u(g) + e_g^- X_g^- + e_g^+ X_g^+.$$

$$(2) C_g^{u'} = C_g^u + v.$$

*Proof.*  $u(g) = c^0 X_g^0 + c^- X_g^- + c^+ X_g^+$  とせよ. このとき,

$$\begin{aligned} u'(g) &= u(g) + v - g(v) \\ &= c^0 X_g^0 + \left( c^- + e_g^- (1 - \lambda_g) \right) X_g^- + \left( c^+ + e_g^+ (1 - \lambda_g^{-1}) \right) X_g^+ \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} P_{u'}(g) &= \left( \frac{c^-}{1 - \lambda_g} + e_g^- \right) X_g^- + \frac{c^+}{1 - \lambda_g^{-1}} X_g^+ \\ &= P_u(g) + e_g^- X_g^- + e_g^+ X_g^+. \end{aligned}$$

(2) は (1) より  $(X_g^0$  方向のパラメータをずらすだけで) 直ちに従う. (q.e.d.)

**Theorem 3.12** (Masuda [9]).  $G = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 g_2 g_3 = 1 \rangle$  を 3 点穴空き球面群の純双曲的  $SO^0(2, 1)$ -Fuchs 群表現,  $[u] \in H^1(G, \mathbb{R}^3)$  とする. 生成元の固定軸  $C_{g_1}^u, C_{g_2}^u, C_{g_3}^u$  が 1 点で交わるならば,  $\alpha_u(g_1) = \alpha_u(g_2) = \alpha_u(g_3) = 0$ .

*Proof.* Proposition 3.7 と Lemma 3.11 より,  $C_{g_1}^u \cap C_{g_2}^u \cap C_{g_3}^u = \{0\}$  としてよい. 実際,  $C_{g_1}^u \cap C_{g_2}^u \cap C_{g_3}^u = \{v\}$  のとき,  $u$  と同値なコサイクル  $u'$  を  $u'(g) = u(g) - v + g(v)$  と取れば,  $C_{g_1}^{u'} \cap C_{g_2}^{u'} \cap C_{g_3}^{u'} = \{0\}$  で  $\alpha_u = \alpha_{u'}$  である. このとき,  $g_i u(g_i) = \alpha_u(g_i) X_i^0$  ( $i=1, 2, 3$ ). いま  $g_1 g_2 g_3 = 1$  なので  $u(g_1 g_2 g_3) = 0$ . 一方, コサイクル条件より

$$\begin{aligned} u(g_1 g_2 g_3) &= u(g_1) + g_1(u(g_2)) + g_1 g_2(u(g_3)) \\ &= \alpha_u(g_1) X_1^0 + g_1(\alpha_u(g_2) X_2^0) + g_3^{-1}(\alpha_u(g_3) X_3^0) \\ &= \alpha_u(g_1) X_1^0 + \alpha_u(g_2)(g_1(X_2^0)) + \alpha_u(g_3) X_3^0. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\alpha_u(g_1) X_1^0 + \alpha_u(g_2)(g_1(X_2^0)) + \alpha_u(g_3) X_3^0 = 0$  より,  $X_1^0, g_1(X_2^0), X_3^0$  の一次独立性を示せば  $\alpha_u(g_1) = \alpha_u(g_2) = \alpha_u(g_3) = 0$  を得る.

以下,  $X_1^0, g_1(X_2^0), X_3^0$  の一次独立性を示す.  $X_1^0, X_2^0$  は Lemma 3.9 の図のような位置関係になるため一次独立であり,  $g_1$  は Lorentz 計量を保つので,  $X_1^0 = g_1(X_1^0)$  と  $g_1(X_2^0)$  が一次独立であることは直ちに従う. 次に,  $X_1^0, g_1(X_2^0), X_3^0$  の間に非自明な一次関係があったと

すると,  $\mathbf{X}_1^0, g_1(\mathbf{X}_2^0)$  の一次独立性から

$$\mathbf{X}_3^0 = a\mathbf{X}_1^0 + bg_1(\mathbf{X}_2^0) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

