Invariants of hyperbolic cone manifolds fibering over the circle

Ryosuke Yamazaki

abstract. In this paper, we study arithwetic (hyperbolic) surface bundles and its Kleinian models. Many people have locked at topology and geowetry of surface burdles over the circle. We consider some invariants of its Kleinian models.

1. Introduction

有限体積双曲 3 次元多様体の有名なクラスとして，pseudo Anosov 写像をモノドロミーとする円周上の曲面束がある．3 次元多様体論に革命を与えた Thurston は，サーベイ論文 [32] で挙げた 24 の問題群の中で「任意の有限体積双曲 3 次元多様体は，ある有限被覆を取れば円周上の曲面束の構造をもつ」という virtually fibered 予想を提唱した．にわかには信じ難いこの予想は，後に Agol [1, 2] や Wise [38] によって肯定的に解決された [1]．このことから，円周上の曲面束が特別に重要な双曲多様体であることがわかる．

一方で，有限体積 Klein 群の通約類（commensurability class）が重要な不変量を持つことが知られている．これらの不変量を用いることにより，算術的（arithmetic）というとても興味深い有限体積双曲構造のクラスが定義され, 今日まで多くの研究が行われている．ここでは，曲面束やその Klein 群モデルの算術性に注目し，群の離散性と算術性から得られる不等式不変量の評価と現在進行中の問題について論じる．

2. Preliminaries

2.1　Surface bundles. はじめに，円周上の曲面束の幾何構造について簡単に復習し，Jørgensen が最初に曲面束として構成した，ファイバー曲面が錐特異点を 1 つもつ 2-orbifold 束について議論する．なお，曲面束に関するより詳細な研究については，作間誠氏による曲面束とファイバー構造に関する素晴らしいサーベイ [25] や，蒲谷祐一氏による virtually fibered 予想の解決の素晴らしい解説ノート [16] を参照されたい．

Definition 2.1. 曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ と向きを保つ自己同相写像 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ に対して，（境界付き）3 次元多様体 $\Sigma \times [0, 1]$ の 2 つの境界成分を $\phi : \Sigma \to \Sigma$ で貼り合わせて得られる 3 次元多様体

$$M_\phi : = \Sigma \times [0, 1] /(x, 0) \sim (\phi(x), 1)$$

を，ϕ をモノドロミーとする円周上の曲面束（surfrace bundle over the circle），あるいは写

---

[1] コンパクト（閉多様体）の場合は Agol，境界付きの場合は Wise による．

像トーラス（mapping torus）という．

曲面束の幾何を論じる上で最も重要な主張が次の定理である．

Theorem 2.1.（Nielsen-Thurston classification）$Mod(\Sigma)$ を 曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ の写像類群（Σ 上の同相写像のアイソトピー類全体のなす群）とする．任意の写像類 $\phi \in Mod(\Sigma)$ は次のいずれか一つを満たす．

(i) *periodic* : $Mod(\Sigma)$ の元として有限位数である．

(ii) *reducible* : ϕ で保存される, Σ 上の互いに disjoint な本質的単純閉曲線の族が存在する．

(iii) *pseudo-Anosov* : 横断的に交わる特異な測度付き葉層（mesured foliation）構造の組 $(\mathcal{F}^s, \mu_s), (\mathcal{F}^u, \mu_u)$ と 定数 $\lambda > 1$ が存在して，次が成り立つ：

$$\phi\,(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \mu_s/\lambda), \phi\,(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \lambda\mu_s).$$

Example (cf. [7]). 1 点穴あきトーラス $\Sigma = \Sigma_{1,1}$ に対し，写像類 $\phi \in Mod(\Sigma) \approx SL\,(2, \mathbb{Z})$ の行列表現のトレースをそのまま $\mathrm{tr}\,\phi$ と書くことにする．このとき，ϕ の Nielsen-Thurston type は

(i) $|\mathrm{tr}\,\phi| < 2$ のとき periodic,

(ii) $|\mathrm{tr}\,\phi| = 2$ のとき reducible,

(iii) $|\mathrm{tr}\,\phi| > 2$ のとき pseudo-Anosov.

これは，ϕ の行列表現を Möbius 変換群 $PS\,L\,(2, \mathbb{Z})$ へ射影したときに，それぞれ (i) 楕円型，(ii) 放物型，(iii) 双曲型であることと一対一に対応する．

p.A. 写像の幾何に関するより厳密な議論は，Casson-Bleiler [6] が詳しい．なお，モノドロミーが p.A. でない曲面束の幾何構造は，(i) が Seifert ファイバー束，(ii) は非自明なトーラス分解をもつ多様体に対応している．

Theorem 2.2. (Jørgensen [13]). $n \geq 2$，ψ, λ, ρ, x を以下の複素数とする．

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(17 - 8\cos\frac{\pi}{n}\right)^{1/2}\right\} \\
\lambda &= \exp\left(\frac{\pi i}{2n}\right) \\
\rho &= \frac{1}{2}\left\{(\psi + 2)^{1/2} + (\psi - 2)^{1/2}\right\} \\
x &= \frac{(-\psi + 3)^{1/2} + (-\psi - 1)^{1/2}}{2\,(\psi - 2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

このとき，Möbius 変換 $T, X, Y \in PS\,L\,(2, \mathbb{C})$ を

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} -\lambda x & -(1 + x^2) \\ 1 & \lambda^{-1} x \end{pmatrix},\quad Y = T X^{-1} T^{-1} X$$

とすると，T, X, Y が生成する群 G^* は Klein 群であり，次の表示をもつ.

$$G^* = \langle T, X, Y \mid [X, Y]^n = X^{-1}\,TXT^{-1}\,Y = TYXT^{-1}\,Y^{-1} = 1 \rangle.$$

さらにこのとき，$\mathbb{H}^3 / G^* \to S^1$ はファイバーが cone angle $2\pi/n$ の錐特異点を 1 つもつ特異トーラスである 2-orbifold 束である.

Theorem 2.2 を用いて，8 の字結び目補空間が（figure eight knot complement）が曲面束の構造をもつことを示すことができる．この議論は，多くを渡辺綾子氏の修士論文 [37] に負っている.

