数学史講義（第 15 回）：数学の基礎をめぐって 5；（中間考察）ワイルとライプニッツ

林　知宏

4　現代数学基礎論論争（その 2），ヘルマン・ワイルの数学と思想

4.1　ヘルマン・ワイル（1885-1955）の生涯と研究業績

4.1.1　ヘルマン・ワイルの生涯

4.1.2　ヘルマン・ワイルの数学研究

4.2　ワイルと数学の基礎をめぐって

4.2.1　ブラウワーの直観主義

4.2.2　ワイルの数学の基礎をめぐる論考（1910 年代から 1940 年代まで）

以上［林 2021］

5 （中間考察）ワイルとライプニッツ

哲学の英雄たちの中で，数学の本質に対して鋭い眼を持っていたものは，
とりわけライプニッツであったが，
数学は彼の哲学体系の有機的で意味深い構成要素の一つになっている．[1]

5.1 本章の意図

前回の数学史講義［林 2021］では，20 世紀前半に繰り広げられた数学の基礎をめぐる論争の主人公の内，ブラウワーとヘルマン・ワイルに光を当てた．特にワイルは，ブラウワーの主張に大いに引き寄せられ，直観主義の陣営の一翼を担った．その点で，師ヒルベルトと対立する立場にいた時期もあった．次第にブラウワーから適当に距離を置くようになっていったが，その後もブラウワーの主張の魅力に対しては自覚的で，かつ肯定的に捉えていた．ただワイル自身は，先端研究に取り組む数学者としてチャレンジを（特に 1920 年代まで）重ねていた．ともすると直観主義が無限論，実数論に関して制約が多く，身動きが取りにくい議論を抱えていたことは，そうした観点から大きな支障をきたすとみなすようになった．ワイルはブラウワーの主義主張に自然と疑問を抱かざるを得なかったのではないか．その意味では，あまり数学の基礎に貢献はなく自己の研究に邁進するだけの多数の数学者たちとも軌を一にする．そうした点を前回の数学史講義でわれわれは確認した．結果としてヒルベルトの形式主義の試みにも一定の理解をするようになっていったが，しかし 1931 年ゲーデルが不完全性定理（特にその第 2 定理）を公表することにより，ワイルはヒルベルトのプランは挫折に余儀なくされたと認識した．そして，第 2 次世界大戦後になってからの論考では，数学の基礎に関して一層の懐疑の念を深めていったように見える．

ところで，冒頭に掲げたエピグラフにあるように，ある時期からワイルは過去の数理哲学者（と呼ぶべき人々）の中でライプニッツ（1646-1716）の言説を熟読し，そこに一定の活路を，あるいは支えを見いだしたようである．ブラウワーの言説を相対化することにも一定の役割を果たしたように感じる．前回の数学史講義では，1920 年代の論考を通じて次第にライプニッツの存在感が増していったことを見た．本稿では，ワイルにとっての知的ヒーローである（本稿の筆者にとっても同様である），ライプニッツの言説がどのような点で示唆を与えたのかについて分析を試みたい．

ワイルは，同時代の哲学者の中ではフッサールの著作から強く影響を受けている．これ

---

[1] ワイルは，『数学と自然科学の哲学』の中で，第 1 章の本文が始まる前のエピグラフとして上掲の言葉を述べている（［Weyl 1949］，p.2，邦訳［ワイル 1959］，2 頁）．本稿の筆者は，ライプニッツの数学を歴史的に位置づけることを数学史研究の専門分野とする．その研究に乗り出す最初の契機となった重要，かつ啓発的言葉である．

また［林 2021］で指摘し，関連するいくつかのフッサールの文献からの引用も行った．そのフッサールも 1900 年に第 1 巻初版が刊行された『論理学研究』において, ライプニッツの思想の影響を色濃く残している．ワイルにとってライプニッツへの入り口は，直接，間接にあった．それというのも 19 世紀の後半にライプニッツの数学論集［Leibniz 1849-1863］，哲学論集［Leibniz1875-1890］がゲルハルトの編纂によって刊行された．そのことでフッサールだけでなく，多くの研究者の注目が集まり，20 世紀初頭に一気にライプニッツ研究が進んだことは大きかった．ワイルがライプニッツに注目することもそうした流れの中で起きていることと考えられる．ただ，引用したエピグラフの中でワイルが言う「数学の本質」とは何か．そのどの要素に対してライプニッツは「鋭い眼を持っていた」のか．われわれの関心を引くところである．本稿において，ライプニッツの「哲学体系」全般をサーヴェイすることは，筆者の手に余ることである．それは目的としない．ライプニッツの膨大な遺稿は 1920 年代から刊行が継続され，今もなお完了していない．全貌を把握することは実質的に不可能である．すでに刊行されている 2 次文献を通じてでさえすべてを網羅的に掌握し，ライプニッツの「体系」を明確化することは不可能に近い．とはいえ，ライプニッツの数学の基礎をめぐる探求が，彼の体系の「有機的で意味深い構成要素」になっているというその状況証拠は一定程度把握できると考える．キーワードは「記号の利用」と「学問的構造の再構築」である．それを特にワイルの晩年に装いを新たにした著作『数学と自然科学の哲学』英語版（1949 年刊）第 1 部「数学」における記述を中心に，ワイルがどのような場面，どのような項目・テーマにおいてライプニッツに言及し，引用しているのかを分析し，ワイルの着眼点をライプニッツ自身の研究過程の中に位置づけながら，われわれの課題に一定の解を与える作業を果たしたいと思う．[2]

