微分加群の性質と
関数体上の超越性および代数的独立性（前）

鈴木佑一

概　　要

体とは四則演算について閉じている代数系であるが，さらに微分についても閉じている代数系として，微分体というものが考えられる．この概念は，微分方程式を満たす関数の超越性および代数的独立性を示すのに大いに寄与する．微分体の理論から得られる主張として，例えば次の 2 つが挙げられる．1 つは，超越数論の未解決問題「Schanuel 予想」の有理関数体上における類似の結果として知られる「Ax の定理」である．Ax の定理からは，いくつかの関数の 1 変数有理関数体 $\mathbb{C}(t)$ 上の代数的独立性が導かれ，有用である．もう 1 つは，与えられた関数の不定積分が初等関数で表されるための条件を定式化した「Liouville の定理」である．e^{t^2} の“不定積分ができない”というのはよく知られた事実であるが，これは Liouville の定理の系である「Liouville 判定法」によって証明される．本稿では，前者を主定理とし，その証明や活用の概略を記す．

1　準備

この節では，目的の主張を記述するために必要な基礎的概念のうち，代数学において標準的には扱われないものを列挙する．まずは超越次数を定義する．以下，F/C を体の拡大とする．

定義 1.1　F の元 x が C 上代数的であるとは，

$$f(X) \neq 0 \text{ かつ } f(x) = 0 \text{ をみたす } f(X) \in C[X] \text{ が存在する}$$

ことである．x が C 上代数的でないとき，x は C 上超越的であるという．

定義 1.2　F の有限個の元 x_1，$\cdots$，x_m が C 上代数的従属であるとは，

$$f(X_1, \cdots, X_m) \neq 0 \text{ かつ } f(x_1, \cdots, x_m) = 0 \text{ をみたす } f \in C[X_1, \cdots, X_m] \text{ が存在する}$$

ことである．$x_1, \cdots, x_m$ が C 上代数的従属でないとき，$x_1, \cdots, x_m$ は C 上代数的独立であるという．このとき，$x_1, \cdots, x_m$ はいずれも C 上超越的である．また，$S \subset F$ の任意の有限個の元 $x_1, \cdots, x_m$ が C 上代数的独立であるとき，S は C 上代数的独立であるという．

定義 1.3　$S \subset F$ が C 上代数的独立で，$F/C(S)$ が代数拡大であるとき，S を F/C の超越基底という．

定理 1.4　任意の拡大 F/C は超越基底をもつ．

定理 1.5　$\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ と $\{y_1, \cdots\cdots, y_m\}$ を拡大 F/C の超越基底とする．このとき $n = m$ が成り立つ．

定義 1.6　定理 1.5 の n を F/C の超越次数といい，tr.deg F/C と表す．

続いて，微分を代数的に定義する．以下，環を有理整数環 $\mathbb{Z}$ を含む可換環とする．

定義 1.7　環 A から A- 加群 M への加法準同型写像 D が微分であるとは，

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) \ (a,\ b \in A)$$

をみたすことである．A から A- 加群 M への微分全体を $Der(A, M)$ と表す．また，$D(a) = 0$ をみたす $a \in A$ 全体の集合を A の定数環といい，C_A と表す．

B を A の部分環とする．$b \in B$ に対し，$D(b) = 0$ をみたす微分 $D \in Der(A, M)$ を B 上の微分といい，$Der_B(A, M)$ と表す．さらに，$M = A$ のとき，$Der_B(A, A)$ を $Der(A/B)$ と略記する．

微分 $D \in Der\ (A, A)$ に対して，以下のような性質がある．

命題 1.8　(1) $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$D(n) = 0$ である．

(2) $a \in A, n \in \mathbb{N}$ に対して，$D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ である．

(3) $a, b \in A$ に対して，$D^n(ab) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(a) D^i(b)$ である．

(4) $a, b, b^{-1} \in A$ のとき，$D\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{bD(a) - aD(b)}{b^2}$ である．