Jørgensen が構成した Klein 群 G^* の表示から基本関係 $[X, Y]^n = 1$ をなくした群を G とする.

$$\text{i.e.}\quad G = \langle T, X, Y \mid X^{-1}\,TXT^{-1}\,Y = TYXT^{-1}\,Y^{-1} = 1 \rangle.$$

ここで，G^* の生成系の基本関係 $[X, Y]^n = 1$ は，曲面束のファイバーの錐特異点に対応していたので，それをなくした群 G は，1 点穴空きトーラス束の双曲構造を表していることに注意する.

G の生成元に対し，$Y = TX^{-1}T^{-1}X$, $TYXT^{-1}\,Y^{-1} = 1$ より Y を消去すると，

$$TTX^{-1}T^{-1}XXT^{-1}X^{-1}TXT^{-1} = 1,\quad \text{i.e. } TX^{-1}T^{-1}XXT^{-1}X^{-1}TX = 1.$$

ここで，$A = TX^{-1}$, $B = T$ としよう．このとき，A, B は G の生成系をなし，

$$\begin{aligned} TX^{-1}T^{-1}XXT^{-1}X^{-1}TX &= TX^{-1}T^{-1}X\,(T^{-1}T)\,XT^{-1}(T^{-1}T)\,X^{-1}TX\,(T^{-1}T) \\ &= (XT^{-1})\,T^{-1}(XT^{-1})\,T\,(XT^{-1})\,T^{-1}(XT^{-1})\,T\,(XT^{-1})\,T \\ &= AB^{-1}A^{-1}BA^{-1}B^{-1}ABA^{-1}B \end{aligned}$$

より，A, B の基本関係は，

$$AB^{-1}A^{-1}BA^{-1}B^{-1}ABA^{-1}B = 1,\quad \text{i.e.}\quad ABA^{-1}BAB^{-1}A^{-1}BA^{-1}B^{-1} = 1.$$

以上より，G は次の表示をもつ：

$$G = \langle A,B \mid ABA^{-1}BAB^{-1}A^{-1}BA^{-1}B^{-1} = 1 \rangle.$$

これは 8 の字結び目群と同型であり，即ち円周上の曲面束 $\mathbb{H}^3/G$ が 8 の字結び目補空間となっている事実が従う.

Remark (cf. [4]). 一般に，ファイバーが曲面 S でモノドロミー ϕ の曲面束 $M \to S^1$ の基本群 $\pi_1(M)$ は，ファイバーの基本群 $H = \pi_1(S)$ と ϕ が誘導する基本群の同型写像 $\phi_* : H \to H$ に対して次の表示をもつ：

$$\pi_1(M) = H*_{\phi*}\langle H, t \mid tht^{-1} = \phi_*(h) \text{ for all } h \in H\rangle$$

即ち，$\pi_1(M)$ は $H = \pi_1(S)$ の ϕ_* に関する HNN 拡大である．

2.2. Arithmeticity. 続いて，双曲 3 次元多様体や Klein 群の算術性と通約不変量を定義し，次節で算術的双曲構造をもつ曲面束の例として 8 の字結び目補空間について調べる．本節で論じる内容は Maclachlan-Reid [19] が詳しい．

Definition 2.2. $\mathcal{A}$ を体 k 上の中心代数で k 上 4 次元ベクトル空間の構造をもつものとする．$\mathcal{A}$ が k 上の四元数環（*quaternion algebra*）であるとは，$\mathcal{A}$ の k- 基底 $\{1, i, j, l\}$ が次の 3 条件を満たすことをいう．

(i) 1 は $\mathcal{A}$ の単位元である．

(ii) ある $a, b \in k$ が存在して，$i^2 = a1, j^2 = b1$.

(iii) $ij = -ji = l$.

このとき $\mathcal{A} = \left(\dfrac{a, b}{k}\right)$（*Hilbert symbol*）と表す．また，$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 l$ のノルム $n(x)$ を

$$n(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

で定義する．

Definition 2.3. $\mathcal{A}$ を体 k 上の中心代数で k 上 4 次元ベクトル空間の構造をもつものとする．$\mathcal{A}$ が k 上の四元数環（*quaternion algebra*）であるとは，$\mathcal{A}$ の k- 基底 $\{1, i, j, l\}$ が次の 3 条件を満たすことをいう．

(i) 1 は $\mathcal{A}$ の単位元である．

(ii) ある $a, b \in k$ が存在して，$i^2 = a1, j^2 = b1$.

(iii) $ij = -ji = l$.

このとき $\mathcal{A} = \left(\dfrac{a, b}{k}\right)$（*Hilbert symbol*）と表す．また，$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 l$ のノルム $n(x)$ を

$$n(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

で定義する．

Example. 次が成り立つ．

(i) 四元数環 $\left(\dfrac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right)$ は Hamilton の四元数体 $\mathcal{H}$ であり，ノルム $n_{\mathcal{H}}(x)$ は euclidean norm である．

(ii) $M(2, \mathbb{R}) = \left(\dfrac{1, 1}{\mathbb{R}}\right)$ となる．実際，

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ i=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ l=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

となり，$n_{M(2,\mathbb{R})}=\det(x)$ である．

Definition 2.4. $\mathcal{A}$ を体 k 上の四元数環，$\varphi : k \hookrightarrow \mathbb{R}$ を埋め込みとする．$\mathcal{A} \otimes_{\varphi(k)} \mathbb{R}$ が Hamilton の四元数体となっているとき，$\mathcal{A}$ は k の埋め込み φ で分岐する（*ramified at* φ）という．

Definition 2.5. k を数体，即ち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とし，R_k を k の整数環とする．k の四元数環 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{O}$ が $\mathcal{A}$ の *order* であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

(i) $\mathcal{O}$ は $\mathcal{A}$ の 1 を含む部分環である．

(ii) $\mathcal{O}$ は R_k- 代数として有限生成である．

(iii) $\mathcal{O} \otimes_{R_k} k \cong \mathcal{A}$.

