# 数学史講義（第 16 回）：数学の基礎をめぐって 6；ゲーデルと不完全性定理

林　知宏

以上［林 2021］



以上［林 2022］

## 6 ゲーデルと不完全性定理

集合論の対象は，感覚的経験の遠く及びえないものであるにもかかわらず，
われわれは確かに，これらの対象についても何らかの知覚に類するものを持っている．[1]

### 6.1 はじめに

われわれは，「数学史講義 第 14 回」（［林 2021］）でヘルマン・ワイルの数学基礎論論争への関わりを見た．ワイルはヒルベルトとブラウワーの両者の立場に理解を示しつつ，ヒルベルトの企図（形式化された超数学による公理系の無矛盾性の証明）に一定の期待を寄せてもいた．だが，ゲーデル（1906-1978）が 1931 年に不完全性定理の証明を公表すると，その期待は疑念へと確実に変化していった．［林 2021］でも［林 2022］でも繰り返しワイルの思索の書『数学と自然科学の哲学』の英語版（1949 年刊）に言及した．その書では，本編に続いて付録 A として「数学の構造」と題した 1 章が追加されている．その冒頭で，ワイルはヒルベルトが「世界から基礎の問題をきっぱりとわきへ追いやる」ために掲げた証明論（＝数学的内容を形式化して無矛盾性を超越的立場から示すこと）は，「1931 年におけるクルト・ゲーデルによる発見によって打ち砕かれた」と断定する．[2] ゲーデルの成果は，ワイルの晩年の心境に大きな影響を与えたのである．

ワイルは，ゲーデルの示した定理の内容をいま言及した箇所で次のようにまとめる．すなわち，ヒルベルトの形式主義において狭すぎることのない任意の形式的体系 $M$ の中で，次の二つの奇妙な事柄が起きるという．[3]

1）明らかに真であるが，しかしその形式主義の範囲で演繹できない比較的初等的な性質の算術命題 Φ を指摘することができる．

---

[1] ［Gödel 1986-1995］, 2, p. 268, 邦訳［飯田 1995］，36 頁．
[2] ［Weyl 1949］, p. 219, 邦訳［ワイル 1959］，247 頁．
[3] *Ibid*., 同邦訳，同頁．

2）$M$ の無矛盾性を表す式 Ω が，それ自身 $M$ の範囲内で演繹できない．


図 1：クルト・ゲーデル（1906-1978）

1）は任意の形式的体系の不完全性，つまり超数学において証明が可能でない命題の存在を述べ，ゲーデルの 1931 年論文の定理 6（第 1 不完全性定理，あるいは第 1 定理と称する）の主張を指示する．また 2）は，ゲーデルの同論文の定理 11（第 2 不完全性定理，あるいは第 2 定理と呼ぶ）の内容を示している．[4]　ワイルは，特に 2）に関連して次のように述べている．[5]

> ゲーデルの第 2 定理は〔第 1 定理にも比して〕，さらにいっそう平静さを失わせるものがある．なぜなら，それはわれわれに次の二者選択を突きつけるからである．すなわち，その形式系の無矛盾性を確立する推論は，その体系内に何ら形式的写しを持たないようなある議論を含まねばならない．言い換えれば，われわれは数学的帰納法の手続きを完全に形式化することに成功していないということである．あるいは，無矛盾性を厳密に「有限回でおさまる」証明をするという考えをまったく放棄せねばならないということのどちらかである．

前回の数学史講義に続き，われわれはワイルの著作から議論を始めた．今回の主人公はクルト・ゲーデルである．まずは，ゲーデルの生涯を振り返った上で，彼によって証明された定理の内実と意義を具体的に確認していこう．さらにゲーデルの数学的業績をふまえつつ，彼が数学に対して抱いていた独特な発想を明らかにしていきたい．

## 6.2　ゲーデルの生涯

クルト・フリードリッヒ・ゲーデルは 1906 年 4 月 28 日，当時オーストリア＝ハンガリー帝国に属していたブルノ（Bruno）に生まれた．[6]　両親と兄（4 歳上）の 4 人家族であった．

---

[4] 本稿を通じてゲーデルの原論文に関して，［Gödel 1986-1995］を参照する．特に 1931 年論文については，［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 144-195, 邦訳［ゲーデル 2006］，第 1 部，15-72 頁から引用する．

[5] ［Weyl 1949］, p. 220, 邦訳［ワイル 1959］，248 頁．［林 2021］では，ワイルの 1946 年論文における同様の記述を掲げておいた．［林 2021］，63 頁参照．なお〔　〕内は引用者（林）による補足である．本稿の以下において同じ扱いをする．

[6] 図 1 は，［Gödel 1986-1995］, 2, p.188 より採った．プリンストン高等学術研究所で 1958 年に撮影された写真である．

子供時代は好奇心にあふれ，質問好きで 4 歳になる頃には家族からは「なぜなぜ君」（der Herr Warum）とあだ名をつけられていた．[7] 学校に通うようになってからは数学と語学を好んだ．1918 年（第 1 次世界大戦を経て），チェコスロバキア共和国が独立宣言を行ってからは自分自身を「オーストリア人で，チェコスロバキアで異郷生活をする」者と考えていたという．[8]

1924 年にウィーン大学に入学する．当初物理学を志していたが, その後数学に転向する．影響を与えた指導者の一人にハンス･ハーンがいる．ハーンは関数解析の分野で「ハーン･バナッハの定理」でその名が知られている．[9] ハーンは様々な分野に興味を持っていたが, 1920 年代の初めから数学の哲学と数学の基礎に興味を示していた．ハーンもゲーデルも過去の哲学者の中ではライプニッツを尊敬していたという．ただしカントに関しては好みが分かれ，ゲーデルは愛好したがハーンは嫌悪していた．ハーンは，1922 年哲学者のモーリッツ・シュリックをウィーンに招いた．これを契機としてウィーンに一つの哲学者のグループが形成される．いわゆる「ウィーン学団」の始まりである．ゲーデルは 1926 年からこのグループに参加する．

ウィーン学団の人々は，ゲーデルと哲学上の見解を異にすることも多かったようだが, かえってゲーデルを惹きつけた．ハーンはテレパシーやオカルティズムにも気持ちを寄せることがあり，ゲーデルも同様に超心理学的な事柄に関心を持った．超感覚的知覚を信じるという点でゲーデルの根本思想に潜むプラトニズム（＝数学上の理想的存在を観念の中に実在することを認める立場）に対する共感は，この時代から生涯一貫したものとなる．それが学生時代から揺るがなかったことは重要な点である（本稿冒頭のエピグラフは典型的な表明である）．[10] そうした人間関係の中に，カルナップ（1891-1970）や，フォン・

---

[7] ［Dawson, Jr. 1997］, pp. 1-4, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，15-19 頁．ゲーデルの生涯については，ゲーデル著作集［Gödel 1986-1995］の編集者の一人でもある，ドーソン・ジュニアの著作に依る．

[8] *Ibid*., p. 15, 同邦訳，31 頁．

[9] ハーン・バナッハの定理とは次のようなものである．$X$ を実線形空間とする．その $X$ 上で定義された実数値汎関数（線形とは限らない）$p$ が,

$$p(u+v) \leqq p(u)+p(v) \ (u, v \in X) \tag{1}$$

$$p(\alpha u) = \alpha p(u) \ (u \in X, \alpha \geqq 0) \tag{2}$$

という式 (1), (2) を満たすものとする．また $f$ が $X$ の部分空間 $M$ で定義された線形汎関数で条件式 (3), 

$$f(u) \leqq p(u) \ (u \in M) \tag{3}$$

を満たすものとする．このとき，$f$ は不等式（3）を保ったままで $X$ 上の線形汎関数 $F$ に拡張される．すなわち，$X$ 上の線形汎関数 $F$ で

$$F(u) = f(u) \ (u \in M) \tag{4}$$

$$F(u) \leqq p(u) \ (u \in X) \tag{5}$$

を満たすものが存在する．黒田成俊によれば，この定理は関数解析における「three basic principles の一つ」と呼ばれており，位相的，代数的に普遍的な方法によって証明される基本的な定理である．ちなみに残りの二つは，「一様有界性の原理」，「開写像定理」である．［黒田 1980］，166-182 頁．

[10] ［Dawson, Jr. 1997］, pp. 30, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，50 頁．冒頭のエピグラフは 1964 年に記されたものである．

ノイマンとの共著でゲーム理論の著作［フォン・ノイマン，モルゲンスタイン 2009］で知られ，後に互いにアメリカに渡ってプリンストンで過ごす親友となるモルゲンシュタイン（1902-1907）ともここで出会った．[11]

ゲーデルは，ウィーンでの学習活動を通じて数学の基礎に関する独自のテーマを持つに至った．そして 1929 年に博士論文を書き上げた．[12] 論文のテーマは，ラッセルとホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』（*Principia mathematica*，1910 年刊）とヒルベルトとアッカーマンによる『理論的論理学の基本性質』（*Grundzüge der theoritischen Logik*，1928 年刊）といった数学の基礎を論じた著作の中で設定された公理系の完全性を証明することだった．[13]

ここで，ゲーデルの言う「完全性」とは，「限定された関数計算において表現可能なすべての妥当な論理式は，〔中略〕諸公理から形式的推論の有限列で導きだせる」ということである．そして「あらゆるに数についての命題（Zählausagan）の対からなる無矛盾な公理系は実現（Realisierung）を持つ〔モデルを持つ〕」．[14]「無矛盾」と述べているのは，有限で多くの形式的推論によってどんな矛盾も導かれないということである．通常,「ゲーデルの完全性定理」（不完全性定理ではない！）と呼ばれる成果を打ち出すに至った．

完全性定理を得たゲーデルは，いわゆる（1900 年の国際数学者会議（ICM）で提起された）ヒルベルトの第 2 問題，すなわち算術の公理の無矛盾性の証明に向かった．[15] 1930 年の秋までには，予想していなかった結果を見いだしていたようである．もちろんヒルベルトが望んでいた結果ではない．形式的に決定不可能な言明が存在すること（つまり第 1 不完全性定理），そして算術の無矛盾性が理論自身の中で表現可能でないばかりか，それ自身が決定不可能な言明の特定の例であること（つまり第 2 不完全性定理）を証明することになったのである．[16]

ゲーデルは，1930 年 8 月 26 日にカルナップとの会話で自分の成果を打ち明けたことが知られている．また，同年 9 月 5 日から 7 日にかけてケーニッヒスベルクで行われた「精密科学の認識論に関する会議」では，初日に呼び物になるセッションが催された．当時，数学の基礎をめぐって競合していた三派，すなわち論理主義，直観主義，形式主義を代表して，それぞれカルナップ，ハイティンク，フォン・ノイマンが講演をした．ここにゲーデルが参加して自らの成果について報告したのである．ゲーデルの結果の重要性は，必ずしも聴衆に理解されなかったようである．しかし，フォン・ノイマンは衝撃をすぐさま受

[11] *Ibid*., p. 27, 同邦訳，45 頁.
[12] 学位取得が認められたのは，1930 年 2 月 6 日においてである．［Gödel 1986-1995］, 1, p. 38.
[13]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 53f, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，81f 頁.
[14]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 60f.
[15] ヒルベルトの第 2 問題を含む ICM での問題提起については, 本数学史講義第 13 回においてふれた．［林 2020］，44-51 頁参照.
[16]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 61f, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，91ff 頁.

け止めた一人となった．[17] なお，この会議では，第 4 の立場を自任し，哲学者ウィトゲンシュタインの影響を受けたヴァイスマンがその 3 人に続けて「数学の本質，ウィトゲンシュタインの立場」という講演を行っている．[18]

1931 年に入ると，ゲーデルはウィーンの近しい人々の間に成果を伝えていく．そして 3 月までにはわれわれが次節で取り上げる 1931 年論文は出版された．この論文は，数理論理学，および数学の基礎に関する分野において，まさしく「今世紀〔20 世紀〕の最初の 80 年間で疑いなしに最もエキサイティングで，最も多く引用された論文」となったのである．[19] ヒルベルトの共同研究者の一人であったベルナイスに論文は 2 部送られた．もちろんそのうちの 1 部はヒルベルトに宛ててである．[20] 反響は様々であった．特にウィーンの外でも不完全性定理について発表を行う機会が増えるにつれ，ツェルメロのような手ごわい批判者が現れた．この集合論の公理（特に選択公理の導入で知られる）の提唱者は，ゲーデルの成果において論理的な正当性を受け入れることなしに，多分に感情的な反発に基づいて誤解を押し通そうとした．[21] ゲーデルは過去の論文をツェルメロに送ったり，書簡を交わしたりしたが，誤解は正されなかったようである．ツェルメロだけでなく，ゲーデルの不完全性定理に挑もうとする人は次々に現れた．そうしたことが影響を及ぼしたのか，次第にゲーデルは神経を病むようになっていく．以降，ゲーデルの身体的・精神的不安定な状況は続くことになる．[22] こうした点は，集合論の基礎を築いたカントルが様々な無理解にあって，次第に精神的に追い詰められていたことと状況が類似している．

ゲーデルは 1931 年論文を翌年になって教授資格論文として提出し，時を経て 1933 年私講師としてウィーン大学と契約した．[23] 当時，オーストリアはヒトラーが政権に就いたことにより政治的緊張が高まっていた．ゲーデルはナチズムとも反ユダヤ主義とも一線を画していたが，何か強い政治的主張を持っていたわけでもなかった．同じ頃，開設されて間もないプリンストン高等学術研究所からの招聘を受ける．それは，ゲーデルが本格的にプリンストンへと移る最初の契機となった．[24]

ゲーデルは 1936 年頃まで体調には恵まれなかった．1937 年になって回復方向へと向かったが，その間ゲーデルは集合論に関心を広げていた．論敵であったツェルメロが 1908 年に提唱した選択公理（以下では AC と称する）やヒルベルトの 1900 年の ICM で提

---

[17] *Ibid*., p. 68ff, 同邦訳，101-104 頁.