と表される. これと  $g_1(\mathbf{X}_2^+)$  の Lorentz 内積をとると,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{X}_3^0, g_1(\mathbf{X}_2^+)) &= aB(\mathbf{X}_1^0, g_1(\mathbf{X}_2^+)) + bB(g_1(\mathbf{X}_2^0), g_1(\mathbf{X}_2^+)) \\ &= aB(g_1(\mathbf{X}_1^0), g_1(\mathbf{X}_2^+)) + bB(\mathbf{X}_2^0, \mathbf{X}_2^+) \\ &= aB(\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_2^+). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{X}_3^0, g_1(\mathbf{X}_2^+)) &= B(\mathbf{X}_3^0, g_3^{-1}g_2^{-1}(\mathbf{X}_2^+)) \\ &= B(\mathbf{X}_3^0, g_2^{-1}(\mathbf{X}_2^+)) \\ &= \lambda_2 B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_2^+). \end{aligned}$$

以上より,  $a = \lambda_2 \frac{B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_2^+)}{B(\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_2^+)}$  となって, Lemma 3.9 より  $a > 0$  を得る. 同様に  $B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_1^+)$  を

調べることにより,  $b = \frac{B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_1^+)}{\lambda_1 B(\mathbf{X}_2^0, \mathbf{X}_1^+)}$  となって,  $b > 0$  を得る. しかし  $B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_3^0)$  だが, これを調べると

$$\begin{aligned} B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_3^0) &= aB(\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_3^0) + bB(g_1(\mathbf{X}_2^0), \mathbf{X}_3^0) \\ &= aB(\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_3^0) + bB(g_3^{-1}g_2^{-1}(\mathbf{X}_2^0), \mathbf{X}_3^0) \\ &= aB(\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_3^0) + bB(\mathbf{X}_2^0, \mathbf{X}_3^0). \end{aligned}$$

したがって,  $B(\mathbf{X}_3^0, \mathbf{X}_3^0) < 0$  となって矛盾する. 以上から  $a = b = 0$  となり,  $\mathbf{X}_1^0, g_1(\mathbf{X}_2^0), \mathbf{X}_3^0$  の一次独立性が従い,  $\alpha_u(g_1) = \alpha_u(g_2) = \alpha_u(g_3) = 0$  を得る. (q.e.d.)

#### 4. Margulis invariants and Teichmüller theory

曲面群  $G$  の表現多様体において, 完備双曲構造を与える点の接空間は, この双曲構造に対する 1 次元局所係数コサイクルの空間  $Z^1(G, \mathcal{V})$  と同一視できる. ゆえにコサイクル  $[u] \in H^1(G, \mathbb{R}^3)$  は Teichmüller 空間の接ベクトルとみなせるので, 自由群に同型で proper な affine 変形を許容する曲面群を考えたとき, affine 変形は双曲構造の無限小変形とみなすことができる. ここでは Goldman-Margulis [5] による, 表現多様体上の曲線の変分を用いた Margulis 不変量の特徴づけを述べ, 増田 [10] が導入した affine twist cocycle によって得られる, Wolpert の余弦公式 [16] の類似について触れる.

**4.1. Deformation theoretic interpretation of Margulis invariants.** はじめに, [7] をもとに局所係数コホモロジーについて最も簡単な設定で復習した後, Goldman-Margulis [5] が示し

た, Margulis 不変量を用いた表現多様体上の曲線の変分公式を証明する.

ベクトル空間  $V$  (簡単のため有限次元としておく), 曲面  $\Sigma$  の基本群の線型表現  $\rho: \pi_1(\Sigma, p) \rightarrow GL(V)$  と点  $p$  を基点とする閉道  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Sigma$  に対して, パラメータ  $0 \leq t \leq 1$  の値に対して定まる  $V$  の基底  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$  が

$$e_j(0) = \rho([\gamma])e_j(1)$$

を満たすように定まっているとする. ベクトル  $v(t) = a_1e_1(t) + a_2e_2(t) + \dots + a_n e_n(t)$  がパラメータ  $0 \leq t \leq 1$  まで変化するとき, 基底の条件から, 条件式

$$v(0) = \rho([\gamma])v(1)$$

が  $\gamma$  のホモトピー類のみにより定まる. 以上の通り, 曲面群の線型表現  $\rho$  を実現するベクトルの動きを基点  $p$  のすべてのループについて与えたものを  $\rho$  に対応した局所系といい,  $\mathcal{V}$  で表す.