$\mathbb{Q}$ は標数 0 なので，数体 k に対してある代数的数 $\alpha \in \mathbb{Q}$ が存在して，$k=\mathbb{Q}(\alpha)$ となる．α の共役元 $\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d$ に対して，体の同型 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_d$ を

$$\sigma_i : k \hookrightarrow \mathbb{C}\,;\ \sum_{n=0}^{d-1} a_n\alpha^n \longmapsto \sum_{n=0}^{d-1} a_n\alpha_i^n$$

で定める．$\alpha_i \notin \mathbb{R}$ ならば $\bar{\alpha}$ も α の共役なので，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_d$ のうち $\sigma_i(k) \subset \mathbb{R}$ となるものが r_1 個，$\sigma_i(k) \not\subset \mathbb{R}$ となるものが r_2 個のとき，

$$d = r_1 + 2r_2$$

が成り立つ．このとき，数体 k は r_1 個の実素点（*real places*）と r_2 個の複素素点（*complex places*）をもつという．特に $r_2=0$ のとき，k は総実（*totally real*）であるという．

以上のもと算術的 Klein 群を定義する．なお，本稿では 3 次元 Klein 群についてのみ論じることとするが，面積有限 Fuchs 群に対しても算術性が定義されており，多くの研究がなされている．算術的 Fuchs 群については，[19] の他，Katok や前田多恵氏の論文 [21] などが詳しい．

k をただ 1 つの複素素点をもつ数体，$\mathcal{A}=\left(\dfrac{a,b}{k}\right)$ を k のすべての実素点で分岐している四元数環，$\mathcal{O}$ を $\mathcal{A}$ の order とし，$\rho : \mathcal{A} \hookrightarrow M(2,\mathbb{C})$ を k- 代数の埋め込みとする．具体的には，$\mathcal{A}$ の元 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 l$ に対して

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{a}x_1 & x_2 + \sqrt{a}x_3 \\ b(x_2 - \sqrt{a}x_3) & x_0 - \sqrt{a}x_1 \end{pmatrix}$$

と定めることにより構成できる．ρ を $\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid n(x)=1\}$ に制限すると，$\rho(\mathcal{O}^1) \subset SL(2,\mathbb{C})$ がわかる．$P : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ を射影とすると，$P\rho(\mathcal{O}^1) \subset PSL(2,\mathbb{C})$ は体積有限

Klein 群となる ([19]).

Definition 2.6. Möbius 変換の群 G_1, G_2 が狭い意味で通約的（*directly commensurable*）であるとは，$G_1 \cap G_2$ が G_1, G_2 の部分群として有限指数であることをいう．群 G_1, G_2 が広い意味で通約的（*commensurable in the wide sense*）であるとは，Möbius 変換でいずれかの共役を取れば互いに狭い意味で通約的になることをいう．

さらに，2 つの双曲多様体が通約的であるとは，共通の有限被覆となる双曲多様体が存在することをいう．なお，Möbius 変換による共役で Klein 群に対応する双曲構造は不変[2]なので，双曲多様体の通約性と Klein 群の広い意味の通約性が同値である．したがって，以下通約性は広い意味での通約性を考える．

Definition 2.7. 有限体積 Klein 群 $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ が算術的（*arithmetic*）であるとは，ただ 1 つの複素素点をもつ数体 k，k のすべての実素点で分岐している四元数環 $\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ の order $\mathcal{O}$ が存在して，k- 代数の埋め込み $\rho : \mathcal{A} \hookrightarrow M(2,\mathbb{C})$ に対し，Γ と $P\rho(\mathcal{O}^1)$ が広い意味で通約可能であることをいう．

Möbius 変換の群 $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ に対し，$\Gamma^{(2)} = \langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma \rangle$ とする．

- $k\Gamma := \mathbb{Q}\left(\mathrm{tr}\,\gamma \mid \gamma \in P^{-1}\left(\Gamma^{(2)}\right)\right)$を *invariant trce field* という．
- $A\Gamma = \left\{ \sum_{finite} a_i \gamma_i \mid a_i \in k\Gamma,\ \gamma_i \in P^{-1}\left(\Gamma^{(2)}\right) \right\}$ を *invariant quaternion algebra* という．

定義より，$A\Gamma$ は $k\Gamma$- 代数である．なお，Γ が有限体積 Klein 群であれば $k\Gamma$ は数体となることが知られている ([19])．次の主張から，invariant trce field と invariant quaternion algebra は算術的 Klein 群の通約不変量である．

Proposition 2.3 ([19]). 数論的 Klein 群（Fuchs 群）$\Gamma_1, \Gamma_2 \subset PSL(2,\mathbb{C})$（$PSL(2,\mathbb{R})$）が通約可能であることの必要十分条件は，$(k\Gamma_1, A\Gamma_1) = k\Gamma_2, A\Gamma_2$ が成り立つことである．

これらの通約不変量を用いて算術的 Klein 群は以下の通り特徴づけられ，実際に数論との結びつきが極めて強いことがわかる．

Theorem 2.4 (Gehring-Maclachlan-Martin-Reid [9], Theorem 4.3). Möbius 変換の群 $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ が算術的 Klein 群であることの必要十分条件は，次の 4 条件を満たすことである．

1. $k\Gamma$ はただ 1 つの複素素点をもつ数体である．
2. 任意の $g \in \Gamma$ に対して $\mathrm{tr}\, g$ は代数的整数である．
3. $A\Gamma$ は $k\Gamma$ のすべての実素点で分岐する．

---

[2] 逆に，本稿で論じる双曲多様体は有限体積なので，Mostow-Prasad の剛性から基本群のホロノミー表現は Möbius 変換による共役を除けば一意的である（Klein 群モデルのみである）ことに注意しておく．

4. $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は有限体積である.

さらにココンパクトでない算術的 Klein 群，即ち放物型変換を含む場合については次の主張が成り立つ.

Theorem 2.5. ココンパクトでない有限体積 Klein 群 G が算術的であることの必要十分条件は，ある Bianchi 群 $PSL(2, \mathcal{O}_d)$ と通約可能となることである .