さて，次に環や体に上述の微分構造を組み込み，微分環や微分体などを定義する．

定義 1.9　環 A と微分 $D_A \in Der(A, A)$ の組 (A, D_A) を微分環という．また，A が体であるとき，これを微分体という．

ここで 2 つ補足する．A が体であるとき，D_A に対して，C_A は A の部分体となる．$a \in A^\times$ について，$D(a) = 0$ ならば，命題 1.8（4）に $a = 1$，$b = a$ を代入することで，$D(a^{-1}) = 0$ が得られるからである．また，A が整域であるとき，D_A はその商体に一意的に拡張できる．これは D_A を命題 1.8（4）の式で定義し，これが well-defined であり，定義 1.7 を満足することを確認すればよい．

定義 1.10　(A, D_A), (B, D_B) を微分環とする．$A \supset B$ で, D_A の B への制限が D_B であるとき，A は B の微分拡大環，B は A の微分部分環という．また，A，B が体のとき，同様に A は B の微分拡大体，B は A の微分部分体といい，A/B で微分拡大を表す．

定義 1.11　(A, D_A)，(B, D_B) を微分環とする．$a \in A$ に対して，A から B への環準同型写像 f が $f\,(D_A(\mathrm{a})) = D_B(f(a))$ をみたすとき，f は微分準同型であるという．これが全単射ならば，これを微分同型という．

2　付値に関する補足

この節では，主定理の証明において用いる付値に関して，必要最小限の定義等をまとめておく．

定義 2.1　C を体とする．$C^\times = C \setminus \{0\}$ から $\mathbb{R}$ への写像 v が C の付値であるとは，$x, y \in C^\times$ に対して，

$$v(xy) = v(x) + v(y)$$
$$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$

をみたすことである．また，$v(0) = \infty$ と定義する．

定義 2.2　上の v について，v が体 C の自明な付値であるとは，任意の $x \in C^\times$ に対して，$v(x) = 0$ をみたすことである．

定義 2.3　上の v について，v が体 C の離散付値であるとは，ある $\lambda > 0$ が存在して，

$$v(C^\times) := \{v(x) \mid x \in C^\times\} = \lambda\mathbb{Z}$$

をみたすことである．また，$v(C^\times) = \mathbb{Z}$（すなわち $\lambda = 1$）のとき，v を C の正規離散付値という．

ここで補足として，離散付値を正規化する方法を記しておく．v が $v(C^\times) = \lambda\mathbb{Z}$ $(\lambda > 0)$ をみたすとする．$x \in C^\times$ に対して，

$$v'(x) = \frac{1}{\lambda}v(x)$$

によって v' を定義する．このとき，v' は定義 2.1 をみたし，$v'(C^{\times}) = \mathbb{Z}$ となっているから，これは正規離散付値となっている．

定義 2.4　$\mathcal{O} := \{x \in C \mid v(x) \geq 0\}$ を体 C の付値環という．

命題 2.5　C を標数 0 の代数閉体とする．1 変数有理関数体 $C(x)$ の自明でない付値で C 上自明なものは離散付値である．

命題 2.6　F/C を体の有限次拡大とし，F の付値 w が C の付値 v の拡張であるとする．このとき，v が離散付値ならば，w も離散付値である．

ここで C の付値環を $\mathcal{O}$，その極大イデアルを P とすると，$\mathcal{O}$ の拡張として，F の付値環 $\mathcal{O}_1$ が存在する．その極大イデアルを P_1 とする．また，$U = \mathcal{O} \setminus P$，$U_1 = \mathcal{O}_1 \setminus P_1$ とおき，$e = [F^{\times}/U_1 : C^{\times}/U]$ とする．このとき，$F^{\times}/U_1$ から $C^{\times}/U$ への e 倍写像が同型になることより，命題 2.6 が示される．これを踏まえて，分岐指数を以下のように定義する．