5.2　連続体，無限・無限小について

ワイルが『数学と自然科学の哲学』第 1 部「数学」の冒頭で，ライプニッツを「哲学の英雄の中で数学の本質に鋭い眼を持っていた」と称賛したことは，すでに紹介済みである（本稿エピグラフ参照）．ここでワイルが数学の本質と考える事柄は何であろうか．それを探りつつ，ライプニッツの言説を捉えることが本稿の目的である．実際，『数学と自然科学の哲学』第 1 部は様々なテーマを掲げている．特に，われわれの側でライプニッツとの関連を探るための要素を以下のような三つを提示したい．

---

[2] ［Weyl 1949］（あるいは邦訳［ワイル 1959］）末尾の「索引」に記載された哲学者の名前の引用回数を単純に数え上げげると，ライプニッツは断然のトップである．実際，ライプニッツ 45 回，カント 26 回，デカルト 20 回である．フッサールは 11 回で，プラトン 13 回，アリストテレス 13 回（12 回）よりも少ない．ちなみに数学者・自然科学者では，ガリレオ 26 回（25 回），ヘルムホルツ 17 回（16 回），ヒルベルト 15 回（16 回），ニュートン 15 回（14 回），アインシュタイン 12 回，ブラウワー 6 回（7 回）である（カッコ内は邦訳索引おける回数が原本と異なる場合に表示）．実は，ライプニッツの名前が言及されている記述は，索引で示された箇所以外にもある．以上の比較から考えても，ワイルが特にライプニッツを重んじていることがわかる．

1）連続体，無限・無限小（実無限の否定）について，
2）形式，関係（同型），構成について，
3）普遍数学，普遍記号法について．

第 2 部「自然科学」においても関連する記述を拾い上げることは可能である．とりあえず，第 1 部に限定して上記のカテゴリーにしたがって，ワイルを引用して，あわせてライプニッツの原典の記述内容を確認していこう．

前回の数学史講義［林 2021］の 4.2.2 項で見たように，ワイルの 1918 年の著作『連続体』は，解析学の基礎をめぐって独特なスタンスを持ったものだった．[3] 中でも，その『連続体』第 1 章で反復の原理と自然数論を準備し，第 2 章に入って実数論を展開する運びは一定の形式性に依拠しつつ周到に見えた．また，数学的連続体は直観的連続体（例えば時間）と必ずしも一致しないことが指摘されていた．そのことによって，自然数論を基礎とする観点よりも高いレヴェルの出発点を実数論の構築に際して設定することはできないという立場が明らかにされていた．こうした観点はヒルベルトの立場とも共通し，ブラウワーの（ある意味で極端な）構成主義に一定の理解と共鳴をしつつも，結局は距離を置くことをもたらす．『数学と自然科学の哲学』第 1 部第 2 章第 7 節「無理数と無限小」でも 1918 年の著作と同様の主張がなされる．すなわち，「個々の自然数は数論の主題を形成し，自然数の可能な集合（または無限列）は，連続体の理論の主題である」とした上で，連続体を実在的事物として実際に存在し，閉じたそれ自体完成したものとして措定することはできないと断定する．それゆえ，「連続体問題は，人を認識論的観念論へと追いやるのである」と述べている．[4] その上でワイルはライプニッツに言及する．具体的には，デ・フォルダー宛書簡（1704 年 6 月 3 日付）において，次のようにライプニッツが述べる箇所を指示する．[5]

> 数学的物体は第一の構成要素に分解できないということから，その物体は実在的なものでなく精神的な何かであり，諸部分の可能性を指示するだけで現実のものを指示することはないと考えられます．確かに，数学の線は算術の単位と同じように考えられます．線も単位もその部分は可能的なものでしかなく，まったくもって無限定です．線はそれを切断できる多くの線からなる寄せ集めではありません．同様に単位も細分してできる分数からなる寄せ集めではありません．