一方，ココンパクトな算術的 Klein 群，即ち算術的双曲構造をもつ閉多様体の例としては Weeks 多様体とよばれるものがある．Jørgensen-Thurston 理論により，向き付け可能な有限体積双曲 3 次元多様体の体積全体のなす集合は ω^ω の形の整列集合．即ち，

$$\omega^\omega = \{1, 2, 3, \cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots, 2\omega, 2\omega+1, \cdots\}$$

の形の整列集合と同型の順序集合となる．その中で体積が最小である唯一の双曲多様体が Weeks 多様体であることが，Gabai-Meyerhoff-Milley [8] により示されており，後述する figure eight sister manifold を (5,2)-Dehn filling することで得られる．基本群は次のような表示をもつ：

$$\langle X, Y \mid X^2Y^2X^2Y^{-1}XY^{-1} = X^2Y^2X^{-1}YX^{-1}Y^2 = 1\rangle$$

このホロノミー表現（Weeks 多様体の Klein 群モデル）は

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ r & y^{-1} \end{pmatrix}.$$

ただし，x, y, r は $|x| \neq 1, |y| \neq 1$ となる 0 でない複素数であって，$z = x + x^{-1}$ に対して次を満たす.

$$z^3 - z - 1 = 0, r = 2 - z.$$

さらに，この z に対し簡単な計算から $k\Gamma = \mathbb{Q}(z), \Gamma = \Gamma^{(2)}$ が従い，$\mathrm{tr}\,\Gamma$ の元は全て $\mathbb{Q}(z)$ の代数的整数であることがわかる．このとき，$k\Gamma = \mathbb{Q}(z)$ はただ一つの実素点をもち，計算機を用いることで $A\Gamma$ は $k\Gamma$ の実素点で分岐することが示される（[18] 参照）．これより，Weeks 多様体は Theorem 2.4 の 4 条件を全て満たすので算術的であることが従う.

2.3. **Figure eight complement, sister and related orbifold.** まず，§2.2 で 8 の字結び目補空間が 1 点穴空きトーラス束になることを示したが，それらの双曲構造と算術性について補足しておく，Riley [24] と Thurston [33] は，8 の字結び目補空間が 2 つの理想四面体へ分割するできることを示し，その完備双曲構造を構成した．その結び目群

$$G = \langle A, B \mid ABA^{-1}BAB^{-1}A^{-1}BA^{-1}B^{-1} = 1\rangle.$$

のホロノミー表現（結び目補空間の Klein 群モデル）は

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\-\omega&1\end{pmatrix}\ （\omega は 1 の複素 3 乗根）$$

である．特に基本領域を考えることにより，Γ は Bianchi 群 $PSL(2,\mathcal{O}_3)$ の指数 12 の部分群となるので算術的となる．なお，Riley [24] は双曲結び目の算術性について次を示している．

Theorem 2.6 ([24]). 補空間が算術的双曲構造をもつ結び目は，8 の字結び目に限る．

さらに，算術的 1 点穴空き トーラス束はモノドロミーにより完全に分類される．写像類群 [3] $Mod(\Sigma)\approx SL(2,\mathbb{Z})$ の生成系

$$L=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

に対して，モノドロミーが RL の 1 点穴空きトーラス束が 8 の字結び目補空間となる．

Theorem 2.7 (Bowditch-Mackachlan-Reid [4], Theorem 5.1). 円周上の 1 点穴空きトーラス束 M が算術的であるための必要十分条件は，モノドロミーが $\pm RL$, $\pm R^2L$, $\pm R^2L^2$ のいずれか，あるいは M がその巡回被覆となっていることである．

Remark (cf. [19]). モノドロミーが $-RL$ の 1 点穴空きトーラス束は，8 の字結び目補空間同様に 2 つの理想四面体に分割される双曲 3 次元多様体である．2 つの理想四面体の貼り合わせで得られる 3 次元完備双曲構造はこの 2 例のみである．そこで，モノドロミーが $-RL$ の 1 点穴空きトーラス束は *figure eight sister manifold* と呼ばれる．

Theorem 2.2 とその後の考察から，Jørgensen が構成した 2-orbifold 束は，8 の字結び目補空間のカスプ（S^3 における 8 の字結び目 4_1 の管状近傍）に沿って cone angle $2\pi/n$ の cone singularity をもつ orbifold（特に錐多様体）である．これを *figure eight orbifold* という．カスプに沿って cone singularity が入ることに注意すると，orbifold 群を

$$\langle A_n, B_n \mid A_n^n = B_n^n = A_nB_nA_n^{-1}B_nA_nB_n^{-1}A_n^{-1}B_nA_n^{-1}B_n^{-1} = 1\rangle$$

ととることができる．Mednykh-Rasskazov [22] は，次のようにホロノミー表現がとれることを示した．

$$A_n=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{n} & \sqrt{-1}e^{\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n}\\ \sqrt{-1}e^{-\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n}\end{pmatrix},\quad B_n=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{n} & \sqrt{-1}e^{-\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n}\\ \sqrt{-1}e^{\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n}\end{pmatrix},$$

$$\text{where}\quad \cosh\rho_n=\frac{1}{4}\left(1+\cot^2(\pi/n)-i\sqrt{3\cot^4(\pi/n)+14\cot^2(\pi/n)-5}\right).$$

このホロノミー表現を Γ_n とする [4]．Thurston のレクチャーノート [33] では，この群 Γ_n が，

[3] 1 点穴空きトーラスへの写像類群 $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用は，被覆空間 $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ への線型変換により定まる．

$n = 2$ のとき球面構造，$n = 3$ のとき Euclid 構造，$n \geq 4$ のとき双曲構造を与えることを示している [5].

Theorem 2.8 (Hilden-Lozano-Montesinos [11]). Γ_n が算術的 Klein 群となるのは $n \in \{4, 5, 6, 8, 12\}$ のときに限られる．

3.1. **Vesnin-Masley's theorems.** まず，Vesnin-Masley [34] による figure eight knot orbifold 群に対する Jørgensen 数，GMT 数，Tan 数の評価に注目し，基本群が 2 元生成である円周上の曲面束に対して Vesnin-Masley の計算のアナロジーが成り立つかについて，次節で現在計算中の問題を交えて議論する．

Theorem 3.1. $PSL(2, \mathbb{C})$ の 2 元生成部分群 G に対して，

1. (Jørgensen [14]) G が非初等的のとき，次の不等式を満たす：
$$|\operatorname{tr}^2 X - 4| + |\operatorname{tr}[X, Y] - 2| \geq 1.$$
2. (Gehring-Martin [10], Tan [31]) $\operatorname{tr}[X, Y] \neq 1$ のとき，次の不等式を満たす：
$$|\operatorname{tr}^2 X - 2| + |\operatorname{tr}[X, Y] - 1| \geq 1.$$
3. (Tan [31]) $\operatorname{tr}^2 X \neq 1$ のとき，次の不等式を満たす：
$$|\operatorname{tr}^2 X - 1| + |\operatorname{tr}[X, Y]| \geq 1.$$