[18] このケーニッヒスベルクで行われた会議には，日本人数学者，末綱恕一，中村幸四郎の 2 名が参加していた．その会議での議論は熾烈を極めたという．［佐々木 1995］，下，245 頁，注（236）参照.

[19]［Gödel 1986-1995］, 1, p. 126.

[20]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 73ff, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，108-111 頁.

[21] ツェルメロによる集合論の公理については，本数学史講義第 11 回で彼の 1908 年論文の内容をもとにふれている．［林 2017］，74-78 頁参照.

[22]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 75-79, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，112-117 頁.

[23] *Ibid*., p. 86-89, 同邦訳，125-129 頁.

[24] *Ibid*., p. 90-98, 同邦訳，131-142 頁.

起された 23 の問題の第 1 問題，すなわち一般連続体仮説（以下では GCH と称する）についての考察を深めていった．後者は，

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\text{（} = \aleph_\alpha \text{ のすべての部分集合全体の濃度が，次の高い濃度になる）} \tag{6}$$

を示すことである．一般連続体仮説の特別の場合として，可算濃度 $\aleph_0$ と連続体濃度 $\aleph$ の間に，

$$2^{\aleph_0} < \aleph_1 < \aleph \tag{7}$$

を満たす中間的な濃度 $\aleph_1$ は存在しないことを主張する場合がある．このことは，無限集合論に創始者ゲオルク・カントルの 1883 年論文にすでに指摘されていたことである．[25] ゲーデルはまず，「ツェルメロ・フランケルの公理系（以下 ZF と称する）が無矛盾であるならば，ZFC（ZF に選択公理を付け加えた体系）が無矛盾である」という結果を 1937 年に公表する（その成果自体は，1935 年中に得ていたが，健康状態の悪化により公にするタイミングを逸していた）．[26] さらに，ZF が無矛盾であるとき，AC および GCH を加えた公理系も無矛盾であることを証明するに至る（事実の公表は 1938 年，証明の詳細は 1940 年になって明らかにされる）．[27] その後，この GCH 問題については，1960 年代になりコーエンによる一応の解決をみた．すなわち，AC や GCH を ZF から直接証明することはできず，それらのどちらかを否定したものを公理としてつけ加えても，あるいは両方の否定を公理としてつけ加えても無矛盾であることが示された．ゲーデルはかくして大きな三つの功績を数学基礎論，数理論理学の分野に残したことになる．あらためて繰り返すと，

1）一階の述語論理の完全性の証明，
2）いわゆる二つの不完全性定理（形式的自然数論を展開できる理論体系において，証明も論証もできない論理式が存在すること，算術の無矛盾性が理論自身の中で表現可能でないばかりか，それ自身が決定不可能な言明の特定の例であること），
3）集合論における AC，あるいは GCH の決定不能性の半面にあたる事柄，すなわち集合論の諸公理と相対的に無矛盾であること．

以上になる．こうした功績に対して飯田隆は次のように評している．[28]

> ゲーデルの仕事を貫くひとつの特徴は，〔中略〕シンタクスに関わる問題（言語としての形式体系それ自体がどのような構造を持つか）と，存在論的・意味論的な

[25] われわれの数学史講義第 12 回でも，連続体仮説についてふれたので参照のこと．［林 2018］，62f 頁．
[26]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 120-123, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，170-174 頁．
[27]［Gödel 1986-1995］, 2, pp. 26, 33-97.
[28]［飯田 1995］，3 頁．

問題（形式的体系によって記述されるはずの真理や対象の領域はそれ自体でどのような構造を持ち，形式的体系にどう関係しているか）とを明確に区別し，両者の関係を総合的に考察したということである．〔中略〕このような総合的観点は，実は，他ならぬゲーデルによって確立されたというべきであろう．

ヒルベルトの企図にもかかわらず，ゲーデル以前の数学の基礎をめぐる議論にこうした観点が欠けていたいうべきであろう．1940 年代以降ゲーデルの関心は，様々な分野を揺れ動き，数学の範疇から次第に哲学（数学の哲学）へと移行していく．

ゲーデルが集合論の分野に大きな貢献をなしていたのと同じ時期，身辺では大きな変化が生じていた．師のハーンは 1935 年 7 月に病死した．翌年 6 月には, ゲーデルを哲学サークル（ウィーン学団）に誘ったモーリッツ・シュリックがウィーン大学の学内で狙撃されて亡くなった．[29] 1938 年 3 月にはオーストリアはナチス・ドイツに併合される．その事態を受けて，カルナップ，メンガーといった研究仲間も亡命していた．ゲーデルはウィーンに一人残された形になってしまった．その 1938 年 4 月にはウィーン大学での講義資格を失ってしまう．ゲーデルは 1938 年から 1939 年の冬学期をプリンストンで過ごす招聘を受け，同年 10 月に出国する．すでに祖国から離れる心境になっていたかもしれない．渡米直前にアデーレと 9 月 20 日に結婚している．[30]

ゲーデルの身辺も穏やかではなくなってきた. プリンストン高等学術研究所に職を得て，ゲーデル夫妻はアメリカへの帰化の手続きを始める．1940 年には最初の書類を受け取っている．[31] 当初は常勤職でなかったが，1945 年末に常勤職となった．とはいえ，1941 年春から 1946 年までゲーデルは講義を行わなかった．当時，1930 年代から関心を持っていた選択公理と連続体仮説の独立性の問題に加えて，ライプニッツに関わる研究をしていたようである．それらの一部は第 2 次世界大戦後に刊行されることになる．[32]

1950 年代に入って特にゲーデルの数学の業績はない．ただ，1953 年 7 月 1 日付でプリンストン高等学術研究所の教授に昇進している．その頃には数学関係の学会にも参加しなくなり，また研究所内の講演会にも赴かず，セミナーも開かれなくなっていった．いわば「隠遁生活」が始まる．[33]

1963 年, ゲーデルの注意を引く数学的業績が生み出された．コーエンは独自の「強制法」により，選択公理の ZF 集合論の独立性と連続体仮説の ZFC からの独立性の証明に成功したのだった．ゲーデルはその同じ問題，すなわち古典的な集合論の公理（ZF 集合論）の上で選択公理及び一般連続体仮説の相対的な無矛盾性に取り組んでいた．そして 1938 年

---

[29]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 103, 111, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，150，160 頁.
[30] *Ibid*., pp. 127-130, 同邦訳，180-183 頁.
[31] *Ibid*., p. 155, 同邦訳，215 頁.
[32] *Ibid*., p. 159, 同邦訳，220 頁.
[33] *Ibid*., pp. 201ff, 同邦訳，275ff 頁.

から 1940 年にかけて論文を残していた．ゲーデルはコーエンと書簡をやり取りし，コーエンをサポートして成果を公表するよう励ました．[34]

ゲーデルは，公式には 1976 年にプリンストン高等学術研究所を退職する．晩年はうつ状態が進行し，妻アデーレの病も進んだために人に接する機会が失われていった．ゲーデルは，その頃何度か精神的肉体的危機を迎えた．パラノイアと拒食は悪化するばかりだった．1976 年 7 月に若き日からの友人モルゲンシュタインが亡くなる．この出来事はゲーデルを一層衰弱させてしまう．ゲーデルは，最終的に 1978 年 1 月 14 日にプリンストンの病院で死去する．死因は栄養失調によるものだった．妻アデーレは，3 年後 1981 年 2 月にゲーデルの後を追って亡くなった．[35]

### 6.3　1931 年論文と二つの不完全性定理

本節では，ゲーデルの名を高らしめた 1931 年論文（原題「『プリンキピア・マテマティカ』および関連した体系の形式的に決定不能な命題について 1」（‘Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter System 1’））について分析しよう．ゲーデルの論文の構成と証明をスケッチすることで，この定理の持つ意義を明らかにしていきたい．『プリンキピア・マテマティカ』とは，バートランド・ラッセルとアルフレッド・ノース・ホワイトヘッドによる著作を指す．1910 年に初版が刊行され，1925 年に第 2 版が刊行された．ゲーデルはこの 1931 年論文中，ラッセル，ホワイトヘッドの著作が採用する形式的体系を「PM」と略して表しているので，われわれもそれにしたがうことにする．ゲーデルの 1931 年論文の冒頭で，PM と並んで，ツェルメロ・フランケルの集合論の公理系（通常，ZF と称される）の二つが，「現在まで構築された形式系のうち，最も包括的なもの」であり，「今日の数学において使用されるすべての証明法が，それらの内部で形式化されてしまう」としている．[36]　不完全性定理の議論の前提として，一番幅広い数学的論理の展開が可能な土俵を設定しようとしていることは明らかである．ただし後ほど見るが，定理の証明に仮定されることには少し一般性を犠牲にした事柄が採用されている．

この論文は，算用数字で 1，2，3，4 と示された四つの章からなる．それらの内容は次の通りである．

1）第 1 不完全性定理（論文中の定理 6）の概説と第 2 不完全性定理（論文中の定理 11）の示唆，
2）第 1 不完全性定理の論証，

---

[34]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 221-224, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，299-302 頁.
[35] *Ibid*., pp. 252-258, 同邦訳，336-342 頁.
[36]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 144f, 邦訳［ゲーデル 2006］，15f 頁.

3）第 1 定理の「洗練と応用」[37]
4）第 2 定理の説明と証明のあらすじ.

また，この論文で採用した体系 *P*（「本質的にはペアノの公理系の上に PM の論理を建て増しすることで強化される体系」）に制限していて，「その他の体系への適用は簡単に示唆したに過ぎない．完全に一般的な形において結果を述べることとその証明は，まもなく出版される続編にて行う予定である」と述べられて，定理の証明の詳細を与えるとしている．[38] 論文タイトルに番号がふられているのはこうした理由による．ただ，実際に続編は出版されなかった.

ゲーデルの 1931 年論文は明晰だが，読んですぐにその主旨を理解できるものでもない．ただし，われわれの手元には［ゲーデル 2006］に収録された訳者林晋，八杉満利子による委細を尽くした解説があり，また［前原 1977］，［田中 2006-2007］第 3 巻，［菊池 2014］といった不完全性定理の解説書に加えて，［新井 2021］や［van Dalen 2013］のような数学基礎論の教科書も存在する．それらを参照しつつ，われわれは第 1 節から順にこのゲーデルの論文を読解していこう.

ゲーデルの 1931 年論文第 1 節は，「証明の基本思想」を概説する．基本用語や記号が次のように登場する．[39]

- 形式系（PM に限定する）の「論理式」→基本記号（変数，論理定数，括弧，または区切り点）の有限列.
- 「証明」→論理式の有限列.

ここで「超数学的考察」にとっては，「自然数を基本記号として使う」ので論理式は自然数の有限列になる．さらに，

- 「証明図」→自然数の有限列の有限列

であり，「数学的概念（命題）」は，自然数とそれらの有限列に関する概念（命題）となるので PM 自身の記号によって表示される．こうしてゲーデルはまず，ヒルベルトが企図した超数学，すなわち通常の数学を正当化するためのメタ・レヴェルの枠組を確保するのである.

以上の設定の上で，ゲーデルは体系 PM において決定不能な命題，つまり「*A*」も「*A*

---

[37]「洗練と応用」という語は，［ゲーデル 2006］の訳・解説者，林・八杉が用いているものである．［ゲーデル 2006］，300-304 頁.
[38]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 150f, 194f, 邦訳［ゲーデル 2006］，21，62 頁.
[39] *Ibid*., pp. 146-149, 同邦訳，17f 頁.

でない」も証明できない命題 $A$ を次のように作る．すなわち，まず自由変数を一つ持つPM の論理式を「類記号」（Klassenzeichen）と呼ぶ．この類記号の全体が一列に並べてあると想定し，その列の $n$ 番目を $R(n)$ と書く．また，類記号 $\alpha$ の自由変数に自然数 $n$ を代入して一つの論理式を作る．これを，

$$[\alpha\,;n]$$

と書く．このとき自然数の類 $K$ を

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n)\,;n] \tag{8}$$

で定義する．ただし $Bew\,x$ は「$x$ は証明可能な論理式である」を意味する．そして上に引いた線でその否定を意味する．式（8）に現れる概念はすべて PM で定義可能である．したがって，$K$ も PM で定義可能である．すなわち，論理式［$S\,;n$］の内容が，自然数 $n$ が $K$ に含まれるということを意味するような類記号 $S$ が存在する．すなわち，ある自然数 $q$ に対して，

$$S = R(\mathrm{q})$$

が成り立つ．このとき命題$[R(q)\,;q]$は PM において決定不能である．なぜなら, 命題$[R(q)$ $;q]$ が決定可能ならば，自然数 $q$ は $K$ に属する．しかし証明可能でないときに $K$ に属するのは矛盾である．反対に，$[R(q)\,;q]$ の否定が証明可能ならば $q \notin K$ である．したがって

$$\overline{\overline{Bew}}[R(q)\,;q] = Bew[R(q)\,;q]$$

が成り立つ．しかしこれは，$[R(q)\,;q]$ が証明可能になって矛盾である．すなわち，命題の証明可能性と「正しさ」が同値であるならば，数学に矛盾が生じるということである．

ゲーデル自身が，この決定不能命題の本質は「嘘つきのパラドックス」（Lügner）と密接に関連していると述べている．[40] 「嘘つきのパラドックス」とは，例えば，「この文章は嘘である」という文章は真であるとすると偽になり，偽であるとすると真になることを指している．ゲーデル自身の説明にもかかわらず，われわれが引用する［ゲーデル 2006］の訳・解説者によると，ゲーデルの定理の本質は，「変装したラッセルのパラドックスであることがわかるはずだ」，あるいは「第 1 不完全性定理の基本的仕組みに一番近いパラドックスはラッセルのパラドックスなのである」される．[41] ラッセルのパラドックスについては，同書（114f 頁）で紹介している．すなわち，「集合 $x$ は，$x$ 自身の要素とならない集合である」という条件を満たす集合 $x$ を集めて，集合類 $s = \{x|x \notin x\}$ を作ることができる．このとき，$s \in s$ と仮定すると，$s$ は条件を満たさないので，$s$ の要素ではない．

---

[40] *Ibid*., pp. 148, 同邦訳，20 頁.