定義 2.7　e を w の F/C における分岐指数という．

命題 2.8　C を標数が 0 の代数閉体とし，F を C 上超越次数 1 の有限生成拡大体とする．このとき，C 上自明な F の付値 v は離散付値である．

命題 2.9　(E, D) を微分体，(F, D) をその超越次数 1 の有限生成微分拡大体とする．また，対応する正規離散付値を v とし, $v(\mathrm{t}) = 1$ とする．E の代数閉包を $\bar{E}$で表す．ここで, $\bar{E}((t))$ の微分を，

$$\left(\sum a_i t^i\right)' = \sum a_i' t^i + \sum i a_i t^{i-1} t'$$

と定義するとき，$F\bar{E}$ から $\bar{E}((t))$ への付値体としての埋め込みが存在し，これは微分同型となる．

3　Schanuel 予想の有理関数体上における類似の結果

与えられた数について，その超越性を示すのは難しいとされる．例えば e の超越性は Hermite によって 1873 年に，π の超越性は Lindemann によって 1882 年にそれぞれ証明されているが，それらを足し合わせただけの $e + \pi$ が超越数かどうかはいまだ知られていない．超越数，および，超越数かどうかいまだ知られていない数の例をそれぞれ以下に記し

ておく.

超越数	e, π, $\log 2$, $\log_{10} 2$, πe^{π} etc.
超越数かどうか不明	$e+\pi$, $e\pi$, $\dfrac{\pi}{e}$, e^{e}, π^{e} etc.

超越数が一つ得られると，それを多項式に代入する，あるいは逆数や平方根をとるなどの代数的操作により，多くの異なる“代数的従属な超越数”が生成される．しかし，こうしてできる超越数というのは，あくまで全体の一部にすぎない．それゆえ，どんな多項式でも結びつけられない“代数的独立な超越数”を得ることが，足掛かりとして重要であるといえる．こうした動機付けを踏まえ，上述の Lindemann が実際に証明した定理を記す．なお，Weierstrass もその証明に寄与している．

定理 3.1（Lindemann-Weierstrass の定理） 複素数 $x_1, \cdots, x_n$ を相異なる代数的数とする．このとき，$e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上 1 次独立である．ここで，$\bar{\mathbb{Q}}$ は代数的数全体のなす体を表す．

この定理は，次の定理と同値である．この同値性の証明は塩川［5］を参照.

定理 3.2 複素数 $x_1, \cdots, x_n$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立な代数的数とする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n, e^{x_1}, \cdots, e^{x_n})/\mathbb{Q} = n$$

が成り立つ（すなわち，$e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立である）.

さらに，定理 3.2 を一般化した主張として知られるのが，Schanuel 予想である．現在のところ，これは超越数論における未解決問題である.

Schanuel 予想 複素数 $x_1, \cdots, x_n$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立とする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n, e^{x_1}, \cdots, e^{x_n})/\mathbb{Q} \geq n$$

が成り立つだろう（すなわち，$2n$ 個の数のうち少なくとも n 個は代数的独立だろう）.

これは定理 3.2 の仮定から，$x_1, \cdots, x_n$ が代数的数であるという条件を外したものとなっており，すなわち，その主張を含んだ改良形といえる．この予想が証明されると，様々な数の代数的独立性（と超越性）が証明されるため，有用である．以下に 2 つの簡単な例を挙げておく．詳細は西岡［6］を参照.

(1) e と π の代数的独立性

$x_1 = 1$，$x_2 = i\pi$ とおく．$i\pi$ は無理数より，x_1, x_2 は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である．したがって，上式より，

$$\mathrm{tr.deg}\ \mathbb{Q}(1, i, \pi, e, -1)/\mathbb{Q} \geq 2$$

を得る．ここで，1，-1 は代数的なので，e と $i\pi$ が代数的独立であることがわかる．e と π が代数的従属であると仮定する．このとき，$f(X_1, X_2) \neq 0$ かつ $f(e, \pi) = 0$ をみたす $f \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$ が存在する．ここで，

$$g(X_1, X_2) = f(X_1, iX_2)\, f(X_1, -iX_2)$$

とおくと，$g \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$ であり，$g(e, i\pi) = f(e, -\pi)\, f(e, \pi) = 0$ となるから，e と $i\pi$ が代数的独立であることに矛盾する． □