Jørgensen の不等式，Gehrin-Martin-Tan(GMT) の不等式，Tan の不等式で等号が成立する生成系をもつ 2 元生成 Klein 群をそれぞれ Jørgensen 群（*Jørgensen group*），GMT 群（*GMT group*），Tan 群（*Tan group*）という．この議論を精密化して，$PSL(2, \mathbb{C})$ の 2 元生成部分群の不変量を定義する．

Definition 3.1. Möbius 変換の組 $X, Y \in PSL(2, \mathbb{C})$ が Klein 群 G を生成しているとする．

1. $J(\mathrm{G}) = \inf\{|\operatorname{tr}^2 X - 4| + |\operatorname{tr}[X, Y] - 2| \,;\, \langle X, Y\rangle = G\}$ を G の Jørgensen 数（*Jørgensen number of G*）という．
2. $\mathcal{G}(G) = \inf\{|\operatorname{tr}^2 X - 2| + |\operatorname{tr}[X, Y] - 1| \,;\, \langle X, Y\rangle = G, \operatorname{tr}[X, Y] \neq 1\}$ を G の GMT 数（*GMT number of G*）という．
3. $\mathcal{T}(G) = \inf\{|\operatorname{tr}^2 X - 1| + |\operatorname{tr}[X, Y]| \,;\, \langle X, Y\rangle = G, \operatorname{tr}^2 X \neq 1\}$ を G の Tan 数（*Tan number of G*）

---

[4] figure eight orbifold 群であることを考えると，Jørgensen が構成した群と本質的に同じものである．

[5] 群の表示から楕円型は有限位数のものしか含まれないので離散群であり，したがって，$n \geq 4$ のとき Klein 群となる．

という．

これらの不変量を figure eight orbifold に対して計算する上で次の補題が非常に有効である．

Lemma 3.2 (Vesnin-Masley [34], Lemma 3.1). $\Gamma_n = \langle A_n, B_n \rangle$ $(n \geq 4)$ を Mednykh-Rasskazov [22] による figure eight orbifold 群のホロノミー表現とする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ：

$$|\operatorname{tr}[A_n, B_n] - \lambda| = \sqrt{(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 4(\lambda - 1)\sin^2(\pi/n)}$$

以降，断らなくても figure eight orbifold 群 $\Gamma_n = \langle A_n, B_n \rangle$は $n \geq 4$，即ち双曲構造に対応するものとする．

Jørgensen numbers.

Theorem 3.3 (Vesnin-Masley [34]). Γ_n の Jørgensen 数について，次が成り立つ：

$$1 \leq J(\Gamma_n) \leq 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{1 + 4\sin^2(\pi/n)}.$$

proof. Lemma 3.2 より，

$$J(\Gamma_n) \leq J(A_n, B_n) = |4\cos^2(\pi/n) - 4| + \sqrt{1 + 4\sin^2(\pi/n)} = 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{1 + 4\sin^2(\pi/n)}.$$

左の不等号は Jørgensen の不等式から従う． (*q.e.d.*)

過去の紀要でも紹介している通り，8 の字結び目群 $G(4_1)$ は Jørgensen 群，即ち $J(G(4_1)) = 1$ であることが佐藤宏樹氏 [27] により示されている．これに注意すると，Theorem 3.11 から次の興味深い主張が従う．

Corollary 3.4. $\lim_{n\to\infty} J(\Gamma_n) = J(G(4_1)) = 1$

$n \to \infty$により，figure eight orbifold の cone angle $2\pi/n$ が 0 に収束するが，これは幾何的には cone singularity がカスプへ近づくことを意味する．Corollary 3.4 は，cone angle がカスプに近づくにつれて Jørgensen 数にも同様の漸近挙動がみられることを意味している．

GMT numbers. まず，8 の字結び目群の GMT 数は純粋な整数論のみを用いて計算が可能である．

Theorem 3.5 (Vesnin-Masley [34]). 8 の字結び目群 $G(4_1)$ に対し，$\mathcal{G}(G(4_1)) = 3$.

[34] では，整数環 $\mathcal{O}_3$ の元の直接的な計算により示している．ここでは Callahan [5] による算術的 Klein 群に対する評価を用いながら証明する．代数的整数論に関する基本的な議

論は，[29, 30] 等の整数論の標準的な教科書を参照せよ．

Lemma 3.6 (Callahan 5]). 有限体積 2 元生成 Klein 群 Γ に対し，tr Γ が trace field $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\,\Gamma)$ の整数環 R に含まれるとする．このとき $G = \langle A, B\rangle = \langle X, Y\rangle$ ならば，$[X, Y]-2$ と $[A, B]-2$ の比 $([X, Y]-2)/([A, B]-2)$ は R の単元である．

Proof of Theorem 3.10. $G(4_1)$ の標準生成系

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathrm{tr}\,[A, B] = 2 + \omega^2$ より，

$$|\,\mathrm{tr}^2 A - 2\,| + |\,\mathrm{tr}\,[A, B]\ -1\,| = |\,4-2\,| + |1+\omega^2| = 2 + |-\omega\,| = 3.$$

今, $X, Y \in PSL(2, \mathbb{C})$ が $G(4_1) = \langle X, Y\rangle$を満たすとする．$G(4_1) < PSL(2, \mathcal{O}_3)$ より, $\mathbb{Q}\,(\mathrm{tr}\,\Gamma) = \mathbb{Q}\,(\sqrt{-3})$ となることに注意する．

まず $|\,\mathrm{tr}^2 X - 2\,| \geq 2$ を示す．$|\,\mathrm{tr}^2 X - 2\,| < 2$ とする．$\mathrm{tr}\,X = a + b\omega$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とすると，$\mathrm{tr}^2 X = (a^2 - b^2) + (2ab - b^2)\,\omega$ より，

$$|(a^2 - b^2 - 2) + (2ab - b^2)\,\omega\,|^2 < 4, \ \text{ i.e. } (a^2 - ab - b^2/2 - 2)^2 + 3(ab - b^2/2)^2 < 4.$$