[41]［ゲーデル 2006］，277f 頁.

また，$s \in / s$ と仮定すると条件を満たすので，s の要素となり，いずれも矛盾となる．われわれは，このパラドックスをより原型に近い形で以前に一度取り上げた．[42] カントルの無限集合論が「多数のものの集まり」を素朴に捉えたことから生じるパラドックスとして 20 世紀初頭にラッセルにより提示されたものである．ゲーデルがここで証明の根幹のアイデアを述べる上で, それが自己言及的であるために起こる決定不可能性という点では, 確かに指摘の通りである．ゲーデルは，体系 PM で決定不能な命題がヒルベルトが企図した超数学的考察に基づいて生じている点を強調している．加えて，その形式系の無矛盾性の証明に関する「驚くべき結果」（überraschenden Resultaten）が導かれるとし，第 2 不完全性定理を示唆している．[43]

1931 年論文の第 2 パートへと進もう．ここで詳しく主題が展開される．ここで形式系 $P$ が詳述される．[44] $P$ は本質的にペアノの公理系の上に PM の論理を立てますことによって得られるとされるが，基本記号として以下のものが提示される．

1）定数：～（～でない），∨（または），Π（すべてに対し），0（ゼロ），$f$（$\cdots$ の直後の数），（ ）（括弧）．
2）変数：
  - 第 1 型の変数（個体，すなわち 0 を含めた自然数のための変数）$x_1, y_1, z_1, \cdots$,
  - 第 2 型の変数（個体の類のための変数）$x_2, y_2, z_2, \cdots$,
  - 第 3 型の変数（個体の類の類のための変数）$x_3, y_3, z_3, \cdots$.

以下同様にして，変数について各自然数の型の変数が定められる．

また，第 1 型の記号を，

$$a, fa, ffa, fffa, \cdots$$

と定める．$a$ は 0 か，または第 1 型の変数とする．これによって「2 という数」は $ff0$ と形式系 $P$ の項で表すことができる. $n > 1$ の場合に第 n 型の記号とは, 第 n 型の変数を表す. そして，$b$ が第 n 型の記号で，$a$ が第 n+1 型の記号であるとき，$a(b)$ という形の記号の組み合わせを基本論理式という．また論理式の類を，すべての基本論理式を含み，さらに $a$, $b$ を含むとき，～（$a$），（$a$）∨（$b$），$x\Pi(a)$ を含む最小の類であると定義する．論理式の具体例として挙げられているのは，

$$Subst\ a\binom{v}{b} \equiv \text{論理式 } a \text{ のうちに自由に出現する変数 } v \text{ をすべて } b \text{ に置き換える} \quad (9)$$

[42]［林 2020］，26f 頁

[43]［Gödel 1986-1995］, 1, p. 150f, 邦訳［ゲーデル 2006］，21 頁.

[44] 1931 年論文の第 2 節について，煩雑を避けるために特に必要がある場合を除き，逐一原典の頁を言及しない．第 2 節全体としては，*Ibid*., pp. 150-181， 同邦訳，21-49 頁.

ことによって $a$ から得られる論理式を意味する．そして，文論理式とは，自由変数が一つも現れない論理式のことを指す．[45]

また論理式 $a$ が別の論理式 $b$ の「型持ち上げ」とは，$b$ のすべての変数の型を同じ数だけ（例えば，変数 $x_1$，$x_2$ を $x_2$，$x_3$ へと）増加させると $b$ が $a$ になる場合をいう．以上の設定の下で，論理式の公理 1 から 4 が置かれる．ただし，記号 ⊃，≡，= などは（PM において用いられるような）慣例にしたがう．特に ⊃ は，「ならば」を表している．

1）(a) $\sim(fx_1 = 0)$,
(b) $fx_1 = fx_1 \supset x_1 = y_1$,
(c) $x_2(0) . x_1\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(f(x_1)) \supset x_1\Pi(x_2(x_1))$.
2）$p$，$q$，$r$ に任意の論理式をあてはめることによってできる論理式について，
(a) $p \vee p \supset p$,
(b) $p \supset p \vee q$,
(c) $p \vee q \supset q \vee p$,
(d) $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \vee (r \vee q))$.
3）$a$ は任意の論理式，$v$ は任意の変数，$b$ は $v$ が自由に出現しない論理式，$c$ は $v$ と同じ型の記号，ただし $v$ が自由であるような $a$ の場所で，束縛される変数を含まない．
(a) $v\Pi(a) \supset Subst\, a\begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix}$,
(b) $v\Pi(b \vee a) \supset b \vee v\Pi(a)$.
4）集合の内包公理，
(a) $(\exists u)(v\Pi(u(v) \equiv a))$．[46]
5）型持ち上げによって生じる論理式，
(a) $x_1\Pi(x_2(x_1 \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$.

特に 1）は，自然数の公理（ペアノの公理）をあらわし，その 3 番目は「数学的帰納法」の原理を示す．加えて 4）は，$v$ と $u$ がそれぞれ n 型，n+1 型の任意の変数を表す．また，$a$ は $u$ が自由に表れない論理式をあてはめてできる任意の論理式である．さらに，論理式 $c$ が $a$ と $b$ から（あるいは $a$ から）の「直接の帰結」であるとは，

[45] *Ibid*., pp. 152f,　同邦訳，23 頁では，「自由変数はよく知られた方法で定義される」としている．通常自由変数とは，ある論理式の中で，$\forall x$（すべての $x$ に対して），あるいは $\exists x$（ある $x$ が存在して）のような記号が現れて変数 $x$ を束縛することのない場合を指す．現代の数学基礎論における自由変数のより厳密な定義は，［新井 2021］，40f 頁参照．

[46] 存在記号は原論文では，$E$ と記されている．原論文の記法を尊重する立場ではあるが，われわれの現代の慣習に沿って，本稿の以降の場面でも ∃ と表記する．

$a$ が（ ～（$b$）∨ $c$）である，または（任意の変数 $v$ に対して）$c$ が $v\Pi(a)$

であることをいう．そして超数学のキーワードである「証明可能な論理式」の類は，公理を含み直接の帰結であるという関係に関して閉じている最小の類と定義される．以上が形式系 $P$ の概略である．

ここで, このゲーデル 1931 年論文において一つの大きなポイントである, いわゆる「ゲーデル数」が定義される．具体的には体系 $P$ の基本記号に自然数が次のように対応づけられる．

$$\text{“}0\text{”} \to 1,\ \text{“}f\text{”} \to 3,\ \text{“}\sim\text{”} \to 5,\ \text{“}\vee\text{”} \to 7,\ \text{“}\Pi\text{”} \to 9,\ \text{“}(\text{”} \to 11,\ \text{“})\text{”} \to 13,\ \cdots \quad (10)$$

さらに n 型の変数には，$p^n$（ただし $p$ は 13 より大きい素数）を対応させる．そのように基本記号の任意の有限列には自然数の有限列が 1 対 1 に対応する．そして自然数の列，

$$n_1, n_2, \cdots, n_k \to 2^{n_1}\, 3^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \quad (11)$$

という対応が生まれる．ただし $p_k$ は小さい方から $k$ 番目の素数を表す．こうして任意の基本記号だけでなく，任意の基本記号列 $a$ に対して，自然数が 1 対 1 に割り当てられる．その割り当てられたゲーデル数を $\Phi(a)$ と表す．

いま超数学の世界における対象を表す式を「対象式」と呼ぶ．[47] 対象式 2 = $ff0$ であり，記号 0 のゲーデル数が 1，記号 $f$ のゲーデル数が 3 である．これらを並べてできる有限列ということになる．したがって，

$$\text{対象式 2 のゲーデル数} = 2^1 \times 3^3 \times 5^3 = 6750$$

となる．結局, 初等整数論における素因数分解の一意性が保証となって,「変数」,「論理式」,「文論理式」，「公理」，「証明可能な論理式」といった超数学の概念に自然数間の類や関係が割り当てられる．基本記号や基本記号の間の関係を $R(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とすると，それに対して $x_i = \Phi(a_i)$（$i = 1, 2, \cdots, n$），$R(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ となる $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が存在するときに，$R'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が成り立つような自然数間の類関係を割り当てる．この 1931 年論文が証明しようとする体系 $P$ に決定不能な命題が存在するという命題は，

$a$ も $a$ の<u>否定</u>も<u>証明不可能な論理式</u>である<u>文論理式</u>が存在する

と表現できるが，下線部には自然数の類や関係が割り当てられるのである．[48]

ゲーデル数の定義が終わった後，形式系 $P$ から離れて（原始）再帰的関数が定義される．[49] そして 45 個の再帰的関数が例示され，超数学の内容をコード化する作業が完了

---

[47]［前原 1977］，4 頁の名称による．

[48]［Gödel 1986-1995］, 1, p. 156f, 邦訳［ゲーデル 2006］，27 頁．

する．まず数論的関数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が，別の数論的関数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ と $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ から再帰的に定義されるとは，任意の非負整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, k$ に対して

$$\phi(0, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_2, \cdots, x_n) \tag{12}$$

$$\phi(k+1, x_2, \cdots, x_n) = \mu(k, \psi(k, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n) \tag{13}$$

が成り立つことをいう．また数論的関数 $\phi$ が再帰的であるとは，$\phi$ で終わる次の条件を持つ数論的関数の有限列 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ が存在することをいう．すなわち，

1）この列の任意の関数 $\phi_k$ は，先行する二つの関数から再帰的に定義されているか，
2）あるいは，先行する関数から代入によってできる（すなわち，$\phi_k(x_1, x_2) = \phi_p(\phi_q(x_1, x_2), \phi_r(x_2))$．ただし $p, q, r < k$ のように，既出の関数の引数に既出の関数が代入される）か，[50]
3）または，最終的に定数か，（次の数を表す）直後関数（Nachforgenderfunktion）$x + 1$ になる．

というものである．[51] そして自然数間の関係 $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が再帰的であるとは，任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \sim [\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0]$$

が成り立つような（原始）再帰的関数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が存在することをいう．[52] ゲーデルは特に関数 $x + y$，$x \cdot y$，$x^y$ や，関係 $x < y$，$x = y$ が再帰的であると指摘している．その上で 45 個の再帰的な関数を列挙している．

1931 年論文における 45 個の再帰的関数（と，さらにもう一つの再帰的でない関係）す

---

[49]［ゲーデル 2006］，67 頁における林･八杉の訳注［28］によれば，このゲーデル 1931 年論文で「再帰的」（recursiv）と呼ばれる関数は，すぐに「原始」（primitive）という形容詞をつけて「原始再帰的関数」と呼ばれるようになった．

[50] 括弧の内の説明は 1931 年論文の原注 27）による．［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 158f, 邦訳［ゲーデル 2006］，28 頁．

[51]［ゲーデル 2006］，67 頁における林・八杉の訳注［29］によると，ここでの（原始）再帰的関数の定義には，いわゆる射影関数 $U_i^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$ がない．現代的数学基礎論では，再帰的関数を定義する際，初期関数（射影関数，後者関数（＝直後関数），零関数（$zero() = 0$））から出発して，合成，再帰的定義，または最小化作用素を有限回施して得られる関数と定義される．［新井 2021］，61f 頁参照．

[52] ゲーデル論文の原注 29）（［Gödel 1986-1995］, 1, p. 158f, 邦訳［ゲーデル 2006］，28 頁）で，この箇所以降，記号 $\sim$ は同値を意味し，また記号 $\rightarrow$ により「ならば」を意味する．これは，ゲーデルによればヒルベルト，アッカーマンの共著にからなる著作『理論的論理学の基本性質』で用いられているものとされる．ヒルベルトは，後年の著作，例えばベルナイスとの共著『数学の基礎』第 2 巻（初版 1939 年刊）でも同じ記号を同じ意味で使用している（［Hilbert and Bernays 1968-1970］, 2, S. 388ff, 邦訳［ヒルベルト，ベルナイス 1993］，23ff 頁）．ゲーデルにとって，ヒルベルトの超数学の内容を表現する記号として一般的に共有されているものと考えているのだろう．

べてをここで掲げることは避けるが，代表的なものは確認しておこう．これらのよって超数学の概念のコード化がなし得る．なお以下で記号 ≡ は，定義として同値であることを表す．冒頭の第 1 と第 2 は以下の通りである．

- 1.「$x$ は $y$ で割り切れる」: $x/y \equiv (\exists z)[z \leq x \,\&\, x = y \cdot z]$.
- 2.「$x$ は素数である」: $Prim(x) \equiv \overline{(\exists z)}[z \leq x \,\&\, z \neq 1 \,\&\, x/y]$

また 23 番目は（20 番目に基本論理式が定義された上で），「x は論理式である（論理式列 n の最後の要素である）」が次のように定義される．

$$Form(x) \equiv (\exists n)\{n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x \cdot [l(x)]^2} \,\&\, FR(n) \,\&\, x = [l(n)]\,Gl\,n\}. \tag{14}$$

この式（14）で $Pr(n)$ は，（大きさの順で）$n$ 番目の素数を表す関数（定義 5），$l(x)$ は $x$ に割り当てられた（ゲーデル）数の列の長さ（定義 7），$FR(x)$ は $x$ の論理式の列を意味する（定義 22）．$n\,Gl\,x$ は，数 $x$ に割り当てられた数の列の $n$ 番目の要素を表す（定義 6）．ただし, それぞれの論理式は基本論理式であるか, 列の先に現れている論理式から否定（定義 13），離接（Disjunktion）（定義 14），普遍化（定義 15）のどれかにより生じたものとされる．[53]　また 42 番目に「$x$ は公理である」，さらに 43 番目に以下の通り，

- 43.「$x$ は，$y$ と $z$ の直接の帰結である」:

$$Fl(x, y, z) \equiv y = z\,Imp\,x \vee (\exists v)[v \leq x \,\&\, Var(\mathrm{v}) \,\&\, x = v\,Gen\,y] \tag{15}$$

---

[53] 式（14）で挙げられている諸概念は，次のように定義される．ただし，$R(x)$ は（ゲーデル）数 $x$ だけからなる数の列（定義 9），$E(x)$ は括弧入れの操作（定義 10），$*$ は二つの数の有限列の連結操作を表す（定義 8）．

- 13.「否定」: $Neg(x) \equiv R(5) * E(x)$.
- 14.「離接」: $x\,Dis\,y \equiv E(x) * R(7) * E(y)$.
- 15.「普遍化」: $x\,Gen\,y \equiv R(x) * R(9) * E(y)$.
- 20.「基本論理式」: $Elf(x) \equiv (\exists y, z, n)(y, z, n \leq x \,\&\, Typ_n(y) \,\&\, Typ_{n+1}(z) \,\&\, x = z * E(y))$.