(2) e と e^e の代数的独立性

$x_1 = 1$，$x_2 = e$ とおく．e は無理数より，x_1, x_2 は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である．したがって，上式より，

$$\mathrm{tr.deg}\ \mathbb{Q}(1, e, e, e^e)/\mathbb{Q} \geq 2$$

を得る．ここで 1 は代数的なので，e と e^e が代数的独立であることがわかる．なお，帰納法を用いれば，e，e^e，e^{e^e}，$\cdots$ の形をした有限個の数の代数的独立性も示される． □

さて，続いてが本題である．Schanuel 予想の類似の結果として，1971 年に James Ax により証明されたのが以下である．

定理 3.3（**Ax の定理**）　(F, D) を微分体とし，$C = C_F$ を標数が 0 の代数閉体であるとする．$x_1, \cdots, x_n$，$y_1, \cdots, y_n \in F$ は $D(x_i) = D(y_i)/y_i$ をみたし，$x_1, \cdots, x_n$ は mod C で $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立とすると，

$$\mathrm{tr.deg}\ C(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)/C \geq n + 1$$

が成り立つ．

この定理において，$F = \mathbb{C}((t))$ とし[*1]，$D = d/dt$ とする．$\mathbb{Q}$ 上 1 次独立で，最低次の次数が 1 以上の形式べき級数 $x_1, \cdots, x_n \in F$ について，$y_1 = e^{x_1}, \cdots, y_n = e^{x_n}$ とおく．このとき，

[*1] 形式べき級数体，$F = \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in C,\ m \in Z \right\}$.

確かに $D(x_i)=D(y_i)/y_i$ をみたしているから，

$$\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{C}(x_1,\cdots,x_n,e^{x_1},\cdots,e^{x_n})/C\geq n+1$$

を得る．よって，

$$\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{C}(t)\,(x_1,\cdots,x_n,e^{x_1},\cdots,e^{x_n})/\mathbb{C}(t)\geq n$$

となり，これは Schanuel 予想の式における $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{C}(t)$ に置き換わった形となっている．

例 3.4 （e^t と e^{e^t} が $\mathbb{C}(t)$ 上代数的独立であること）
$x_1=t$，$x_2=e^t$ とし，$y_1=e^t$，$y_2=e^{e^t}$ とおく．このとき，

$$D(x_1)=D(y_1)/y_1,\quad D(x_2)=D(y_2)/y_2$$

をみたしているから，

$$\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{C}(t)\,(t,e^t,e^t,e^{e^t})/\mathbb{C}(t)\geq 2$$

である．ここで，t は代数的なので，e^t と e^{e^t} が $\mathbb{C}(t)$ 上代数的独立であることがわかる．

4　主定理（Ax の定理）の証明

さて，以下では上述の「Ax の定理」を証明していく．このために，まずは微分加群を定義し，その性質を記す．以下，C を標数が 0 の体とし，F/C を体の有限生成拡大とする．

定義 4.1　F 上の線形空間 V について，V から F への線形写像全体のなす線形空間を V の双対空間という．特に，F 上の線形空間 $Der(F/C)$ の双対空間を $\Omega_{F/C}$ と表し，F の C 上の微分加群という．