この整数解は $(a, b) = (\pm 1, 0)$ のみであるが，これは $\mathrm{tr}\,X = 1$ より X が有限位数となり，$G(4_1)$ が torsion free であることに反する．

次に $|\,\mathrm{tr}\,[X, Y] - 1| \geq 1$ を示す．$\mathbb{Q}\,(\mathrm{tr}\,\Gamma) = \mathbb{Q}\,(\sqrt{-3})$ の整数環 R は Eisenstein 整数環 $\{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ であり，-1 の複素 3 乗根 $-\omega$ が生成する有限巡回群と一致するので，$R = \{\pm 1, \pm\omega\ \pm\omega^2\}$．Lemma 3.6 より，

$$\mathrm{tr}[X, Y] - 2 = \pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2 \ \text{ i.e. } \ \mathrm{tr}[X, Y] - 1 = 0, 2, -\omega, -\omega^2, \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

を得る．$\mathrm{tr}\,[X, Y] - 1 = 0$ は $\mathrm{tr}\,[X, Y]$ が有限位数となるので矛盾する．以上より $|\,[X, Y] - 1| = 1, \sqrt{3}$ となり，$|\,\mathrm{tr}\,[X, Y] - 1| \geq 1$ が従う．

以上より $|\,\mathrm{tr}^2 X - 2| + |\,\mathrm{tr}[X, Y] - 1| \geq 2 + 1 = 3$ から，A, B が GMT 数を与える生成系となり $\mathcal{G}(G(4_1)) = 3$ を得る．(*q.e.d.*)

続いて，figure eight orbifold 群に対して Theorem 3.11 と同様にして次が得られる．

Theorem 3.7 (Vesnin-Masley [34]). Γ_n の GMT 数について，次が成り立つ：

$$1 \leq \mathcal{G}\,(\Gamma_n) \leq 3 - 4\sin^2(\pi/n).$$

$n = 4$ とすると右辺が 1 となり，次を得る．

Corollary 3.8. Γ_4 は GMT 群である.

なお, 佐藤宏樹氏らのグループにより研究された Jørgensen 群の分類問題（[28] 等を参照）と同様, GMT 群の分類は 2 元生成 Klein 群の観点から重要な問題であるが, 解決はされていない. Repovš-Vesnin [23] は, Corollary 3.8 を起点に楕円型の生成系をもつ GMT 群を研究した. 分類問題を考える上で極めて有効なのは次の主張である.

Lemma 3.9 ([23]). Möbius 変換 $X, Y \in PSL(2, \mathbb{C})$ が Klein 群を生成し $\mathrm{tr}[X, Y] \neq 1$ を満たすとする. X が

(i) 放物型；

(ii) 双曲型；

(iii) 楕円型で位数が 2 または 3；

(iv) 楕円型で $\mathrm{tr}^2 X = 4\cos^2(\pi k/n)$, ただし $(n, k) = 1$, $n/k \geq 6$.

であるとき,

$$|\,\mathrm{tr}^2 X - 2\,| + |\,\mathrm{tr}[X, Y] - 1\,| > 1.$$

これより, GMT 群を生成する Möbius 変換 $X, Y \in PSL(2, \mathbb{C})$ に対して, X は位数 4 または 5 の楕円型, あるいは双曲型でない斜航型に限られる. [23] では X が位数 4 の場合が調べられている. なお, これにより Fuchs 群となる GMT 群は有限群に限ることが容易に示せるが, 証明は省略する.

さらに, GMT 数についても Corollary 3.4 のアナロジーは非常に興味深い問題だが, figure eight orbifold 群の GMT 数の厳密な値が一般に求められていないため, 未解決である. 一方, Γ_n が算術的である場合には Lemma 3.6 を用いて計算できそうではあるが, 良い結果はまだ得られていない.

Tan numbers. 8 の字結び目群の Tan 数は, GMT 数と同様に $PSL(2, \mathcal{O}_3)$ の部分群であることを用いて評価することはできるが, 厳密値はまだ計算されていない.

Theorem 3.10 (Vesnin-Masley [34]). 8 の字結び目群 $G(4_1)$ に対し, $1 + \sqrt{3} \leq \mathcal{T}(G(4_1)) \leq \sqrt{7} + \sqrt{3}$.

続いて, figure eight orbifold 群に対する Tan 数の評価は次の通りである.

Theorem 3.11 (Vesnin-Masley [34]). figure eight orbifold 群 Γ_n の GMT 数について, 次が成り立つ：

$$1 \leq \mathcal{T}(\Gamma_n) \leq \begin{cases} 3 - 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)} & (n \leqq 7), \\ 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, & (n = 8), \\ \sqrt{7 - 8\sin^2(\pi/n)} + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)} & (n \geqq 9). \end{cases}$$

3.2. **Further problems.** 基本群が 2 元生成である曲面束に対して，Jørgensen 数，GMT 数，Tan 数を計算し，その性質を調べることは Klein 群論の観点から価値のある問題であろう．8 の字結び目補空間と並んで有名なファイバー構造をもつ双曲多様体として，Whitehead 絡み目補空間（*Whitehead link complement*）がある．Wirtinger 表示から，Whitehead 絡み目 $\mathcal{W}$ の結び目群 $G_{\mathcal{W}} = \pi_1(S^3 \setminus \mathcal{W})$ は次の表示をもつ：

$$G_{\mathcal{W}} = \langle X, Y \mid [X^{-1}, Y][X, Y][X, Y^{-1}][X^{-1}, Y^{-1}] = 1 \rangle.$$

ホロノミー表現は

$$G_{\mathcal{W}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，Bianchi 群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ の部分群で有限体積なので，算術的 Klein 群であることが従う．

当然 Whitehead 絡み目補空間に対しても，カスプ（S^3 における Whitehead link $\mathcal{W}$ の管状近傍）に沿って cone singularity をもつ錐多様体が考えられる．これを *Whitehead link orbifold* という．Whitehead link $\mathcal{W}$ は成分を 2 つもつので，それぞれ cone angle $2\pi/m$ と $2\pi/n$ の cone singularity をもつ *Whitehead link orbifold* を $\mathcal{W}(m, n)$ で表す．この orbifold 群 $\pi^{\mathrm{orb}}(\mathcal{W}(m, n))$ は次の表示をもつ：

$$\pi^{\mathrm{orb}}(\mathcal{W}(m, n)) = \langle X_m, Y_n \mid X_m^m = Y_n^n = [X_m^{-1}, Y_n][X_m, Y_n][X_m, Y_n^{-1}][X_m^{-1}, Y_n^{-1}] = 1 \rangle.$$