また，定義 20 における $Typ_n(x)$ は，$x$ が第 $n$ 型の記号であることを示す（定義 19）．さらに 1931 年論文の原注 35）では，式（14）の右辺における不等式の評価 $n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x \cdot [l(x)]^2}$ に関して言及している．すなわち，

> $x$ にいたる最短の論理式列の長さは，$x$ の部分論理式の総数以下である．一方，長さ 1 の部分論理式は，たかだか $l(x)$ しかない．長さ 2 では，たかだか $l(x)-1$ である．以下同様に考えると，全体でたかだか $\dfrac{l(x)[l(x)-1]}{2} \leq [l(x)]^2$ となる．したがって，$n$ の素因数はすべて $Pr\{[l(x)]^2\}$ 以下としてよい．またその総数は，$\leq [l(x)]^2$ であり，さらに指数（それは $x$ の部分論理式である）は $\leq x$ である．

［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 162-167, 邦訳［ゲーデル 2006］，332-35 頁．

と述べられている．[54] そして 45 番目に $x\,B\,y$（$x$ は論理式 $y$ の証明である）が続き，[55] 最後の 46 番目に再帰的関係とならないことを断った上で，

- 46.「$x$ は証明可能な論理式である」：

$$Bew(x) \equiv (\exists y)y\,B\,x \tag{16}$$

が掲げられている．以上の設定の下，定理 5 として「任意の再帰的関係が体系 $P$ の中で定義可能なこと」が，（ゲーデルによれば）「正確に，しかも P の論理式の内容的解釈を引き合いに出さず」に数値列として表現できることを主張する．

いよいよ主定理である定理 6 に入る．その導入にあたり，ゲーデルは「われわれは今や議論の目標点に到達した」と宣言する．定理 6 は以下の通りである．

> 任意の論理式の類 $\kappa$ が $\omega-$ 無矛盾で再帰的であれば，$v\,Gen\,r$ と $Neg(v\,Gen\,r)$ のどちらも $Flg(\kappa)$ に属さないような再帰的な類記号 $r$ が存在する（ただし $v$ は $r$ の自由変数である）．

ここで，定理 6 の条件に関わることに言及しておく．いま定理 6 で提起されるように，$\kappa$ を任意の論理式の類とする．このとき，$\kappa$ の論理式全体とすべての公理を含み，さらに直接の帰結という関係に関して閉じている最小の論理式の集合を $Flg(\kappa)$（$\kappa$ の帰結集合（Folgerungsmenge von $\kappa$)）としている．さらに重要な仮定である「$\kappa$ が $\omega-$ 無矛盾」について述べておこう．ゲーデルの 1931 年論文で「$\omega-$ 無矛盾である」とは，次のような類記号 $a$ が存在しないことをいう（ただし，$v$ は類記号 $a$ の自由変数）．

$$(n)\left[sb\left(a\ \begin{matrix} v \\ Z(n) \end{matrix}\right) \in Flg(\kappa)\right] \,\&\, \left[Neg(v\,Gen\,a) \in Flg(\kappa)\right] \tag{17}$$

式（17）内に登場する $sb\left(x\ \begin{matrix} v \\ y \end{matrix}\right)$ は定義 31 において掲げられている置き換えの操作を表現している．[56] ここで，ゲーデルは，

$$\omega- \text{無矛盾な体系である} \Rightarrow \text{無矛盾な体系である．}$$

---

[54] 式（15）の右辺において，$x\,Imp\,y \equiv [Neg(x)]Dis\,y$（定義 32），$Var(x) \equiv (\exists n)[n \leq x \,\&\, n\,Var\,x]$（定義 12），$n\,Var\,x \equiv (\exists z)[13 < z \leq x \,\&\, Prim(z) \,\&\, x = z^n] \,\&\, n \neq 0$（定義 11）．後の二つは，前者が変数を，後者が第 $n$ 型の変数を表す．また，定義 25，26 で論理式 x の中における「自由変数」，「自由変数として現れる」が定義されている．*Ibid*., pp. 164-169, 同邦訳，33-39 頁．

[55] $x\,B\,y \equiv Bw(x) \,\&\, [l(x)]\ Gl\,x = y$ と定義される．ここで $Bw(x)$ は定義 44 に置かれていて，「$x$ は証明図である」＝「論理式の有限列で，各論理式が公理であるか，すでに現れた二つの論理式の直接の帰結となっている」を意味する．*Ibid*., pp. 170f, 同邦訳，39 頁．

が成り立つこと指摘する．しかし逆は成り立たないこともあわせて注意している．したがって，$\omega-$ 無矛盾であることは，単なる無矛盾性よりも強い条件となる．[57]

主定理である定理 6 の証明の概略を追っておこう．まず，再帰的で $\omega-$無矛盾な論理式の集合 $\kappa$ を任意にとる．そして定義 44 で示した $Bw(x)$，すなわち「$x$ は証明図である」の類似として

$$Bw_\kappa(x) \equiv [n \leq l(x) \rightarrow A_x(n\,Gl\,x) \vee (n\,Gl\,x) \in \kappa \vee (\exists p, q)\{0 < p, q < n \,\&\, Fl(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)\}] \,\&\, l(x) > 0 \tag{18}$$

を掲げている．なお，途中に現れる $A_x(x)$ は定義 42 に登場し，「$x$ は公理である」を意味する．同様に定義 45，46 の類似として

$$x\,B_\kappa\,y \equiv Bw_\kappa(x) \,\&\, [l(x)]\,Gl\,x = y \quad (x \text{ は論理式 } y \text{ の } \kappa- \text{証明}), \tag{19}$$

$$Bew_\kappa(x) \equiv (\exists y)y\,B_\kappa\,x \quad (x \text{ は } \kappa- \text{証明可能な論理式}) \tag{20}$$

と定義する．ここで新たな関係を定義する．

$$Q(x, y) \equiv \overline{x\,B_\kappa\,[sb\left(y \begin{smallmatrix} 19 \\ Z(y) \end{smallmatrix}\right)]} \tag{21}$$

とすると，これは $x\,B_\kappa\,y$ と $sb\left(y \begin{smallmatrix} 19 \\ Z(y) \end{smallmatrix}\right)$ が再帰的なので（前者は式（18），（19）により，後者は定義 17（$Z(n) \equiv n\,N[R(1)]$，すなわち $Z(n)$ は数 $n$ に対する数字である）と定義

[56] 定義 31 は以下の通りである．

• 31．（式（9）で定義された論理式）：

$$sb\left(x \begin{smallmatrix} v \\ y \end{smallmatrix}\right) \equiv sb_{A(v,x)}\left(x \begin{smallmatrix} v \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

ただし，$A(v, x)$ は，$x$ の中で $v$ が自由変数であるような場所の総数を表す（定義 30）．*Ibid.*, pp. 166f, 同邦訳，36f 頁．

[57] $\omega-$ 無矛盾であることを少し言葉を変えて説明する．$\kappa$ を論理式の集合とするとき，論理式 $a$ が証明できることを，$\kappa \vdash a$ と表すならば，

$$\kappa \vdash a, \text{ かつ } \kappa \vdash \sim a$$

が成り立つとき，$\kappa$ は矛盾するという．$\kappa$ が矛盾しないとき，無矛盾であるという．一方，

$$\forall n\,[\kappa \vdash F(n)], \text{ かつ } \kappa \vdash \sim F(n)$$

となる論理式 $F(n)$ が存在するとき，$\omega-$ 矛盾するという．$\omega-$ 矛盾しないときを $\omega-$ 無矛盾であるという．無矛盾な論理式の集合が $\omega-$ 矛盾することはあり得る．前原昭二の例示によると，「1 階の対象を自然数と理解するすれば」，$\omega-$ 矛盾する $\kappa$ は内容的な矛盾を含んでいる．「ただ，その内容的な矛盾が，必ずしも形式的な矛盾を導くとは限らない，というに過ぎない」．もちろん，矛盾する論理式の集合 $\kappa$ は，「必ず $\omega-$ 矛盾するから」，$\omega-$ 矛盾は，ただの矛盾よりも弱い条件になっているということである（［前原 1977］，127ff 頁）．また，［ゲーデル 2006］の林・八杉の解説によると，この $\omega-$ 無矛盾という仮定は，「過剰に強い仮定」である．また，「便宜的と言われても仕方がないものだった」．ゲーデルの論文以降，この仮定はほとんど使われることはなかったという．1936 年には，ロッサーによって無矛盾性だけを仮定して決定不可能性が証明された．［ゲーデル 2006］，293f 頁．

31 により再帰的となる．また，定理 5 と $(x)[Bew(x) \rightarrow Bew_\kappa(x)]$ より，自由変数として素数である 17，19 を持つ以下の関係記号 $q$ が存在する．

$$\overline{x\, B_\kappa\, [sb\left(y\ \begin{matrix}19\\ Z(y)\end{matrix}\right)]} \rightarrow Bew_\kappa\, [sb\left(q\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\ \begin{matrix}19\\ Z(y)\end{matrix}\right)] \tag{22}$$

$$x\, B_\kappa\, [sb\left(y\ \begin{matrix}19\\ Z(y)\end{matrix}\right)] \rightarrow Bew_\kappa\, [Neg(sb\left(q\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\ \begin{matrix}19\\ Z(y)\end{matrix}\right))] \tag{23}$$

その上で

$$p = 17\ Gen\ q \tag{24}$$

とすると，$p$ は自由変数 19 を持つ類記号になる．また，

$$r = sb\left(q\ \begin{matrix}19\\ Z(p)\end{matrix}\right) \tag{25}$$

とおく．すると，$r$ は自由変数 17 を持つ再帰的な類記号になる．このとき，式（24），（25）から，

$$\begin{aligned} sb\left(p\ \begin{matrix}19\\ Z(p)\end{matrix}\right) &= sb\left(17\ Gen\ q\ \begin{matrix}19\\ Z(p)\end{matrix}\right) \\ &= 17\ Gen\ sb\left(q\ \begin{matrix}19\\ Z(p)\end{matrix}\right) = 17\ Gen\ r \end{aligned} \tag{26}$$

が成り立つ．さらに，式（25）により，

$$sb\left(q\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\ \begin{matrix}19\\ Z(y)\end{matrix}\right) = sb\left(r\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\right) \tag{27}$$

が成り立つ．よって式（22），（23）において，$y$ に $p$ を代入し，さらに式（26），（27）を利用すれば，次が成り立つ．

$$\overline{x\, B_\kappa\, (17\ Gen\ r)} \rightarrow Bew_\kappa[sb\left(r\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\right)] \tag{28}$$

$$x\, B_\kappa\, (17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_\kappa[Neg(sb\left(r\ \begin{matrix}17\\ Z(x)\end{matrix}\right))] \tag{29}$$

以上の結果に対して，次の二つの場合が示される．

1）$17\ Gen\ r$ は $\kappa-$ 証明可能でない．[58]
2）$Neg(17\ Gen\ r)$ は $\kappa-$ 証明可能でない．

1）の成立の理由は，（背理法により）もし成り立たないとすると，式（20）から $n\ B_\kappa$（17

[58] $x \in Flg_\kappa(x)$，あるいは $(x)[Bew_\kappa(x) \sim x \in Flg_\kappa(x)]$ なので，$Bew_\kappa(x)$ ということであると論文原注 45）にある．