**Theorem 4.1** (cf. [7]).  $SL(2, \mathbb{R})$ -指標多様体  $\chi := \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), SL(2, \mathbb{R})) // SL(2, \mathbb{R})$  の Fuchsian 表現を表す点  $[\phi]$  における接空間は, 線型表現  $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$  によって定まる局所系係数 1 次元コホモロジー群  $H^1(\Sigma, \mathcal{V})$  と同型である.

これにより,  $[u] \in H^1(G, \mathbb{R}^3)$  は Teichmüller 空間の接ベクトルとみなされ, 双曲構造の無限小変形と考えられる. ここで, Minkowski 空間の  $sl(2, \mathbb{R})$ -モデルを導入する. Lie 群  $SL(2, \mathbb{R})$  の Lie 環  $sl(2, \mathbb{R}) = \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid \text{tr} X = 0\}$  上に非退化 2 次形式

$$\mathbb{B}(X, Y) := \frac{1}{2} \text{tr}(XY)$$

を定めると, 基底

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

が  $\mathbb{B}(E_1, E_1) = 1, \mathbb{B}(E_2, E_2) = 1, \mathbb{B}(E_3, E_3) = -1$  を満たし, 互いに Lorentz 直交する. これにより, 同変写像

$$\begin{aligned} sl(2, \mathbb{R}) &\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ (y+z)/2 \\ (-y+z)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を通して  $(sl(2, \mathbb{R}), \mathbb{B})$  は Minkowski 空間  $\mathbf{E}_1^3$  と等長同型となる. いま, Lemma 2.12 の群

同型写像  $\rho$  による  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$  の像

$$g_0 := \rho(g) = \begin{pmatrix} 1+2bc & -ac+bd & ac+bd \\ -ab+cd & \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2} & \frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{2} \\ ab+cd & \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2} & \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \end{pmatrix}$$

に対して、直接計算により

$$g_0 \begin{pmatrix} (a-d)/2 \\ (b+c)/2 \\ (-b+c)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-d)/2 \\ (b+c)/2 \\ (-b+c)/2 \end{pmatrix}$$

を得る。これを  $sl(2, \mathbb{R})$ -モデルで見たとき

$$\hat{g} := g - \frac{\text{tr}(g)}{2} E \in sl(2, \mathbb{R})$$

と等しいので、 $\hat{g}$  が  $g_0$  の 1 に属する固有ベクトルとなっていることがわかる。この Lorentz 内積によるノルムを調べてみると

$$\mathbb{B}(\hat{g}, \hat{g}) = \frac{(a+d)^2 - 4ad + 4bc}{4} = \frac{\text{tr}^2(g) - 4}{4}.$$

ゆえに、 $\hat{g}$  を  $\pm \sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}/2$  で割ることで  $\mathbb{B}(\hat{g}, \hat{g}) = 1$  とできるが、ここでは  $x_g^0$  を

$$x_g^0 = \frac{\text{sgn}(\text{tr}(g))}{\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}/2} \hat{g}$$

とする。以上から、次が従う。

**Lemma 4.2** (Goldman-Margulis [5]). 純双曲的な Fuchs 群  $G \subset PSL(2, \mathbb{R})$  と、 $G$  の proper な affine 変形を与えるコサイクル  $\mathbf{u} \in Z^1(G, \mathbb{R}^3)$  に対して、 $g \in G$  の Margulis 不変量は

$$\alpha_{\mathbf{u}}(g) = \text{sgn}(\text{tr}(g)) \frac{\text{tr}(\mathbf{u}(g)g)}{\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}}.$$