この群のホロノミー表現も [22] で以下のように構成されている：

$$G(m, n) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{m} & ie^{\rho/2}\sin\frac{\pi}{m} \\ ie^{-\rho/2}\sin\frac{\pi}{m} & \cos\frac{\pi}{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & ie^{-\rho/2}\sin\frac{\pi}{n} \\ ie^{\rho/2}\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

where

$$u = \cosh\rho \text{ and } M = \cot\frac{\pi}{m},\ N = \cot\frac{\pi}{n},\ u^3 - MNu^2 + \frac{1}{2}\left(M^2N^2 + M^2 + N^2 - 1\right)u + MN = 0.$$

Theorem 3.12 (Hilden-Lozano-Montesinos [11]). Whitehead link orbifold 群 $G(m, n)$ が双曲構造を表す必要十分条件は $m, n \in \{3,4,5,\cdots,\infty\}$ となることであり，特に算術的となる (m, n) の組は以下に限られる：

$$(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(12,12),(\infty,\infty),(3,4),(3,6),(4,6),(\infty,3),(\infty,4),(\infty,6).$$

Whitehead link は成分を 2 つもつので，この $G(m, n)$ に対して Vesnin-Masley [34] のアナロジーを考えることは非常に興味深い．現在計算を進めているが，不変量の良い評価が存在するかは不明である．なお，Whitehead 絡み目群の GMT 数については次を得た．

Theorem 3.13. Whitehead 絡み目群 $G_{\mathcal{W}}$ に対して，$\mathcal{G}(G_{\mathcal{W}}) = 2 + \sqrt{5}$.

proof. G_W の標準生成系

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

をそれぞれ A, B とする．$\mathrm{tr}[A, B]-2=-2i$ であり, $\mathrm{tr}(G_W) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ なので, $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}(G_W))$ の（代数的）整数は $\pm 1, \pm\sqrt{-1}$ に限る．G_W は算術的 Klein 群なので，$G_W=\langle X, Y\rangle$ とすると Lemma 3.6 より $\mathrm{tr}[X, Y]-2= \pm 2, \pm 2i$ を得る．しかし，G_W は torsion free なので $\mathrm{tr}[X, Y]-2 \neq -2$．これより，

$$|\mathrm{tr}[X, Y]-1|=|\mathrm{tr}[X, Y]-2+1| \geq |\pm 2i+1|=\sqrt{5}.$$

次に $|\mathrm{tr}^2 X-2| \geq 2$ をいう．$|\mathrm{tr}^2 X-2|<2$ となったとせよ．$\mathrm{tr}\, X=m+n\sqrt{-1}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ とすると，

$$(m^2-n^2-2)^2+(2mn)^2<4.$$

この整数解は $(m, n)=(\pm 1, 0)$ に限るが，$\mathrm{tr}\, X= \pm 1$ は G_W が torsion free であることに反する．

以上より, $|\mathrm{tr}^2 X-2|+|\mathrm{tr}[X, Y]-1| \geq 2+\sqrt{5}$ となるが, $|\mathrm{tr}^2 A-2|+|\mathrm{tr}[A, B]-1|=2+\sqrt{5}$ より, $\mathcal{G}(G_W)=2+\sqrt{5}$ を得る． (*q.e.d.*)

Appendix A. Rings of integers

初等的な計算を用いて，2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ 整数環 $\mathcal{O}_d$ を具体的に明示する．

$z=\sqrt{-d}$ とせよ．$z^2 \in \mathbb{Q}(z)$ より，ある $s, t \in \mathbb{Q}$ により $z^2=s+tz$ と表される．この 2 次方程式を解くと $z=\dfrac{t \pm \sqrt{t^2+4s}}{2}$ となるが，$z \notin \mathbb{Q}$ なので $n:=t^2+4s$ は平方因子をもたない．そこで，$n=l^2 \cdot m$（$l \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}_{<0}$ で m は平方因子をもたない）とおく．このとき，

$$\mathbb{Q}(z)=\left\{u+v\frac{t \pm \sqrt{m}}{2} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Q}\right\}=\left\{u+\frac{vt}{2} \pm \frac{vl}{2}\sqrt{m} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Q}\right\}=\mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$$

となる．したがって，以下 d は平方因子をもたないとする．

$\alpha=x+y\sqrt{-d}$ $(x, y \in \mathbb{Q})$ と共役根 $\alpha'=x-y\sqrt{-d}$ に対して，

$$\mathcal{T}(\alpha):=\alpha+\alpha'=2x, \mathcal{N}(\alpha):=\alpha\alpha'=x^2+y^2 d$$

とおくと，α, α' は方程式 $X^2-\mathcal{T}(\alpha)X+\mathcal{N}(\alpha)=0$ の根であり，次が成り立つ．

Lemma 3.14. $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ が（代数的）整数であることの必要十分条件は，$\mathcal{T}(\alpha), \mathcal{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ となることである．

proof. $\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは自明なので $\alpha \notin \mathbb{Z}$ としてよい．$\alpha \in \mathcal{O}_d$, 即ち α を根にもつ $\mathbb{Z}$ 係数 monic 多項式 $g(X)$ が存在するとする．一方，α の $\mathbb{Q}$ 係数最小多項式を $p(X)$ とすると，$g(X) = p(X)q(X)$ $(q \in \mathbb{Q}[X])$．このとき $q(X)$ も monic となるので，Gauss の補題（原始多項式が $\mathbb{Q}$ 上可約ならば $\mathbb{Z}$ 上可約である）より $p,q \in \mathbb{Z}[X]$ が従う．$\alpha \notin \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}[X]$ より，$\deg p > 1$．ここで $f(X) = X^2 - \mathcal{T}(\alpha)X + \mathcal{N}(\alpha)$ とおくと, $f(\alpha) = 0$ より最小性から $p = f$ を得る．したがって，$f \in \mathbb{Z}[X]$ より $\mathcal{T}(\alpha), \mathcal{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Theorem 3.15 ([29]). 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ の整数環 $\mathcal{O}_d$ は次のように表される．