*Gen r*）となる *n* が存在する．すると，式（29）より，

$$Bew_{\kappa}[Neg(sb\begin{pmatrix} r & 17 \\ & Z(n)\end{pmatrix})]$$

となる．ところが仮定より，17 *Gen r* は $\kappa$− 証明可能なので，$sb\begin{pmatrix} r & 17 \\ & Z(n)\end{pmatrix}$ も $\kappa$− 証明可能も導かれる．したがって，$\kappa$ は矛盾する．すなわち（注 57 でも言及したように）$\omega$− 矛盾となる．2）の成立の理由は，上の 1）より，17 *Gen r* は $\kappa$− 証明可能でない．すると，式（20）から $(n)\overline{n\ B_{\kappa}\ (17\ Gen\ r)}$ が成り立つ．したがって，式（28）により $(n)Bew_{\kappa}$ $[sb\begin{pmatrix} r & 17 \\ & Z(n)\end{pmatrix}]$ であるが，$Bew_{\kappa}[Neg(17\ Gen\ r)]$ を合わせて考えると $\kappa$ の $\omega$− 無矛盾に反する．かくして 17 *Gen r* は $\kappa$ から決定不能になることが示された．

定理 6 の証明を終え，ゲーデル自ら次のような指摘をしている．[59]

> 以上の証明は構成的であることが容易にわかる．すなわち，次に述べることが直観主義的に反論できないやり方で証明されたのである．定義された論理式の類 $\kappa$ が任意の再帰的に与えられたとする．そのとき，もし文論理式 17 *Gen r*（実際に明示され得る）が（$\kappa$ から）形式的に決定されているならば，次のものを実際に提示できる．
>
> 1）*Neg*（17 *Gen r*）の証明,
>
> 2）任意の *n* に対して $sb\begin{pmatrix} r & 17 \\ & Z(n)\end{pmatrix}$ の証明.
>
> つまり，17 *Gen r* が形式的に決定されるならば，その結果として $\omega$− 矛盾が実際に提示されるという結果を得るのである．

ゲーデルは，当然ヒルベルトの形式主義的な試みに対して，直観主義者たちが何を批判の論点にしたかは熟知している．例えば，ヒルベルトが 1890 年代に解決した「ゴルダン問題」について必要な有限個の不変式（基底）の存在を非構成的に示したことに対して，ゴルダン自身から「これは数学ではない．神学である」と揶揄されたことを想起したい．[60] またゲーデルは次のようにも述べている．[61]

> 定理 6 の証明においては，体系 *P* の性質としては，次のものの他に何も使用していない．

[59]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 176f, 邦訳［ゲーデル 2006］，46 頁.

[60]［林 2020］，32f 頁．ブラウワーも，このヒルベルトのゴルダン問題の解決法について批判的だったことは同様である．［ゲーデル 2006］，204 頁.

[61]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 180f, 邦訳［ゲーデル 2006］，48f 頁.

1）公理の類と推論規則（すなわち，直接の帰結という関係）は，（基本記号を何らかの方法で自然数に置き換えれば）再帰的に定義可能である．

2）すべての再帰的関係は，（定理 5 の意味で）体系 $P$ の中で定義可能である．

こうしてヒルベルトの超数学の理念をくみ取り，その上でブラウワー等の批判にも耐え得る方法で，なお決定不能な命題を通常の推論規則に基づいて構成的に提示したのである．

われわれにとって中心的関心であった第 2 節は終了し，次の 3 節目に移行する．先にわれわれはこの第 3 節の内容を第 1 定理の「洗練と応用」とした．具体的には，第 2 節の証明において構成した決定不能な論理式を「算術的」という概念の下で再構成することである．ここで関係（類）が算術的とは, 自然数に関する加法, 乗法に加え, 論理的定数 $\vee$, $\overline{\phantom{x}}$, $(x)$，= のみを用いて定義できる（ただし，$(x)$，= は自然数のみを参照する）ということを意味する．そして，

- 定理 7：任意の再帰的関係は算術的である．
- 定理 8：定理 6 で言及したすべての形式系には，決定不能な算術的命題が存在する．

さらにこの定理 8 の応用となる定理 9，定理 10 が続く．そこでは，「狭義関数計算系」＝（現在の基礎論の用語で）第 1 階述語論理の体系の中に，決定不能な問題が存在することを示す．

第 4 節は第 2 不完全性定理についての言明を含んでいる．この 1931 年論文の第 2 節の定理 6 の結果から，体系 $P$ の無矛盾性の証明に関する「不思議な」（merkwürdig）結論が導かれるとする．その結論とは，

> $\kappa$ を任意の再帰的で無矛盾な論理式の類とする．そのとき，$\kappa$ が無矛盾であることを意味する文論理式は，$\kappa-$ 証明可能でない．特に，$P$ が無矛盾であるならば，$P$ の無矛盾性は $P$ において証明不可能である．

と提示される．記号として「$\kappa$ が無矛盾である」を $Wid(\kappa)$ と書き，

$$Wid(\kappa) \equiv (\exists x)[Form(x) \mathbin{\&} \overline{Bew_{\kappa}}(x)]$$

と定義されている．この定理 11 は, 証明の概略を示すにとどめている．この論文は末尾に, 続編が予定されていて, その場で定理 11 の証明の詳細を述べることを示唆している. だが, 実際には出版されなかった．

定理 11 の証明のアウトラインは次の通りである．まず論理式の再帰的な類 $\kappa$ を一つ選ぶ．定理 6 で 17 $Gen\ r$ が $\kappa-$ 証明可能でないことを示したが，そこでは $\kappa$ の無矛盾性が根拠として用いられていた．すなわち，

$$Wid(\kappa) \rightarrow \overline{Bew_\kappa}(17\ Gen\ r) \tag{30}$$

である．$Bew_\kappa(x) \equiv (\exists y)y\ Bew_\kappa\ x$ から

$$Wid(\kappa) \rightarrow (x)\overline{x\ Bew_\kappa(17\ Gen\ r)}$$

となる．ところが，式（26）より，$17\ Gen\ r = sb\left(p\ \begin{matrix}19\\Z(p)\end{matrix}\right)$ となり，

$$Wid(\kappa) \rightarrow (x)\overline{x\ Bew_\kappa\ sb\left(p\ \begin{matrix}19\\Z(p)\end{matrix}\right)}$$

となり，式（21）から，

$$Wid(\kappa) \rightarrow (x)Q(x, p) \tag{31}$$

となる．いま，$Wid(\kappa)$ を表現する形式系 $P$ の文論理式を $w$ とする．[62]　式(21)，(22)，(23) によると関係 $Q(x, p)$ は，関係記号 $q$ で表現される．よって式（25）から，$Q(x, p)$ は $r$ で表現され，命題 $(x)Q(x, p)$ は，$17\ Gen\ r$ で表現できる．したがって，一方では式（31）から $w\ Imp\ (17\ Gen\ r)$ が $P$ で証明可能である．[63]　つまり，もし $\kappa$－ 証明可能ならば，$17\ Gen\ r$ が証明可能になってしまう．ところが，もう一方で式（30）が成り立っているので，結局 $\kappa$ が無矛盾でないことになってしまう．以上証明の概略であったが，ヒルベルトが最も重んじた問題の一つであった形式系の無矛盾性の証明は，それ自体決定不能であることが示された．むしろ第 1 定理における決定不能命題の一例にもなっているということである．ゲーデルは，以上のように第 2 定理について述べた後，「定理 11 に対する証明全体は逐語的に集合論の公理系 $M$ や古典数学 $A$ に移し替えられ，したがって，さらに次の結果を与える」としている．すなわち，「$M$（あるいは $A$）が無矛盾ならば，$M$（あるいは $A$）で形式化される $M$（あるいは $A$）の無矛盾性の証明は存在しない」．

とはいえ，ゲーデルはこの 1931 年論文の終わり近くで次のように述べている．[64]

> 定理 11 は（そして $M$，$A$ についての対応する結果も），ヒルベルトの形式主義的視点とまったく矛盾していないことをはっきり注意しておこう．ヒルベルトの視点は，有限的方法によって実行された無矛盾性の証明の存在を前提としているだけであり，$P$（あるいは $M$，$A$）では表現できないような有限的証明があることも考え

---

[62] この文論理式 $w$ の存在について，この 1931 年論文の第 2 節全体と第 4 節のこの箇所までに定義された概念は，すべて形式系 $P$ で表現できる，あるいは証明できることが指摘されている．「体系 $P$ で形式化されているような，古典数学の普通の定義と証明方法が使われてきたからである」というのがゲーデルの述べる理由である．*Ibid.*, pp. 192f, 同邦訳，60 頁．

[63] 第 2 節の定義 32 で，$x\ Imp\ y \equiv [Neg(x)]Dis\ y$ と定義されていた．

[64]［Gödel 1986-1995］, 1, pp. 194f, 邦訳［ゲーデル 2006］，61 頁．

得るからである．

ゲーデルは単純にヒルベルトのプランを否定したのではないし，ましてや数学の論証は不完全だなどという極論を吐いているわけでもない．ここで，われわれは形式系 $P$ の無矛盾性を表現する論理式 $F$ が与えられたときに，どのようにしてその非形式的内容が表現されているかを判別するかという問題に直面する．形式化された記号列によって 1 段階上の立場を取って正当化する試みは成功しないということである．それよりもむしろ，ライプニッツの時代からあった論理と数学の形式化というもくろみに対して，形式化の恣意性や不確定性から逃れられないことを数学自身の推論の力で示した，それほど通常の数学体系は強力であるということをこの不完全性定理は示しているともいえるのである．[65]

### 6.4　不完全性定理の意義

以上ゲーデルの 1931 年論文の内容を追究してきた．ここでまとめとして不完全性定理の意義を確認しておこう．その際，本稿の冒頭 6.1 節で掲げたヘルマン・ワイル『数学と自然科学の哲学』英語版からの引用を想起しよう（注 5 該当箇所参照）．またワイルは引用した箇所以外にもゲーデルの 1931 年論文に対する印象とゲーデルの根底にある思想に言及している．[66]

> ゲーデルは，超越的論理を根本的に信頼していて，われわれの論理の光学はほんのわずか焦点から外れていると考えようとし，それを何かしら少し修正すればわれわれははっきり見るだろうし，そうすれば誰でもわれわれが正しく見ていることに同意するだろうという希望を持っている．しかしこの信頼を共有しない者は，$Z$ のような〔ツェルメロの〕体系の中に，あるいはヒルベルトの体系の中にすら高度の任意性によって攪乱されるだろう．

ワイルは，数学の形式化に関してペシミスティックである．ワイルによればゲーデルもヒルベルトと共通のオプティミズムに支えられていると考えているようである．だが状況は，

---

[65]［ゲーデル 2006］の林・八杉の解説は次のように述べている（271 頁）．現代の数学基礎論研究者の考えとして尊重すべきものだろう．

> 集合論，ブラウワーの直観主義，クロネカーの代数的数学基礎論などは，その数学的直観を表現するための可能な多くの表現形式の一つに過ぎないのである．〔中略〕不都合が起これば数学者は，いつでもそれを別な標準に置き換える用意を持っている，という意味なのである．
>
> 論理と数学は，人間の知的活動のうちで，最も形式化を行い易い分野であり，それゆえに，他の分野に先駆けて，形式系や，ヒルベルト計画のようなものが創られたのであるが，その数学においてさえ，形式化の恣意性や不確定性を逃れることはできない．これは，ゲーデルの定理が教える，もう一つの重要な不完全性であると言えよう．

[66]［Weyl 1949］, p. 235, 邦訳［ワイル 1959］，268 頁．

ワイルによれば「ゲーデルは無矛盾性に関する限りはわれわれは決してよくなっていないことを示唆しているように思われる．われわれに無矛盾性を確信させることができるヒルベルトは永遠に現れないだろう（No Hilbert will be able to assure us of consistency forever）」と捉えている．[67] 直観主義の主張がもたらす熱狂に一時は身を置き，しかし次第に冷静さを取り戻して，それと距離を置いて数学研究者としての成果を誇り，同時に哲学的洞察に優れたワイルの感想である．ワイルは数学の基礎をめぐる議論が数学内部の問題に封じ込められることになるのに対して，多少なりとも反発心を抱いていたのかもしれない．『数学と自然科学の哲学』における先の引用と同じ個所で，「真に実在論的な数学は，物理学〔一般相対論や量子力学の進展をふまえて〕と並んで，唯一の実世界の理論的構成の一分科と考えられるべきであろう．そしてその基礎の仮設的拡張に対しては，物理学によって示されているのと同じ冷静かつ慎重な態度をとるべきである」と述べている．

ゲーデルはワイルも言う通り，超越的論理に一定の信頼を持ちつつ，自然数というある種の数学的直観に支えられた対象をフルに活用して形式的記号列を作成し，数学の通常の論理的推論の力を借りて決定不能命題の存在を示した．その観点から，ゲーデルは後に続く数学研究者に「数学基礎論」という分野の有り様を提示したとも言えるし，「数学の基礎の数学化」への道を本格的に切り開いたともいえる．

先に注 65 でも少し言及したが，現代の数学基礎論を専門とする研究者たちはこの不完全性定理の意義をどのように捉えているのだろうか．代表的論者として菊池誠の言説を取り上げよう．菊池はその著書［菊池 2014］で，不完全性定理を現代の立場から証明し，そして第 9 章「跋：形式主義の二つのドグマ」で不完全性定理の意義について哲学的な議論もふまえながら述べている．そもそも形式主義を条件づける「二つのドグマ」とは次の通りである．[68]

- 構文論，すなわちモデルの概念と独立に形式的証明に基づく数学的真理と意味論，すなわちモデルに基づく数学的真理との間に根本的な分裂がある．
- 還元主義，すなわち数学的な証明はどれも公理と推論規則に基づく有限的対象を指示する名辞からの論理的構成物と同値である．

こうした信念のようなものに対して，菊池はいずれも「根拠がない」とする．そこで数学の基礎としての形式主義を否定する立場が浮上する．それは次の二つの典型的な考え方に基づくという．[69]

[67] *Ibid*., 同邦訳，同頁.
[68]［菊池 2014］，288 頁.
[69] 同書，314f 頁.