さて，E を F/C の中間体とする．このとき，自然な単射として，

$$f_{E/C}: Der(F/E)\to Der(F/C)$$

を考えることができる．これは，F の E 上の微分は，F の C 上の微分と考えられるからである．また，この写像の双対をとると，自然な全射として，

$$\phi_{E/C}:\Omega_{F/C}\to\Omega_{F/E}$$

を得る．簡単のため，$\phi=\phi_{E/C}$，$f=f_{E/C}$ と略記する．加えて，

$$d_{F/C}:F\to\Omega_{F/C}$$

を，$x\in F$，$D\in Der(F/C)$ に対して，

$$d_{F/C}(x)(D) = D(x)$$

と定義する．なお，これらも，$d_1 = d_{F/C}$，$d_2 = d_{F/E}$ と略記する．

命題 4.2　$d_1 \in Der_C(F, \Omega_{F/C})$ である．

証明　d_1 が定義 1.7 をみたしていることを確認すればよい．実際, $x, y \in F$, $D_1 \in Der(F/C)$ に対して，

$$d_1(x+y)(D_1) = D_1(x+y) = D_1(x) + D_1(y) = d_1(x)(D_1) + d_1(y)(D_1)$$

$$\begin{aligned} d_1(xy)(D_1) = D_1(xy) = xD_1(y) + yD_1(x) &= xd_1(y)(D_1) + yd_1(x)(D_1) \\ &= (xd_1(\mathrm{y}) + yd_1(x))(D_1) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

命題 4.3　$\phi d_1 = d_2$ である．

証明　$D_2 \in Der(F/E)$，$\omega \in \Omega_{F/C}$ に対して，

$$\phi(\omega)(D_2) = \omega(f(D_2))$$

であるから，$x \in F$ に対して，

$$\phi(d_1(x))(D_2) = d_1(x)f(D_2) = f(D_2)(x) = D_2(x) = d_2(x)(D_2)$$

が成り立つ． □

命題 4.4　F/C の超越基底を $x_1, \cdots, x_m$ とする．このとき，$x \in F$ に対して，

$$d_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x}{\partial x_i} d_1(x_i)$$

が成り立つ．

証明　$D_1 \in Der(F/C)$ に対して，

$$\left(D_1 - \sum_{i=1}^{m} D_1(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(x_j) = D_1(x_j) - D_1(x_j) \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 0$$

である．ここで，$x_1, \cdots, x_m \in F$ は C 上超越的より，$x_j \neq 0$ に対して，

$$D_1 = \sum_{i=1}^{m} D_1(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

である．このとき，d_1 の定義と上式より，

$$d_1(x)(D_1) = D_1(x) = \sum_{i=1}^{m} D_1(x_i)\frac{\partial x}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x}{\partial x_i}d_1(x_i)(D_1)$$

を得る． □

補足を 1 つ述べておく．$\frac{\partial}{\partial x_1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x_m}$は，$Der(F/C)$ の F 上の基底になっており，また，$d_1(x_1), \cdots, d_1(x_m)$ はこれらの双対基底となっていることが確認できる．

命題 4.5　$a_1, \cdots, a_m \in C$ を $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立とする．$x, y_1, \cdots, y_m \in F$ が，

$$d_1(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d_1(y_i)}{y_i} = 0$$

をみたすならば，

$$d_1(x) = d_1(y_1) = \cdots = d_1(y_m) = 0$$

である．

証明　背理法による．$d_1(y_1) \neq 0$ と仮定する．ここで，$y_1 \in \bar{C}$ とすると，ある既約な多項式 $f(X) \in C[X]$ が存在し，$f(y_1) = 0$ となる．一方，C は標数が 0 のため，$f(X)$ は重根をもたないので，$f'(y_1) \neq 0$ である．これと，

$$0 = d_1(f(y_1)) = f'(y_1)d_1(y_1)$$

を合わせて，$d_1(y_1) = 0$ となり，矛盾する．ゆえに，$y_1 \notin \bar{C}$ である．F/C の超越基底を y_1, $x_2, \cdots, x_n$ とし，$E = C(x_2, \cdots, x_n)$ とする．F/E は超越次数 1 の有限生成拡大となっている．ここで, E 上自明で $v(y_1) > 0$ となる F の正規離散付値 v をとる．このとき, $v(\mathrm{t}) = 1$ ならば, 定理 2.9 より, F から形式べき級数体 $\bar{E}((\mathrm{t}))$ への埋め込みが存在し, これは微分同型となっている．$t^e = y_1$ とすると，

$$\frac{\partial}{\partial t}t^e = \frac{\partial y_1}{\partial t} \Leftrightarrow et^{e-1} = \frac{\partial y_1}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial t}{\partial y_1} = e^{-1}t^{1-e}$$