(i) $d \equiv 1,2 \pmod 4$ のとき $\mathcal{O}_d = \left\{a + b\sqrt{-d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

(ii) $d \equiv 3 \pmod 4$ のとき $\mathrm{O}_d = \left\{a + b\,\dfrac{1+\sqrt{-d}}{2} \mid a, b \in Z\right\}$

Acknowledgments

奈良女子大学の山下靖先生には，著者の院生時代から多大なご指導とご支援を頂いており，本稿の内容もゆるいセミナー（早稲田大学）における山下先生のご講演 [35] とその後の雑談が大きな参考となっております．津田塾大学の前田多恵さんには，算術的 Klein 群に関する素晴らしい博士論文を頂戴し，本研究を進める上で非常に大きな助けになりました．広島大学の作間誠先生は，（結び目理論にあまりにも疎い著者に）結び目補空間の曲面束構造について極めて初歩的なことからから非常に丁寧にご解説下さり，とても大きな励みとなりました．皆様に心より御礼申し上げます．

参考文献

[1] I. Agol, *Criteria for virtual fibering*, J. Topol. **1** (2008), 269-284.

[2] I. Agol, *The virtual Haken conjecture. With an appendix by Ian Agol, Daniel Groves and Jason Manning*, Doc. Math. **18** (2013), 1045-1087.

[3] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Math. **1909**, Springer, Berlin, 2007.

[4] B. H. Bowditch, C. Maclachlan and A. W. Reid, *Arithmetic hyperbolic surface bundles*, Math. Annalen, **302** (1995), 31-60.

[5] J. Callahan, *Jørgensen number and arithmeticity*, Conf. Geom. Dynam. **13** (2009), 160-186.

[6] A. J. Casson and S. A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thuston*, Cambridge University Press, 1988.

[7] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton. Univ. Press, 2011.

[8] D. Gabai, R. Meyerhoff and P. Milley, *Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 4, 1157-1215.

[9] F. W. Gehring, C. Maclachlan, G. J. Martin and A. W. Reid, *Arithmeticity, Discreteness and*

Volume, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 3611-3643.

[10] F. W. Gehring and G. J. Martin, *Iteration theory and inequalities for Kleinian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **21** (1) (1989), 57-63.

[11] H. M. Hilden, M. T. Lozano and J. M. Montesinos-Amilibia, *A characterization of arithmetic subgroups of* SL(2, $\mathbb{R}$) and SL(2, $\mathbb{C}$), Math. Nachr. **159** (1992), 245-270.

[12] H. M. Hilden, M. T. Lozano and J. M. Montesinos-Amilibia, *Aruthmeticity of the figure eight knot orbifolds*, In TOPOLOGY'90, Proceeding of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University, (1992) 169-182.

[13] T. Jørgensen, *Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle*, Ann. of Math. **106** (1977), 61-72.

[14] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976), 739-749.

[15] T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **1** (1975), 245-248.

[16] 蒲谷祐一，*Agol* による *virtual fibering conjecture* の解決について，日大トポロジーセミナー 講演ノート，2013.

[17] S. Katok, *Fuchsian groups*, Univ. of Chicago Press, 1992.

[18] B. Linowitz, *The spectral geometry of arithmetic hyperbolic 3-manifolds*, AMS Open Math Notes, 2020, https://www.ams.org/open-math-notes/files/course-material/OMN-201907-110801-1-Course_notes-v1.pdf より入手可能 .

[19] C. Maclachlan and A. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **219** Springer-Verlag, 2002.

[20] T. Maeda, *On Fuchsian groups with the same set of fixed points of elliptic elements*, Complex Analysis and its Applications, OCAMI Studies Volume 2 (2007), 179-281.

[21] T. Maeda, *On Fuchsian groups with the same set of fixed points of parabolic elements*, Math. J. Okayama Univ. **52** (2010), 65-75.

[22] A. Mednykh and A. Rasskazov, *On the Structure of the Canonical Fundamental Set for the 2-Bridge knot orbifolds*, [Preprint 98-062], Univ. Bielefeld (1998).

[23] D. D. Repoš} and A. Yu. Vesnin, *On Gehring-Martin-Tan groups with an elliptic generator*, Bull. Aust. Math. Soc. **94:2** (2016), 326-336.

[24] R. Riley, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 281-288.

[25] 作間誠，結び目と 3 次元多様体　－幾何構造とファイバー構造を中心として－，第 63 回トポロジーシンポジウム講演集，2016.

[26] H. Sato, *The Jørgensen number of the Whitehead link group*, Bol. Soc. Mat. Mexicana(3) **10**, Special issue (2004), 495-502.

[27] H. Sato, *The Picard group, the Whitehead link, and Jørgensen group*, Progress in analysis, Vol. I, II (Berlin, 2001), World Sci. Publ. , River Edge NJ, (2003), 149-158.

[28] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contem.

Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. kra and B. Maskit, (2000), 271-287.

［29］高木貞治，初等整数論講義，共立出版 1931.

［30］高木貞治，代数的整数論，岩波書店 1948.

［31］D. Tan, *On two-generator discrete groups of Möbius transformations}*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 763-770.

［32］W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.

［33］W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Mineographed lecture notes, Princeton Univ., 1977, http://www.msri.org/publications/books/gt3m から入手可能.

［34］A. Yu. Vesnin and A. V. Masleĭ, *On Jørgensen numbers and their analogs for groups of figure-eight orbifolds*, (Russian, with Russian summary), Sibirsk. Mat. Zh. **55** (2014), no. 5, 989-1000.

［35］山下靖，*Riley* スライスと仲間たち，早稲田大学ゆるいセミナー，2022 年 6 月.

［36］Y. Yamashita, and R. Yamazaki, *The realization problem for Jørgensen numbers*, Conform. Geom. Dyn., **23** (2019), 17-31.

［37］渡辺綾子，3 次元双曲的多様体と S^1 上の曲面バンドル，東京工業大学修士論文，1994.

［38］D. T. Wise, *The Structure of Groups with a Quasiconvex Hierarchy*, Ann. of Math. Studies, **396**, 2021.