Goldman-Margulis [5] はこの明示式を用いて、コサイクルが Teichmüller 空間の接ベクトルと本質的に等しいことを示した。以下、その定理を証明する。双曲型変換  $g \in SO^0(2, 1)$  を Lemma 2.12 の  $\rho$  で引き戻して上半平面モデル  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$  に作用させたときの translation length を  $l(g)$ 、 $g$  の固有値を  $\lambda < 1 < \lambda^{-1}$  とすると、

$$l(g) = -2 \log \lambda \\ |\text{tr} \rho^{-1}(g)| = 2 \cosh(l(g)/2).$$

**Definition 4.1.** 表現多様体  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), SL(2, \mathbb{R}))$  の滑らかな曲線  $\tilde{i}(t)$  がコサイクル  $\mathbf{u} \in Z^1(G, \mathbb{R}^3)$  に沿った曲線であるとは、指数写像  $\exp: sl(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  を用いて

$$\tilde{i}(t)(g) = g \exp(tu(g) + O(t^2))$$

の形で表されることをいう。

$\tilde{i}(t)$  を、各点が離散的忠実表現で、像が自由群に同型な純双曲的 Fuchs 群であるような  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), SL(2, \mathbb{R}))$  上の道とする。  $g \in \pi_1(\Sigma)$  と曲面  $\Sigma$  の Teichmüller 空間  $\mathcal{T}(\Sigma)$  に対して、次のような可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{T}(\Sigma) \\ & \nearrow \mu & \downarrow L_g \\ I & \xrightarrow{L_g} & \mathbb{R} \end{array}$$

$I$  は  $\tilde{i}(t)$  が定義されている閉区間、  $\mu(t)$  は  $\tilde{i}(t)$  と同相な Teichmüller 空間の道、  $L_g(x)$  は単純閉曲線  $g \in \pi_1(\Sigma)$  に対して双曲構造  $x \in \mathcal{T}(\Sigma)$  に対応する閉測地線の長さを与える関数、  $L_g$  はそれらの合成である。

**Theorem 4.3** (Goldman-Margulis [5]).  $G \subset \text{SO}^0(2, 1)$  を純双曲的な Fuchs 群、  $\mathcal{T}(\Sigma)$  を完備双曲曲面  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$  の Teichmüller 空間とする。このとき、コサイクル  $u \in Z^1(G, \mathbb{R}_+^*)$  と、  $\mathcal{T}(\Sigma)$  上の  $u$  に沿った道  $\mu(t)$  に対して、次の等式が任意の  $g \in G$  に対して成り立つ：

$$2\alpha_u(g) = L'_g(0).$$

*Proof.*  $\tau'_g(t) := |\text{tr}(\tilde{i}_t(g))|$  とおくと、指数写像が行列の指数関数であることから

$$\begin{aligned} \tau'_g(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{tr}(\tilde{i}_t(g))| \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{tr}(g \exp(tu(g) + O(t^2)))| \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{tr}(g(E + tu(g) + O(t^2)))| \\ &= \pm \text{tr}(gu(g)) \end{aligned}$$

Lemma 4.2 より、  $\text{tr}(u(g)g) = \text{sgn}(\text{tr}(g))\alpha_u(g)\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}$  なので

$$\tau'_g(0) = \alpha_u(g)\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}, \text{ i.e., } \alpha_u(g) = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}}\tau'_g(0).$$

一方、chain-rule から

$$\begin{aligned} \tau'_g(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{tr}(\tilde{i}_t(g))| \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( 2 \cos\left(\frac{l(\tilde{i}(g))}{2}\right) \right) \\ &= \sinh\left(\frac{L_g(0)}{2}\right) \cdot L'_g(0). \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\sinh^2\left(\frac{L_g(0)}{2}\right) &= \cosh^2\left(\frac{L_g(0)}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{\text{tr}^2(g) - 4}{4} - 1\end{aligned}$$

より,  $\sinh(L_g(0)/2) = \sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}/2$  なので

$$\tau'_g(0) = \frac{\sqrt{\text{tr}^2(g) - 4}}{2} L'_g(0).$$

以上より,  $2\alpha_u(g) = L'_g(0)$  が従う. (q.e.d.)