を得る．また，命題 5.4 より，$1 \leq i \leq m$ に対して，

$$d_1(x) = \frac{\partial x}{\partial y_1}d_1(y_1) + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial x}{\partial x_j}d_1(x_j)$$

$$d_1(y_i) = \frac{\partial y_i}{\partial y_1} d_1(y_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} d_1(x_j)$$

である．これらを命題の条件式に代入すると，

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} d_1(y_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial x}{\partial x_j} d_1(x_j) + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{y_i} \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_1} d_1(y_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} d_1(x_j) \right) = 0$$

となる．ここで，$d_1(y_1)$，$d_1(x_2)$，$\cdots$，$d_1(x_n)$ は $\Omega_{F/C}$ の F 上の基底より，

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_1} = 0 \quad \cdots\cdots ⊛$$

を得る．$r_i \in \mathbb{Z}$，$c_{i0} \neq 0$ について，$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} t^{r_i + k}$ と展開すると，

$$\frac{1}{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_1} = \frac{1}{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y_1} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} (r_i + k) t^{r_i + k - 1}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} t^{r_i + k}} \frac{t^{1-e}}{e}$$

である．$k = 0$ の項のみに注目すると，

$$\frac{r_i}{t} \frac{t^{1-e}}{e} = \frac{r_i}{e} t^{-e}$$

であるから，上式の最左辺を$\frac{r_i}{e} t^{-e}$ +（位数$-e+1$ 以上の項）と表すことができる．これを⊛に代入して，位数が$-e$ の項の係数のみに注目すると，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i r_i = 0$$

を得る．ここで仮定より，$a_1, \cdots, a_m \in C$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立だったから，$r_1 = \cdots = r_m = 0$ となる．一方で，$t^e = y_1$ であるから，$r_1 = e$ である．これは矛盾であり，$d_1(y_1) = 0$ を得る．以下，$x, y_2, \cdots, y_m$ についても同様. □

定義 4.6　$D_1 \in Der(F/C)$ を $D_1(E) \subset E$ をみたすとする．また，$D_2 \in Der(F/E)$，$\omega \in \Omega_{F/E}$ とする．$[D_1, D_2]$ を

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

と定義し，また，$D^1\omega$ を

$$D^1\omega(D_2) = D_1(\omega(D_2)) - \omega[D_1, D_2]$$

と定義する．ここで，$[D_1, D_2] \in Der(F/E)$，$D^1\omega \in \Omega_{F/E}$ であることは，微分の定義より簡単に確認することができる．

命題 4.7　定義 4.6 の仮定のもとで，$x \in F$ に対して，

（1）$D^1(x\omega) = D_1(x)\omega + xD^1\omega$

（2）$D^1 d_2(x) = d_2(D_1(x))$

が成り立つ．

証明　(1) について，

$$\begin{aligned} D^1(x\omega)(D_2) &= D_1(x\omega)(D_2) - x\omega[D_1, D_2] \\ &= D_1(x)\omega(D_2) + xD_1(\omega(D_2)) - x\omega[D_1, D_2] \\ &= D_1(x)\omega(D_2) + xD^1\omega(D_2) \end{aligned}$$

より従う．(2) について，

$$\begin{aligned} (D^1 d_2(x))(D_2) &= D_1(d_2(x)(D_2)) - d_2(x)[D_1, D_2] \\ &= D_1(D_2(x)) - (D_1D_2 - D_2D_1)(x) \\ &= D_1(D_2(x)) - D_1(D_2(x)) + D_2(D_1(x)) \\ &= D_2(D_1(x)) \\ &= d_2(D_1(x))(D_2) \end{aligned}$$