- 形式主義は，数学の基礎を語るための基本的枠組みとして重要なのではなく，新たな興味深い数学的対象を生み出したことが評価されるべきである．
- 数学の基礎として形式主義に代わる枠組みを求めるべきである．

後者は直観主義や極端な有限主義に表れている．基礎論研究者たちは，前者の立場から数学にける研究対象が広がったことを単純に好意的に捉えるのだろう．だが，菊池は必要なのは先の二つのドグマの相対化であると主張する．

> 数学の基礎としての形式主義を支える二つのドグマに対して無自覚で無防備であれば，無闇に形式主義を否定したところで形式主義の破片は数学観の至る所に生き残るであろう．〔中略〕形式主義の二つのドグマを相対化する言葉を持ち合わせなければ形式主義的な数学観から解き放たれることはない．

その上で不完全性定理の果たした役割が特定される．すなわち，不完全性定理は「形式主義の二つのドグマを受け入れている」ことで，その形式主義の二つのドグマの相対化につながり得るとしている．また不完全性定理の意義を別の箇所では「数学的に有益な定理であり，歴史記的文脈に納まらない価値がある」と述べている．「ただし」と断って次のように指摘している．[70]

> 役に立つのは，第一不完全性定理ではなく第二不完全性定理であり，個々の理論を考えるのではなく二つの理論の強さを区別するときである

実際，二つの $S$ と $T$ があるとき，$S \subseteq T$ かつ第 2 定理が成立すると仮定する．$T$ で $S$ の無矛盾性が証明できれば, $T$ は $S$ よりも真に強いことになる．数学基礎論ではこの方法で様々な理論や公理を区別する．こうして数学の基礎を論じる上で指針を与えるのである．コーエンによる連続体仮説が公理的集合論から独立であることの証明も一種の決定不能命題の例ともいえる．ゲーデルによる不完全性定理の証明は，数学が文字通り不完全で穴だらけであることを提示しているのではなく，むしろ菊池が言う「相対化」を通じてより豊かな可能性を与えたことになるのだろう．われわれは, 不完全性定理の意義について確認した．そこで次にゲーデルが後半生に抱いた数学の哲学への発想へと目を向けることにしよう．

### 6.5　ゲーデルと数学の哲学

すでにゲーデルに関わる言説を何度か引用しているヘルマン・ワイル『数学と自然科学の哲学』で，ゲーデルの数学観について語っている興味深い一節がある．[71]　ワイルは数

---

[70] 同書，234 頁．

学基礎論をめぐる論争の出発点である（特に無限を扱う）集合論のパラドックスに関して「その紛争の最も深い根は他にある」という.「無限へと開かれている可能性の場が，それ自身において存在する物の閉じた領域と誤って捉えられている」とし，それが「集合論の堕落と原罪である」とさえ言っている．その一方で，本稿のエピグラフで紹介したゲーデルの言葉は対照的である．ワイルはそうしたゲーデルに関して次のように指摘している．

> 彼のすべての経験に基づいて, ゲーデルは類を実在的対象, すなわち「多数の物」, あるいはこのような多数からなる構造と考える実在論的立場を強く弁護する．

われわれは，ここでワイルの言説を確認するために，ゲーデル自身の考えを表明する一文として，1947 年刊行の論文「カントルの連続体問題とは何か」（‘What is Cantor’ s Continuum Problem’）を追究しよう．

第 2 次世界大戦後，ゲーデルは彼の名を高らしめた数学基礎論関連の研究から離れていった．相対論に関係した宇宙論研究のようなものにも手を染めることもあった．少し道に迷った様相も示していたが，その中で数学の哲学に関わる論考を残した．これは彼の後半生における思想を表したものとして大変重要である．それが「カントルの連続体問題とは何か」である．この論考は，ゲーデルの数学の哲学への代表的な貢献となった．今ではその分野における一種の古典と評されるほどである．1950 年の ICM では関連する基調報告も行っている．[72]

なおこの論文を分析する前に書誌情報を述べておこう．この論考は，当初『月刊アメリカ数学』（*American Mathematical Monthly*）誌第 54 号（1947 年）に掲載された．その後，ベナセラフとパトナムの編纂による『数学の哲学論文選』（*Philosophy of Mathematics: Selected Readings*）（1964 年刊）に所収されるにあたり，ゲーデルは大幅な改訂を施した．ゲーデルはその 1964 年版の出版後も改訂を試みている．ゲーデルの没後，1983 年に『数学の哲学論文選』は再版されたが，ゲーデルの修訂は取り入れられなかった．われわれが 1 次資料として依拠する［Gödel 1986-1995］が刊行されるにあたり, ゲーデルの改訂内容（1966 年, 1967 年草稿）が公にされる．同時に 1964 年版の内容をその草稿に沿って改訂している．[73]

さてこの論文が主題とするカントルの連続体問題とは何であったか．われわれは 6.2 節でゲーデルの生涯を振り返る中で，式（6），（7）の形で定式化してある．そしてゲーデルが，ZF が無矛盾であるとき，選択公理 AC および一般連続体仮説 GCH を加えた公理系も無矛盾であることを証明するに至っていたことは確認済みである．書誌情報の説明において見たが，この論文は当初刊行された際にはコーエンは結果を公刊していない．その後の

---

[71]［Weyl 1949］, p. 234f, 邦訳［ワイル 1959］，266f 頁.
[72]［Dawson, Jr. 1997］, pp. 173-192, 邦訳［ドーソン Jr 2006］，240-264 頁.
[73]［Gödel 1986-1995］, 2, pp. 159f,166-170, または［飯田 1995］，44ff 頁.

コーエンによる成果（AC を含む集合論の公理から証明することができない）をふまえて改訂されたという面がある．[74] この論文はその連続体仮説にふれながらも，数学的対象や数学的直観についての考察がある．ゲーデルの数学に関する哲学の素材を提供してくれる点で興味深い．

全体で 4 節からなる論文であるが，冒頭の第 1 節では「基数の概念」として，カントルの連続体問題（＝「ユークリッド空間内の 1 本の直線上にはいくつの点があるか」，あるいはそれと同値な問題「整数の相異なる集合はいくつ存在するか」）は，「『数』の概念が無限集合にまで拡張されるようになって初めて生じてきた」とされる．カントルの提唱したことは，二つの集合 $A$ と $B$ の各要素間に 1 対 1 の対応があることで両者の相等性が定まるということである．しかもこれは次元を越えて，例えば一つの正方形と一つの線分が質点によって埋め尽くされていて, その両者の間に 1 対 1 対応が存在する．言い換えれば，各質点を正方形から線分へ，あるいはその逆に線分から正方形へ配列し直すことができること意味する．ここでゲーデルは，こうしたことを可能にするのは，「〔質点のような〕物理的対象についてでしかない」と指摘する．こうしたカントルによる基数概念をゲーデルは批判するのではなく，むしろそれを受け入れる以外「ほとんど選択の余地はない」とする．[75] ここにゲーデルの数学に関する一つの典型的発想を見ることができる．数理哲学者マイケル・ダメット（直観主義の擁護者である）は，このようなゲーデルの主張に対して，数学の哲学の一つの立場として「プラトニズム」（＝観念的実在主義）と名づける．[76]

ゲーデルの考えは，1964 年の改訂版への補足として書かれた箇所により一層鮮明に表れる．本稿の冒頭で掲げたエピグラフの一文をあらためて見返して欲しい．ゲーデルは，集合論の対象が感覚的経験が遠く及ばないものであっても，われわれは確かに「集合論の対象についても何か知覚に類するものを持っている」と語っていた．それに続けてゲーデルは次のように述べる．[77]

> 感覚的知覚がわれわれを促して，物理学的理論を打ち立て，未来の感覚的知覚がこれらの理論と一致するであろうと期待し，さらには現在決定できない問題も意味を持ち，将来決定できるであろうと信じる．そのようにわれわれが感覚的知覚に信

---

[74] 1964 年の改訂版の後記で，あるいは 1966 年 9 月の草稿版で，コーエンによる「解決」についてふれられている．*Ibid*., p. 269, 邦訳［飯田 1995］，38，53 頁．

[75] *Ibid*., pp. 254f, 同邦訳，17f 頁．

[76] ダメットによれば，「プラトニズムは，数学の哲学として直喩〔＝直接他のものと比較する修辞法〕に基づいている．すなわち，数学的真理の理解を物理的対象の知覚になぞらえれること，したがって，数学的実在と物理的宇宙になぞらえること」を趣旨とする発想である．［Dummett 1978］, p. 202, 邦訳［ダメット 1986］，190 頁．

[77] ［Gödel 1986-1995］, 2, pp. 268f, 邦訳［飯田 1995］，36f 頁．この箇所は，数理哲学者スチュアート・シャピロによれば「ゲーデルのもっとも有名な（あるいは評判のよくない）哲学的な一節」である．［シャピロ 2012］，272 頁．

頼を置くのと同様に，上に述べたような種類の知覚，すなわち数学的直観に対してもわれわれは信頼を置いていいはずであり，私の見る限りではそうしてはならないとする理由はまったくない．

ある意味ヒルベルトの素朴な信念を共有するものである．ただ，ここで「数学的直観」という語にゲーデルは次のように注意を促している．

　注意しなければならないのは，数学的直観をこの直観が関わる対象の直接的な知識を与える能力として捉える必要はないということである．むしろ物理的経験の場合と同じように，われわれは数学的対象の場合についても，何か他の直接的に与えられるものを基礎として当の対象についてのわれわれの観念を形成するものと思われる．〔中略〕しかしながら，数学的対象の客観的実在の問題（それは，ついでながら外界の客観的実在という問題の正確な複製である）は，ここで論じている問題にとって決定的ではない．集合論の諸公理とその際限のない拡張の系列とを生み出すのに足りるほど明確な直観が存在するという，この心理学的な事実だけでカントルの連続体仮説のような命題が真か偽かという問題に意味を与えるには十分である．

一見すると哲学に関心が薄く，ナイーヴな発想を持つ数学研究者にありがちな言葉のようにも考えられる．だが, ゲーデル自身がカントの名を論文中に言及しているし, 他にもフッサールの超越論的論理学や，そもそも論理学や数学の形式化の 17，18 世紀の先駆者であるライプニッツの影響を感じさせる言説となっている．[78]　ゲーデルは数学と哲学の問題を検討してきた先駆者たちのもたらす養分を十分に吸収した上で，近過去に集合論のパラドックスを発端に起きた数学基礎論論争をふまえている．実際，われわれが論じている論考の中で，ゲーデルは直観主義の主張にも目を向けている．集合論の一つの帰結だった自然数全体の集合の濃度 $\aleph_0$ のみを認め, 次の基数 $\aleph_1$ よりも大きい（実数の全体の濃度 $\aleph$）をア・プリオリに許容せず，あくまでも構成的見地から認めるという，したがって連続体仮説自体が無意味となるブラウワーの考えや，それを少し弱くしたポアンカレやワイルの立場に対して，

---

[78] ゲーデルは, 1944 年にに刊行された論文「ラッセルの数理論理学」の末尾でライプニッツに直接言及し，以下のように述べている（［Gödel 1986-1995］, 2, p. 140, 邦訳［飯田 1995］，84 頁）.

　ペアノやその他の人々は，（ライプニッツの主張にしたがって）十進法が数値計算を容易にしたのと同じくらい数理論理学は理論的数学を容易にするだろうと期待していた．しかし，数理論理学はこれまでのところ，彼らの大きな望みのはるか後方にとどまっている．こうした事実に責めを負うべきは，基礎に関する不完全な理解なのではないかと疑うのももっともなことであるように見える．〔中略〕だが望みを捨てる必要はない．普遍記号学（Characteristica universalis）についての論考の中で，ライプニッツはユートピア的な計画を語っていたわけではないのである．

> そうした〔カントルの無限集合論や古典数学への〕否定的態度は，数学の本性についてのある特定の考えからの結果にすぎないのである．その特定の考えとは，数学的対象を容認してよいのは，それらの対象をわれわれ自身による構成物として解釈できる限りにおいてである，あるいは少なくとも，それらの対象が数学的直観において完全に与えられる限りにおいてであるとする立場である. だがこれに対して，数学的対象はわれわれの構成から独立に存在し，それらの対象の各々についてわれわれが直観を持つことからも独立に存在すると考える人，そして一般的な数学的概念は，当の概念の健全性とそれに関する諸公理の真理性とが認識できる程度にわれわれに十分明晰でありさえすればよいと要求する人，こうした人にとっては事情は異なる．

と基本的に批判的なスタンスをとって述べている．後者の人々にとっては，カントルの集合論は満足のいく基礎（集合論の公理系）を備えているゲーデルは考える．[79]

以上のような言説は，特に 1931 年論文で見たように，ゲーデルは数学と論理の形式化に関して透徹した探求をした上でのスタンスである．やはり素朴な観念論のレヴェル（数学的真理の世界はわれわれとは独立に存在して，見える人にはそれが見える）とは一線を画するというべきであろう．先に注 77 でも言及したが，ゲーデルの哲学を素朴すぎると考える人々たちにとっては，上の引用した言明などは「評判が悪い」ものかもしれない．だが数学の先端の研究成果と哲学のバランスを取って考えることは容易ではない．余りにも窮屈な思想は，数学研究の進展を阻害しかねないからである．ワイル自身がブラウワーの主張と距離を置くようになったのもそうした観点からだった．[80] このゲーデルと彼に影響を与えたと想像される哲学者たちの思想との関連は, 派生する問題として興味深いし，またゲーデルのこうした数理哲学がいかに形成されてきたかを追求することにも興味を引かれる，だが，ここでは問題の指摘にとどめたい．[81] ［飯田 1995］によれば，ゲーデルの基本的立場は「最も強力な形の数学的実在論を擁護することにある．すなわち彼〔ゲーデル〕は，矛盾に陥ることがない範囲で無制限に実無限の存在を認めるというカントル以来の観点を引き継ぎ，そのような実無限（超限集合）の領域が我々の認識から独立にひとつの確定的実在を成すと見なして，数学をこのような実在についてのより完全な記述を目指す活動として捉えているのに他ならない」．[82] こうしたゲーデル評価は，ワイルが『数

---

[79] ヒルベルトは「カントルがわれわれに作り上げてくれた楽園から，何人もわれわれを追放できるはずがない」と述べていた．ゲーデルの言葉はそれを想起させる（［林 2018］，39 頁参照）．［Gödel 1986-1995］, 2, pp. 257f, 邦訳［飯田 1995］, 邦訳，22f 頁.