最後に Goldman-Margulis の公式の応用として, 増田 [10, 12] による Wolpert の余弦公式の affine 変形における類似公式を述べる.

まず, Wolpert の余弦公式について論じる. これは, 曲面の単純閉曲線が与える Teichmüller 空間上の長さ関数の Poisson 積を, その曲線の交点におけるなす角を用いて表現したものである.  $M^{2n}$  をシンプレクティック多様体, 即ち  $M$  上の非退化な閉形式  $\omega \in \Omega^2(M)$  が存在するとする. このとき, ベクトル場  $X$  に対して 1 形式  $\phi_X \in \Omega^1(M)$  を  $\phi_X(Y) := \omega(X, Y)$  と定めると,  $\omega$  の非退化性から  $X \mapsto \phi_X$  は 1 対 1 対応を与える. この 1 形式  $\phi$  を  $i(X)(\omega)$  と書くことにする. このとき, 函数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  に対してベクトル場  $X_f$  を

$$i(X_f)(\omega) = df$$

を満たすものとする. (このようなベクトル場を Hamilton ベクトル場という.)  $M$  上の函数  $f, g$  の Poisson 積を

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$$

で定義する.

**Theorem 4.4** (Wolpert [16]). 曲面  $\Sigma$  の単純閉曲線  $\alpha$  に対して,  $l_\alpha(x)$  を双曲構造  $x \in \mathcal{T}(\Sigma)$  で  $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$  に対応する閉測地線の長さを測った函数とする. このとき, 2 つの単純閉曲線  $\alpha, \beta$  に対して, 各交点  $p$  におけるなす角を  $\theta_p$  とすると, 2 つの長さ関数  $l_\alpha, l_\beta$  の Poisson 積について次の等式が成り立つ:

$$\{l_\alpha, l_\beta\}(x) = \sum \cos \theta_p.$$

**Definition 4.2** (増田 [10]). 曲面  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$  上の分離的単純閉曲線  $g(\Sigma = S_1 \cup S_2)$  に沿った標準的 affine ツイストコサイクルを

$$\mathbf{AT}_g(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma \in \pi_1(S_1)) \\ X_g^0 - \sigma(X_g^0) & (\sigma \in \pi_1(S_2)) \\ \text{defined by cocycle condition} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

と定める. 一般に, コサイクル  $\mathbf{u} \in Z^1(G, \mathbb{R}^3)$  が affine ツイストであるとは, ある分離的単純閉曲線  $g$  について  $\mathbf{u} = k\mathbf{AT}_g$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) となっていることをいう.

affine ツイストコサイクルは, 曲面を分離曲線で分解 (例えばパンツ分解) したとき, 片方のコサイクルを固定して片方のコサイクルの分だけ平行移動して貼り付けるというようなコサイクルの構成法であり, 幾何的には Dehn ツイストでコサイクルを伸ばしていくような構成である. Goldman-Margulis の公式を用いることにより, 増田 [10, 12] は次を示した.

**Theorem 4.5** (Masuda [10, 12]).  $G \subset \mathrm{SO}^0(2, 1)$  を自由群に同型で純双曲的な Fuchs 群,  $g \in \pi_1(\Sigma)$  を境界つき曲面  $\Sigma = \mathbb{H}^2/G$  上の分離的単純閉曲線,  $\Sigma = S_1 \cup S_2$  とする. このとき, affine ツイストコサイクル  $\mathbf{AT}_g$  に沿った  $\mathcal{T}(\Sigma)$  上の道  $\mu(t)$  に対する長さ函数  $L_g = l_g(\mu(t))$  に対して次の等式が成り立つ:

$$L'_g(0) = 2 \sum_{p \in g \cap \sigma} \cos \theta_p.$$

*Outline of proof.* Goldman-Margulis の公式 (Theorem 4.3) より,  $\sigma \in \pi_1(\Sigma)$  に対して

$$\alpha_{\mathbf{AT}_g}(\sigma) = \sum_{p \in g \cap \sigma} \cos \theta_p$$

を示せばよい. Proposition 3.7 より,

$$\alpha_{\mathbf{AT}_g}(\sigma) = B(\mathbf{AT}_g(\sigma) + gx - x, X_g^0) \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