より従う．□

命題 4.8　定義 4.6 の仮定のもとで，$x, y \in F$ を C 上代数的従属であるとする．このとき，

$$D^1(xd_2(y)) = d_2(xD_1(y))$$

が成り立つ．

証明　$y \notin \bar{C}$ としてよい．x の $C[y]$ 上の最小多項式を $f(X, y) \in C[y][X]$ とする．$f(x, y) = 0$ の両辺に D_1 を作用させると，命題 4.4 より，

$$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)D_1(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)D_1(y) = 0$$

を得る．同様に，$D_2 \in Der(F/E)$ を作用させると，

$$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)D_2(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)D_2(y) = 0$$

を得る．この式を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)D_2(x)}{D_2(y)}$ と変形して，上式に代入すると，

$$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)D_1(x) - \frac{\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)D_1(y)D_2(x)}{D_2(y)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)(D_1(x)D_2(y) - D_1(y)D_2(x)) = 0$$

である．ここで，f は最小多項式であるから，$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y) \neq 0$ であり，

$$D_1(x)D_2(\mathrm{y}) - D_1(\mathrm{y})D_2(x) = 0$$

を得る．これはすなわち，任意の D_2 に対して，d_2 の定義より，

$$D_1(x)d_2(\mathrm{y})(D_2) - D_1(\mathrm{y})d_2(x)(D_2) = 0$$

ということであるから，$D_1(x)d_2(\mathrm{y}) = D_1(\mathrm{y})d_2(x)$ となる．このとき，

$$\begin{aligned} D^1(xd_2(\mathrm{y})) &= D_1(x)d_2(\mathrm{y}) + xD^1(d_2(\mathrm{y}))\ (\text{命題 4.7 (1)}) \\ &= D_1(\mathrm{y})d_2(x) + xd_2(D_1(\mathrm{y}))\ (\text{上式と命題 4.7 (2)}) \\ &= d_2(xD_1(\mathrm{y}))\ (\text{命題 4.2}) \end{aligned}$$

を得る． □

命題 4.9　(F, D) を微分体とし，$E = C = C_F$ とする．$\omega_1, \cdots, \omega_m \in \Omega_{F/C}$ が F 上 1 次従属で，$1 \leq i \leq m$ に対して，$D^1\omega_i = 0$ をみたすならば，$\omega_1, \cdots, \omega_m$ は C 上 1 次従属である．

証明　$\omega_1, \cdots, \omega_m$ が F 上 1 次従属であることから，ある t $(0 \leq t < m)$ が存在して，

$$\langle \omega_1, \cdots, \omega_m \rangle_F = \langle \omega_1, \cdots, \omega_t \rangle_F$$

をみたす．すなわち，$\omega_1, \cdots, \omega_t$ を F 上 1 次独立としてよい．このとき，$a_i \in F$ に対して，

$$\omega_m = \sum_{i=1}^{t} a_i \omega_i$$

と表すことができる．この式の両辺に D^1 を作用させると，命題 4.7 (1) より，

$$\sum_{i=1}^{t} (D(a_i))\omega_i = 0$$

である．ここで，$\omega_1, \cdots, \omega_t$ は F 上 1 次独立であるから，$D(a_i) = 0$ である．従って，$a_i \in C$ を得る． □

以上を踏まえて，主定理の証明を記す．

定理 3.3 の証明　背理法による．

$$\mathrm{tr.deg}\, C(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)/C \leq n$$

と仮定する．$1 \leq i \leq n$ に対して，$\omega_i = d_1(x_i) - d_1(y_i)/y_i \in \Omega_{F/C}$ とおく．このとき，$\Omega_{F/C}$ の部分空間 $\langle d_1(x_1), \cdots, d_1(x_n), d_1(y_1), \cdots, d_1(y_n)\rangle_F$ の次元は n 以下であるから，$d_1(x_1)$，$\omega_1, \cdots, \omega_n$ は F 上 1 次従属である．さて，ここで仮定より，$x_1 \notin C$ であるから，$D(x_1) \neq 0$ である．よって，

$$X = (D(x_1))^{-1} D \in Der(F/C)$$

を定義できる．このとき，

$$\begin{aligned} &X(x_1) = (D(x_1))^{-1} D(x_1) = 1 \\ &X(x_i) = (D(x_1))^{-1} D(x_i) = (D(x_1))^{-1} \left(\frac{D(y_i)}{y_i}\right) = \frac{X(y_i)}{y_i} \end{aligned}$$