[80] ［林 2021］，43f，53ff 頁参照.

[81] 文献［van Atten 2015］は，ここで指摘した問題に直接応じる論文集である．ライプニッツ，フッサールに加えて，前注 79 でも言及した，ブラウワーからの影響も含めてゲーデルの思想の形成が論じられている．また，［Tieszen 2011］も参照すべき文献である．

学と自然科学の哲学』ですでに似た内容を指摘していたが，一定の正当性を持つとしてよいだろう．こうしたゲーデルのプラトニズムは，彼の生涯において一貫していたと考えられる．だがもちろんすべてが一日にして成った訳ではない．時間の経過とともに彼の思想がどのように成熟したかは［戸田山 2007］が参考になる．

結局，数学の基礎をめぐる研究は数学基礎論として数学の 1 分科としての地位を確立した．数学者たちは，安堵して各々の研究テーマに打ち込めるような日々を現在過ごしている．しかし，ワイルの抱いたある種のペシミズムは，解消されたと考えるのも早計だろう．異なる立場の論者たちを通じて議論された「数学的対象や数学的直観とは何か」という問いは，なお開かれたままであると信じる．われわれの数学史講義は，デデキントの自然数論・実数論からカントルの無限集合論，ヒルベルトのプログラム，ブラウワーのラジカルなヒルベルト批判，ワイルのブラウワーへの同調と離反（加えてライプニッツとの関連），そしてゲーデルの不完全性定理とプラトニズムへと 19 世紀末から 20 世紀にかけて続いた数学の基礎をめぐる論争の実相を眺めてきた．最後は数学の哲学へと歩みを進めたが，この論争が生んだ一つの産物でもあり，現在においてなお議論の材料に事欠かないルートヴィヒ・ウィトゲンシュタインの数学の哲学へと次の話題の矛先を向けることにしよう．

（追記：本稿を，かつて学習院高等科の同僚であり，2022 年 8 月に亡くなられた大野昌彦氏（享年 89 歳）に捧げたい．大野氏は柄谷行人『内省と遡行』に触発され，思うところがあったのか，何かの折に私にゲーデルについての文章を書くことを強く勧められた．あれからすでに 30 年近くの歳月が経っているだろうか．私自身の進展があまりに遅かったために，大野氏のご希望に添えず，ずいぶんと時間が過ぎてしまったことが悔やまれる．記してご冥福をお祈り申し上げます．）

（未完．以下次号に続く）

## 7　数学の哲学：ウィトゲンシュタインと数学の基礎

[82]［飯田 1995］，4 頁．

# 文献

## 1 次文献（翻訳も含む）

［Brouwer 1975］*L. E. J. Brouwer Collected Works , 1, Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting（Amsterdam, Oxford: North Holland Publishing Company, 1975）.

［Brouwer 1981］*Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, edited by D. van Dalen（Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1981）.

［Cantor 1915］Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, translated by Philip E. B. Jourdain（$1915_1$）（New York: Dover Publications Inc., 1955）（rep. ）.

［Cantor 1932］*Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, herausgegeben von Ernst Zermelo（$1932_1$）（Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980）（rep. ）.

［Cantor 1991］*Georg Cantor Briefe*, herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson（Berlin etc.: Springer- Verlag, 1991）.

［Dedekind 1930-1932］*Richard Dedekind Gesammelte mathematische Werke*, herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, und Öystein Ore（1930-$1932_1$）（Bronx: Chelsea Publishing Company, 1969）（rep. ）.

［Ewald 1996］*From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 1, 2, edited by William Ewald（Oxford: Clarendon Press, 1996）.

［Gödel 1986-1995］*Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 1-3, edited by Solomon Fefferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort（Oxford etc.: Oxford University Press, 1986-1995）.

［Hilbert 1900］Hilbert, David, "Über den Zahlbegriff," *Jarhresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **8**（1900）, S. 180-184.

［Hilbert 1926］Hilbert, David, "Über das Unendliche," *Mathematische Annalen*, **95**（1926）, S. 161-190.

［Hilbert 1928］Hilbert, David, "Die Grundlagen der Mathematik," *Abhandlungen aus dem mathmatischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6**（1928）, S. 65-85.

［Hilbert 1930］Hilbert, David, "Probleme der Grundlegung der Mathematik," *Mathematische Annalen*, **102**（1930）, S. 1-9.

［Hilbert 1970］*David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, Zweite Auflage, Band 1-3（1932, 1933, $1935_1$）（Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1970）.

［Hilbert 2004］*David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, edited by Michael Hallett and Urlich Majer（Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2004）.

［Hilbert 2013］*David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*, edited by William Ewald and Wilfried Sieg（Heidelberg, New York, Dordrecht and London: Springer, 2013）.

［Hilbert 2015］Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*（*Festschrift 1899*）, herausgegeben von Klaus Vorkert（Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2015）.

［Hilbert and Bernays 1968-1970］Hilbert, David and Bernays, Paul, *Grundlagen der Mathematik*, Zweute Auflage, 1（$1934_1$）, 2（$1939_1$）（Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968-1970）.

［Husserl 1992］*Edmund Huusserl Gessammelte Schriften*, herausgegeben von Elisabeth Ströker（Hamburg: Felix Meiner verlag, 1992）.

［Kant 1998］Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, nach der ersten und zweiten Originalausgabe, herausgegeben von Jens Timmermann（Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1998）.

［Kronecker 1895-1930］*Leopold Kronocker's Werke*, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel（1895-$1930_1$）（New York: Chelsea Publishing Company, 1968）（rep. ）

［Kronecker 2001］" 'Sur le concept de nombre en mathématique' : Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin（1891）," Retranscrit et commenté par Jaqueline Boniface et Norbert Schappacher, *Revue d'histoire des mathématiques*, **7**（2001）, pp. 207-275.

［Leibniz 1849-1863］*G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt（1849-$1863_1$）（Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971）（rep. ）.

［Leibniz 1875-1890］*G. W. Leibniz Die philosophischen Schiriften* herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt（1875-$1890_1$）（Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1996）（rep.）.

［Leibniz 1903］*Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, publiés par Louis Couturat（1903）（Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1988）（rep.）.

［Leibniz 1923-］*Gottfried Wilhelm Leibniz S¨amtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin（Berlin: Akademie Verlag, 1923- ）.

［Poincaré 1902］Poincaré, Henri, "Hilbert, Les Fondements de la Géométrie," *Bulletin des sciences mathématiques*, **26**（1902）, pp. 249-272.

［Poincaré 1905-1906］Poincaré, Henri, "Les mathématiques et la logique," *Revue de métaphysique et de morale*, **13**（1905）, pp. 815-835, **14**（1906）, pp. 17-34, **14**（1906）, pp. 294-317.

［Poincaré 1906］Poincaré, Henri, *La science et l'hypothèse*（2e éd. ）（$1902_1$）（Paris: Flammarion, 1968）.

［Russell 1903］Russell, Bertrand, *Principles of Mathematics to *56*（$1903_1$）（London and New York: Routledge, 2010）.

［van Heijenoort 1967］*From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, edited by Jean van Heijenoort（Cambridge, London: Harvard University Press, 1967）.

［Weyl 1918］Weyl, Hermann, *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*（*und andere Monographien*）（$1918_1$, $1932_2$）（Providence: AMS Chelsea Publishing, 2006）（rep. ）.

［Weyl 1949］Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*（$1926_1$, $1949_2$）（Princeton: Princeton University Press, 2009）.

［Weyl 1968］*Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von K. Chandrsekharan

(Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968).
［Weyl 1987］Weyl, Hermann, *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Translated by Stephen Pollard and Thomas Bole($1987_1$)(New York: Dover Publications, Inc., 1994).
［Weyl 1994］Weyl, Hermann, *Le continu et autres écrits*, Notes introductives et traduction par Jean Largeault(Paris: J. Vrin, 1994).
［Weyl 2009］Weyl, Hermann, *Mind and Nature: Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics*, Edited and with an Introduction by Peter Pesic(Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2009).
［Weyl 2012］Weyl, Hermann, *Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics, and Philosophy*, Translated and Edited with an Introduction and Notes by Peter Pesic(Mineola: Dover Publications, Inc., 2012).
［Whitehead and Russell 1927］Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand, *Principia mathematica to *56* ($1910_1$, $1927_2$)(Cambridge: Cambridge University Press, 1997).
［Zermelo 1904］Zermelo, Ernst, "Beweis, daßjede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)," *Mathematische Annalen*. **59**(1904), S. 514-516.
［Zermelo 1908］Zermelo, Ernst, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1," *Mathematische Annalen*. **65**(1908), S. 261-281.
［Zermelo 2010］*Ernst Zermelo Collected Works*, Volume 1 edited by Heinz- Dieter Ebbinghaus and Akihiro Kanamori(Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2010).
［飯田 1995］飯田隆編『リーディングス　数学の哲学：ゲーデル以後』（勁草書房，1995 年）.
［カッシーラー 1989-1997］カッシーラー，エルンスト『シンボル形式の哲学』（一）～（四），木田元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1999-1997 年）.
［カッシーラー 2017］カッシーラー，エルンスト『実体概念と関数概念：認識批判の基本的諸問題の研究』（1979 年 $_1$），山本義隆訳（みすず書房，2017 年）.
［カント 2011］カント，イマニュエル『純粋理性批判』，熊野純彦訳（作品社，2011 年）.
［カントル 1979］G. Cantor『現代数学の系譜　8　カントル　超限集合論』功力金二郎・村田全訳・解説（共立出版，1979 年）.
［ゲーデル 1997］ロドリゲス - コンスエグラ，フランシスコ編『ゲーデル未完哲学論考』好田順治訳（青土社，1997 年）.
［ゲーデル 2006］ゲーデル，クルト『不完全性定理』林晋・八杉満利子訳・解説（岩波文庫，2006 年）.
［ディリクレ，デデキント 1970］P. G. L. Dirichlet, J. W. R. Dedekind『現代数学の系譜　5　ディリクレ，デデキント『整数論講義』酒井孝一訳・解説（共立出版，1970 年）.
［デデキント 1961］デーデキント『数について：連続性と数の本質』河野伊三郎訳（岩波文庫，1961 年）.
［デデキント 2013］デデキント，リヒャルト『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳・解説（ちくま学芸文庫，2013 年）.

［フォン･ノイマン，モルゲンスタイン 2009］フォン･ノイマン, J.，モルゲンシュタイン，O.，『ゲームの理論と経済行動』1，2，3，銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳，阿部修一・橋本和美・銀林浩・宮本敏雄・下島英忠訳（ちくま学芸文庫，2009 年）．
［ヒ ルベルト 1972］D. Hilibert『現代数学の系譜　4　ヒルベルト　数学の問題：ヒルベルトの問題　増補版』一松信訳・解説（共立出版，1972 年）．
［ヒルベルト 2005］D. ヒルベルト『幾何学基礎論』中村幸四郎訳（1969 年 1）（ちくま学芸文庫，2005 年）．
［ヒルベルト，クライン 1970］D. Hilbert, F.Klein『現代数学の系譜　7　ヒルベルト　幾何学の基礎，クライン　エルランゲン・プログラム』寺阪英孝・大西正男訳・解説（共立出版，1970 年）．
［ヒルベルト，ベルナイス 1993］D.　ヒルベルト，P.　ベルナイス『数学の基礎』吉田夏彦･渕野昌訳（シュプリンガー・フェアラーク東京，1993 年）（［Hilbert and Bernays 1968-1970］の抄訳）．
［フッサール 1965］フッサール，エドムント，『現象学の理念』立松弘孝訳（みすず書房，1965 年）．
［フッサール 1968-1976］フッサール，エドムント，『論理学研究』1-4，立松弘孝・松井良和・赤松宏訳（みすず書房，1968-1976 年）．
［フッサール 1979-1984］フッサール，エトムント，『イデーン』1-1，1-2，渡辺二郎訳（みすず書房，1979-1984 年）．
［フレーゲ 2000］『フレーゲ著作集　3　算術の基本法則』野本和幸編（勁草書房，2000 年）．
［フレーゲ 2001］『フレーゲ著作集　2　算術の基礎』野本和幸・土屋俊編（勁草書房，2001 年）．
［ポアンカレ 1953］ポアンカレ，アンリ『科学と方法』吉田洋一訳（1926 年 1）（岩波文庫，1953 年）．
［ポアンカレ 2021］ポアンカレ，アンリ『科学と仮説』伊藤邦武訳（岩波文庫，2021 年）．
［ボルツァーノ 1978］ボルツァーノ，B.『無限の逆説』藤田伊吉訳（みすず書房，1978 年）．
［ライプニッツ 1988］『ライプニッツ著作集』1，『論理学』沢口昭聿訳（工作舎，1988 年）．
［ライプニッツ　1989］『ライプニッツ著作集』9，『後期哲学』西谷裕作・米山優・佐々木能章訳（工作舎，1989 年）．
［ライプニッツ　1997］『ライプニッツ著作集』2，『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳（工作舎，1997 年）．
［ライプニッツ　1999］『ライプニッツ著作集』3，『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長島秀男訳（工作舎，1999 年）．
［ワイル 1959］ワイル，ヘルマン『数学と自然科学の哲学』菅原正夫・下村寅太郎・森繁雄訳（岩波書店，1959 年）（［Weyl 1949］の邦訳）．
［ワイル 2014］ワイル，ヘルマン，『精神と自然：ワイル講演録』ピーター・ヘジック編，岡村浩訳（ちくま学芸文庫，2014 年）（［Weyl 2009］の邦訳）．
［ワイル 2016］ヴァイル，ヘルマン『連続体：解析学の基礎についての批判的研究』田中

尚夫・渕野昌訳・注釈・解説（日本評論社，2016 年）（［Weyl 1918］の邦訳）．

**2 次文献**

［Belna 1996］Belna, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege: théories, conceptions et philosophie*（Paris: J. Vrin, 1996）.