今, affine ツイストコサイクルの構成法から

$$\sigma = \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 \tau_2 \cdots \sigma_n \tau_n \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \pi_1(S_1), \tau_1, \dots, \tau_n \in \pi_1(S_2))$$

としてよい. このとき,  $\mathbf{AT}_g$  の定義より  $\mathbf{AT}_g(\sigma_i) = 0$  なので, コサイクル条件から

$$\begin{aligned} \mathbf{AT}_g(\sigma) &= \sigma_1 (\mathbf{AT}_g(\tau_1 \sigma_2 \tau_2 \cdots \sigma_n \tau_n)) \\ &= \sigma_1 (\tau_1 (\mathbf{AT}_g(\sigma_2 \tau_2 \cdots \sigma_n \tau_n))) + \sigma_1 (\mathbf{AT}_g(\tau_1)) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 \tau_2 \cdots \sigma_j (\mathbf{AT}_g(\tau_j)) \end{aligned}$$

を得る<sup>5</sup>. ゆえに,

<sup>5</sup> 例えば  $n=3$  のとき,  $\mathbf{AT}_g(\sigma) = \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 \tau_2 \sigma_3 (\mathbf{AT}_g(\tau_3)) + \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 (\mathbf{AT}_g(\tau_2)) + \sigma_1 (\mathbf{AT}_g(\tau_1))$  が成り立つことを直接計算により示すことができる. 厳密には, 数学的帰納法で証明すべきである.

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{AT}_g}(\sigma) &= B\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j \tau_1 \sigma_2 \tau_2 \cdots \sigma_j (\mathbf{AT}_g(\tau_j)), X_\sigma^0\right) \\ &= \sum_{j=1}^n B\left(\mathbf{AT}_g(\tau_j), \sigma_j^{-1} \cdots \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1}(X_\sigma^0)\right) \cdots (*).\end{aligned}$$

再び  $\mathbf{AT}_g$  の定義より  $\mathbf{AT}_g(\tau_j) = X_g^0 - \tau_j(X_g^0)$  であり, さらに  $X_\sigma^0$  を  $\sigma$  の固定点として見ることににより,  $h \in \mathrm{SO}^0(2, 1)$  に対して  $h(X_\sigma^0) = X_{h\sigma h^{-1}}^0$  が成り立つ. 以上より

$$\begin{aligned}(* ) &= \sum_{j=1}^n B\left(X_g^0, \sigma_j^{-1} \cdots \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1}(X_\sigma^0)\right) - \sum_{j=1}^n B\left(\tau_j(X_g^0), \sigma_j^{-1} \cdots \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1}(X_\sigma^0)\right) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{j=1}^n B\left(X_g^0, X_{\tau_j \sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j}^0\right) - \sum_{j=1}^n B\left(X_g^0, X_{\sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j}^0\right) \cdots (**)\end{aligned}$$

ここで簡単な直接計算により, 軸が互いに横断的に交わる双曲型変換  $h_1, h_2 \in \mathrm{SO}^0(2, 1)$  に対して,  $h_1, h_2$  の軸のなす角を  $\theta$  とすると

$$B(X_{h_1}^0, X_{h_2}^0) = \cos \theta$$

が成り立つことがわかる. したがって, (\*\* ) の第 1 項の各項は, 曲面  $\Sigma$  上で閉曲線  $g$  と  $\tau_j \sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j$  の交点  $p_j$  におけるなす角  $\theta_{p_j}$  に対する  $\cos \theta_{p_j}$  の値に等しい. 即ち

$$\sum_{j=1}^n B\left(X_g^0, X_{\tau_j \sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j}^0\right) = \sum_{j=1}^n \cos \theta_{p_j}.$$