である．ここで，$E = C$ として，定義 4.6 のように $X^1\omega_i$ を定義すると，命題 4.8 より，

$$X^1\omega_i = X^1 \left(d_1(x_i) - \frac{d_1(y_i)}{y_i}\right) = d_1(X(x_i)) - d_1\left(\frac{X(y_i)}{y_i}\right) = 0$$

を得る．よって，$X^1(d_1(x_1)) = 0$，$X^1\omega_i = 0$ であるから，命題 4.9 より，これらは C 上 1 次従属であることがわかる．すなわち，$a, b_i \in C$ に対して，

$$ad_1(x_1) + \sum_{i=1}^{n} b_i \omega_i = 0 \qquad \cdots\cdots \circledast$$

とすると，$(a, b_1, \cdots, b_n) \neq \mathbf{0}$ である．もし $(b_1, \cdots, b_n) = \mathbf{0}$ だとすると，$d_1(x_1) \neq 0$ より，$a = 0$ となって 1 次従属であることに反するので，$(b_1, \cdots, b_n) \neq \mathbf{0}$ である．$c_1, \cdots, c_r$ を C の $\mathbb{Q}$ 上基底とすると，$a_{ij} \in \mathbb{Q}$ に対して，

$$b_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, c_j$$

と表せる．ただし，ある $a_{ij} \neq 0$ である．ここで，$pa_{ij} \in \mathbb{Z}$ となるように $p \in \mathbb{N}$ をとり，$A_{ij} = pa_{ij}$ とおくと，

$$pb_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\, c_j$$

と表せる．$\circledast$の両辺を p 倍して，

$$pad_1(x_1) + \sum_{i=1}^{n} pb_i \left(d_1(x_i) - \frac{d_1(y_i)}{y_i} \right) = 0$$

となる．ここに上式を代入して，

$$d_1 \left(pax_1 + \sum_{i=1}^{n} pb_i x_i \right) - \sum_{j=1}^{r} c_j \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{d_1(y_i)}{y_i} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d_1 \left(pax_1 + \sum_{i=1}^{n} pb_i x_i \right) - \sum_{j=1}^{r} c_j \frac{d_1 \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{A_{ij}} \right)}{\prod_{i=1}^{n} y_i^{A_{ij}}} = 0$$

となる．ここで，$c_1, \cdots, c_r$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるから，命題 4.5 より，

$$d_1 \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{A_{ij}} \right) = 0$$

を得る．したがって，

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{A_{ij}} \in C$$

である．D の対数微分により，

$$0 = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \frac{D(y_1)}{y_i} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} D(x_i) = D \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i \right)$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i \in C$$

となる．仮定より，x_i の $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合が C に含まれているとき，その係数はすべて 0 であるが，これはある $A_{ij} \neq 0$ であることに矛盾する．よって，

$$\text{tr.deg}\, C(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)/C \geq n + 1$$

を得る． □

参考文献

[1] 西岡久美子，微分体の理論，共立出版，2010.

[2] Ax, J., On Schanuel's conjecture, Ann. of Math., 93 (1971), 252-268.

[3] R. C. Churchill, Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions, Hunter College and the Graduate Center, 2006.

[4] M. Van Der Put, Galois Theory of Differential Equations, Algebraic Groups and Lie Algebras, J. Symbolic Computation (1999) 28, 441-473.

[5] 塩川宇賢，無理数と超越数，森北出版，1999.

[6] 西岡久美子，超越数とはなにか 代数方程式の解にならない数たちの話，講談社，2015.