［Blumenthal 1935］Blumenthal, Otto, "Lenbensgeschichte," in［Hilbert 1970］, Band 3, S. 388-429.

［Boniface 2004］Boniface, Jacqueline, *Hilbert et la notion d'existence en mathématique*（Paris: J. Vrin, 2004）

［Cavaillès 1994］Cavaillès, Jean, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, présentation par Bruno Huisman（Paris: Hermann, 1994）.

［Corry 2004］Corry, Leo, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Second Edition（$1996_1$）（Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004）.

［Dauben 1979］Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*（Princeton: Princeton University Press, 1979）.

［Dawson, Jr. 1997］Dawson, Jr., John, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*（Wellesley: A K Peters, 1997）.

［Dugac 1976］Dugac, Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*（Paris: J. Vrin, 1976）.

［Dummett 1978］Dummett, Michael, *Truth and Other Enigmas*（Cambridge: Harvard University Press, 1978）.

［Dreben and Kanamori 1997］Dreben, Burton and Kanamori, Akihiro, "Hilbert and Set Theory," *Synthese*, **110**（1997）, pp. 77-125.

［Ebbinghaus 2007］Ebbnighaus, Heinz- Dieter, *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work*（Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2007）.

［Feferman 1998］Feferman, Solomon, *In the Light of Logic*（New York, Oxford: Oxford University Press, 1998）.

［Ferreirós 2007］Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Second Revised Edition（Basel: Birkhäuser Verlag, 2007）.

［Ferreirós and Gray 2006］Ferreirós, José, and Gray, Jeremy J., *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*（Oxford: Oxford University Press, 2006）.

［George and Vellman 2002］George, Alexander and Vellman, Daniel J., *Philosophies of Mathematics*（Malden, Oxford: Blackwell Publisihers, 2002）.

［Gray 1989］Gray, Jeremy, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*（Oxford: Clarendon Press, 1989）.

［Gray 2013］Gray, Jeremy, *Henri Poincaré: A Scientific Biography*（Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2013）.

［Hallett 1984］Hallett, Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*（Oxford: Clarendon

Press, 1984).

[Hayashi 2002] Hayashi, Tomohiro, "Leibniz's Construction of *Mathesis Universalis*: A Consideration of the Relationship between the Plan and His Mathematical Contributions," *Historia Scientiarum*, 12(2002), pp. 121-141.

[Heck 2011] Heck, Richard G., *Frege's Theorem*(Oxford: Clarendon Press, 2011).

[Heck 2012] Heck, Richard G., *Reading Frege's Grundgesetze*(Oxford: Clarendon Press, 2012).

[Jech 1973] Jech, Thomas J., *The Axiom of Choice*($1973_1$)(Mineola: Dover Publications Inc., 2008)(rep. ).

[Jech 2003] Jech, Thomas, *Set Theory The Third Millennium Edition, Revised and Expanded* (Berlin, Heidelberg New York etc.: Springer, 2003).

[Kanamori 1996] Kanamori, Akihiro, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **2**(1996), pp. 1-71.

[Kanamori 2004] Kanamori, Akihiro, "Zermelo and Set Theory," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **10**(2004), pp. 487-553.

[Kanamori 2009] Kanamori, Akihiro, *The Higher Infinite, Second Edition*(Berlin, Heidelberg: Springer, 2009).

[Kitcher 1976] Kitcher, Philip, "Hilbert's Epistemology," *Philosophy of Science*, **43**(1976), pp. 99-115.

[Largeault 1993] Largeault, Jean, *Intuition et intutionisme*(Paris: J. Vrin, 1993).

[Lauria 2004] Lauria, Philippe, *Cantor et le transfini: mathématique et ontologie* (Paris: L' Harmattan, 2004).

[Mancosu 1998] Mancosu, Paolo, *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*(New York, Oxford: Oxford University Press, 1998).

[Mancosu 2010] Mancosu, Paolo, *The Adventure of Reason: Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900-1940* (New York, Oxford: Oxford University Press, 2010).

[Moore 1982] Moore, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* ($1982_1$)(Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

[Moore 2002] Moore, Gregory H., "Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolution of Hilbert's Thought," *Historia Mathematica*, **29**(2002), pp. 40-64.

[Raatikainen 2003] Raatikainen, Panu, "Hilbert's Program Revisited," *Synthese*, **137**(2003), pp. 157-177.

[Reid 1970] Reid, Constance, *Hilbert*($1970_1$)(New York: Springer- Verlag, 1996).

[Segre 1994] Segre, Michael, "Peano's Axioms in Their Historical Context," *Archive for History of Exact Sciences*, **22**(1994), pp. 201-342.

[Sieg 2013] Sieg, Wilfried, *Hilbert's Programs and Beyond*(New York etc. : Oxford University Press, 2013).

[Sieg and Schlimm 2013] Sieg, Wilfried and Schlimm, Dirk, 'Dedekind's Analysis of Number:

Systems and Axioms," in［Sieg 2013］, pp. 35-72.

［Sigurdsson 1991］Sigurdsson, Skuli, "Hermann Weyl, Mathematics and Physics, 1900-1927," A Thesis to the Department of History of Science, Harvard University, 1991.

［Sinaceur 1999］Sinaceur, Houriya, Corps et modèles: *Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*（Paris: J. Vrin, 1999）.

［Takeuchi 2013］Takeuchi, Gaishi, *Proof Theory Second Edition*（$1987_1$）（Mineola: Dover Publications, Inc., 2013）.

［Tieszen 1989］Tieszen, Richard, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*（Dordrecht, London, Boston: Kluwer Academic Press, 1989）.

［Tieszen 2005］Tieszen, Richard, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*（Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2005）.

［Tieszen 2011］Tieszen, Richard, *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*（Oxford: Oxford University Press, 2011）.

［van Atten 2015］Van Atten, Mark, *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*（Heidelberg, New York etc.: Springer）.

［van Dalen 1995］van Dalen, Kirk, "Hermann Weyl's Intuitionistic Mathematics," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **1**（1995）, pp. 145-169.

［van Dalen 2013］van Dalen, Kirk, *L. E. J. Brouwer Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life*（London etc.: Springer- Verlag, 2013）.

［van Dalen 2013］van Dalen, Kirk, *Logic and Structure Fifth Edition*（Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2013）.

［Wang 1987］Wang, Hao, *Reflexions on Kurt Gödel*（Cambridge, London: A Bradford Books, The MIT Press, 1987）.

［Wang 1996］Wang, Hao, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*（Canbridge, London: The MIT Press, 1996）.

［新井 2021］新井敏康『数学基礎論　増補版』（2011 年 $_1$）（東京大学出版会，2021 年）.

［井関・近藤 1977］井関清志・近藤基吉『現代数学：成立と課題』（日本評論社，1977 年）.

［伊東・原・村田 1975］伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』（筑摩書房，1975 年）.

［カスー＝ノゲス 2020］カスー＝ノゲス，ピエール『ゲーデルの悪霊たち：論理学と狂気』新谷昌宏訳（みすず書房，2020 年）

［柄谷 2018］柄谷行人『内省と遡行』（1988 年 $_1$）（講談社文芸文庫，2018 年）.

［菊池 2014］菊池誠『不完全性定理』（共立出版，2014 年）.

［キューネン 2008］キューネン，ケネス『集合論：独立性証明への案内』藤田博司訳（日本評論社，2008 年）.

［倉橋 2021］倉橋太志「不完全性定理の数学的発展」，『数学』，**73-1**（2021 年 1 月），60-87 頁.

［黒田 1980］黒田成俊『関数解析』（共立数学講座 15）（共立出版，1980 年）.

［佐々木 1995］佐々木力『科学革命の歴史構造』（上），（下）（1985 年 $_1$）（講談社学術文

庫，1995 年）.
［佐々木 2001］佐々木力『二十世紀数学思想』（みすず書房，2001 年）.
［佐々木 2020］佐々木力『数学的真理の迷宮：懐疑主義との格闘』（北海道大学出版会，2020 年）.
［下村 1988］『下村寅太郎著作集』1,『数理哲学･科学史の哲学』（みすず書房，1988 年），『科学史の哲学』（1941 年 1，2012 年 2）所収，143-329 頁，『無限論の形成と構造』（1944 年 1，1979 年 2）所収，333-450 頁.
［シャピロ 2012］シャピロ，スチュワート『数学を哲学する』金子洋之訳（筑摩書房，2012 年）.
［鈴木 2013］鈴木俊洋『数学の現象学：数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学』（法政大学出版局，2013 年）.
［砂田他 2019］砂田利一他『ヒルベルト：現代数学の礎の源を探る』（『数理科学』2019 年 9 月号）（現代数学社，2019 年）.
［竹内 1980］竹内外史『直観主義的集合論』（紀伊國屋書店，1980 年）.
［竹内･八杉 1988］竹内外史･八杉満利子『証明論入門』（1956 年 1，1974 年 2，1988 年 3）（共立出版，2011 年）.
［田中 2006-2007］田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の論理学』全 4 巻（1『ゲーデルの 20 世紀』，2『完全性定理とモデル理論』，3『不完全性定理と算術の体系』，4『集合論とプラトニズム』）（東京大学出版会，2006-2007 年）.
［田中 2012］田中一之『原点解題　ゲーデルに挑む：証明不可能なことの証明』（東京大学出版会，2012 年）.
［田中 2019］田中一之『数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ』（裳華房，2019 年）.
［田中 2005］田中尚夫『選択公理と数学：発生と論争，そして確立への道』（増訂版）（遊星社，2005 年）.
［ダメット 1986］ダメット，マイケル『真理という謎』藤田晋吾訳（勁草書房，1986 年）.
［ドーソン Jr 2006］ドーソン Jr，ジョン・W『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』村上祐子・塩谷賢訳（新曜社，2006 年）.
［戸田山 2007］戸田山和久「ゲーデルのプラトニズムと数学的直観」，［田中 2006-2007］，4『集合論とプラトニズム』所収，226-293 頁.
［中村 2021］中村大介『数理と哲学：カヴァイエスとエピステモロジーの系譜』（青土社，2021 年）.
［長岡 2018］長岡亮介「ゲオルク・カントルと彼の集合論」，『数学文化』，**29**（2018 年），13-25 頁.
［野本 2012］野本和幸『フレーゲ哲学の全貌：論理主義と意味論の原型』（勁草書房，2012 年）.
［野本 2019］野本和幸『数論・論理・意味論　その原型と展開：知の巨人たちの軌跡をたどる』（東京大学出版会，2019 年）.

［林 2003］林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）.

［林 2008］林知宏「数学史講義（第 2 回）：ユークリッド『原論』，論証学問の成立」，『学習院高等科紀要』，**6**（2008 年），23-52 頁.

［林 2009］林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』（世界思想社，2009 年）所収，37-56 頁.

［林 2011］林知宏「数学史講義（第 5 回）：17 世紀における記号代数と方程式論」，『学習院高等科紀要』，**9**（2011 年），11-38 頁.

［林 2017］林知宏「数学史講義（第 11 回）：数学の基礎をめぐって 1：集合と数の理論（デデキント）」，『学習院高等科紀要』，**15**（2017 年），39-82 頁.

［林 2018］林知宏「数学史講義（第 12 回）：数学の基礎をめぐって 2；カントルの無限集合論」，『学習院高等科紀要』，**16**（2018 年），37-75 頁.

［林 2020］林知宏「数学史講義（第 13 回）：数学の基礎をめぐって　3；現代数学基礎論論争（その 1）：ヒルベルトの形式主義」，『学習院高等科紀要』，**18**（2020 年），25-80 頁.

［林 2021］林知宏「数学史講義（第 14 回）：数学の基礎をめぐって　4；現代数学基礎論論争（その 2）：ヘルマン・ワイルの数学と思想」，『学習院高等科紀要』，**19**（2021 年），21-75 頁.

［林 2022］林知宏「数学史講義（第 15 回）：数学の基礎をめぐって　5；（中間考察）ワイルとライプニッツ」，『学習院高等科紀要』，**20**（2022 年），21-75 頁.

［原 2013］原亨吉『近世の数学：無限概念をめぐって』（1975 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2013 年）.

［渕野 2018］渕野昌「カントルの精神の継承：無限集合の数学 / 超数学理論としての集合論のその後の発展と，その「数学」へのインパクト」，『数学文化』，**29**（2018 年），26-41 頁.

［前原 1977］前原昭二『数学基礎論入門』（朝倉書店，1977 年）.

［リード 2010］リード，C.『ヒルベルト：現代数学の巨峰』彌永健一訳（1972 年 $_1$）（岩波現代文庫，2010 年）.