同様に第 2 項の各項は,  $\Sigma$  上で  $g$  と  $\sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j \tau_j$  の交点  $q_j$  におけるなす角  $\theta_{q_j}$  に対して  $\cos(\pi - \theta_{q_j}) = -\cos \theta_{q_j}$  を満たす. 即ち

$$- \sum_{j=1}^n B\left(X_g^0, X_{\sigma_{j+1} \tau_{j+1} \cdots \sigma_n \tau_n \sigma_1 \tau_1 \cdots \sigma_j \tau_j}^0\right) = \sum_{j=1}^n \cos \theta_{q_j}.$$

以上より,

$$\alpha_{\mathbf{AT}_g}(\sigma) = \sum_{j=1}^n \cos \theta_{p_j} + \sum_{j=1}^n \cos \theta_{q_j}$$

が従うが,  $p_j, q_j$  たちは  $g$  と  $\sigma$  の交点を尽くしており, これにより結論が得られた.

(q.e.d.)

## 5. Further problem

最後に, 曲面群の affine 変形について興味深い問題を挙げる<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> ここで挙げたのは, 本稿で論じた Fuchs 群の affine 変形の枠組みにおいて興味深いと思われる問題であるが, Lorentz 幾何としては anti de-Sitter 空間や一般の対称空間への拡張を考えるべきであるように思う.

**Problem.** 4点穴空き球面の affine 変形が proper であるための必要十分条件を, Margulis 不変量を用いて定式化せよ.

**Problem.** 境界つき曲面の proper な affine 変形を保ったまま, 境界をカスプに潰すことができるか.

### Acknowledgments

本稿は, 2018年に雪田友成さん(現:足利大学)と筆者が不定期に行っていた勉強会の内容を中心に構成してあります. この機会に雪田さんに改めて感謝したいと思います. また, 大阪教育大学附属高校の増田高行先生には素晴らしい学位論文をお送り頂いたほか, 曲面群の affine 変形について様々なアイデアを頂戴しました. 拙い概説ではありますが, この場を借りて深く御礼申し上げます.

### 参考文献

- [1] V. Charette, T. A. Drumm and W. M. Goldman, *Affine deformations of a three-hold sphere*, *Geom. Topol* **14** (2010), 1355–1382.
- [2] V. Charette, T. A. Drumm, *The Margulis invariant for parabolic transformations*, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **133** no.8, 2439-2447.
- [3] T. A. Drumm and W. M. Goldman, *Isospectrality of flat Lorentz 3-manifolds*, *J. Differential Geom.*, **58** (2001), no.3, 457–465.
- [4] T. A. Drumm, *Fundamental polyhedra for Margulis space-times*, *Topology* **31** (1992), 677–683.
- [5] W. M. Goldman and G. A. Margulis, *Flat Lorentz 3-manifolds and cocompact Fuchsian groups*, *Cystallographic groups and their generalizations (Kotrijk, 1999)*, 135–145, *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc.Providence, RI, 200.
- [6] 平井武, 線形代数と群の表現 I, II, 朝倉書店 2001.
- [7] 河野俊丈, 曲面の幾何構造とモジュライ増補版, 日本評論社 2023.
- [8] G. A. Margulis, *Free totally discontinuously groups of affine transformations*, *Soviet Math. Dokl* **28** (2) (1983), 435–439.
- [9] 増田高行, 3点穴あき球面の真性不連続アフィン変形とその固定軸, 大阪大学修士論文(2014).
- [10] T. Masuda, *Affine twist deformation of a sphere with holes*, *Geom.Dedicata*, **182** (2016), 249–262.
- [11] T. Masuda, *Combination of affine deformations on a hyperbolc surface*, preprint (2016), arXiv:1606.05966.
- [12] T. Masuda, *Twist deformations in affine geometry*, Doctoral thesis, Osaka Univ. (2017).

- [13] G. Mess, *Lorentz spacetimes of constant curvature*, Preprint Institut des Études Scientifiques (2019).
- [14] 中岡稔, 双曲幾何学入門, サイエンス社 1993.
- [15] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994.
- [16] S. Wolpert, *An elementary formula for the Fenchel-Nielsen twist*, Comment. Math. Helv., 56 (1984), no.1, 132–135.