加えて，数学的物体が最小要素としての「第一の構成要素に分解できない」ということに関連して，ライプニッツは同じデ・フォルダー宛書簡の中で次のようにも説明している．[6]

---

[3]［林 2021］，44-51 頁参照．
[4] [Weyl 1949], p.41, 邦訳［ワイル 1959］，44f 頁．
[5] [Leibniz 1875-1890], 2, S. 268, 邦訳［ライプニッツ 1989］，119 頁．
[6] *Ibid*., S. 269, 同邦訳，120 頁．

> もしあなたが数学的物体を空間と見なすならば，それは時間と比較しなければならないし，延長と見なすならば持続と比較しなければならなりません．空間は可能的なものが同時に存在することの秩序（ordo existendi simul possibilium）にほかならず，時間は可能的なものが継起的に存在することの秩序（ordo existendi succesive possibilium）です．そして自然における物体が空間に対して有する関係は諸事物の状態または系列が時間に対して有する関係と同じです．

ワイルは『連続体』の中で, 数学上の連続体と時間などの連続体との区別を強調していた．それに対して，ライプニッツはむしろ数学的存在（連続体）を時間，空間に引きつけて理解している．その時間，空間の定義はいかにもユニークである．世界に事物が存在することを前提にして，存在のある種の秩序と捉えている．そうした理解の根拠は，古代アリストテレス以来引き継がれてきた実無限の否定である．無限小のような存在を最小要素として認めてしまうことで,「連続体の迷宮」(Labyrinthus continui）へと落ち込んでしまうことを回避するためである．ライプニッツはいま（ワイルの著書に引用されて）論じているのとは別のデ・フォルダー宛書簡（1706 年 1 月 19 日付）において，言及した連続体の迷宮について連続的な量は観念的であり，連続体には非決定的な部分が含まれているが現実的なものの内には無限定なものはないとする．その上で次のように論じている．[7]

> 自然の内には，単純実体とそれらから結集する寄せ集め以外に実在的なものはあり得ないのです．しかし, その単純実体自身においてわれわれが認識しているのは, 表象（perceptio)，もしくは表象の法則に他ならないのです.〔中略〕私がすでに述べたことから，現実的なものの内には離散的な量（discreta quantitas)，つまりモナドないしは単純実体の多数性しかないことは明らかです．

ここでライプニッツが後半生にたどりついた哲学的見解，すなわちモナド論（モナドロジー）について一般的に論じるのは避ける．[8]　ワイルの議論から離れすぎてしまうから

---

[7] *Ibid*., S. 282f, 同邦訳，126f 頁.

[8] ライプニッツのモナド論は，最晩年に書き残した手稿「モナドロジー」(1714 年執筆）に見ることができる．生前は発表されずに，フランス語原文は 19 世紀半ば（1840 年）になって公刊された．ワイルが，そしてわれわれがライプニッツの 1 次文献として依拠しているゲルハルト版『哲学論文集』の刊行より 30 年ほど前である．ただしこのモナド論は難解である．現代のライプニッツの（特に哲学）研究者にとっては興味深く，論じずにはいられないだろう．このモナド論については，実に多くの研究がなされて 2 次文献が残されてきた．それらすべてをふまえた上で何かを論じることは筆者の手に余ることであり，本稿の目的ではない．ただ筆者が参考にし，簡便に情報を把握できたという意味で，［Leibniz 2004］の編纂者フィシャンによる序文，［ライプニッツ 1989］,［ライプニッツ 2019］の翻訳者たちによる解説，あるいは訳者あとがきを挙げることができよう．また，より深くモナド論を論じた 2 次文献として，筆者の目に留まったものを明示するならば，［Garber 2009］,［Arthur 2018］を挙げることができよう．

である．

ワイルはこうしたライプニッツの連続体把握がなかなか一筋縄でいかないことを十分理解している．『数学と自然科学の哲学』では，ライプニッツがモナドなどという観念を構想したことにふれ，「なぜならカントとは異なり，彼〔ライプニッツ〕は形而上学的に現象に対して絶対的実体の世界の中で基礎を与えざるを得ないと感じたからである」と述べている．そしてライプニッツがまた他の人あてに送った書簡を引用して「実在的な，すなわち実体的な物々の間では，単純者は寄せ集めたものに先行し，諸々の部分は現実的であり，全体よりも先に存在する」とし，連続体の難問解決のため必要な捉え方と考えていたことを紹介している．[9] われわれはむしろワイルが言及するライプニッツの言説に関して，もう少し数学との関連が強い事柄に焦点を絞ろう．

いま見たようにライプニッツの議論は多義的である．ともするとギリシア以来のアトミズム（原子論）とも同一視されかねない．ワイルは『数学と自然科学の哲学』の中であらためて連続体をそれ自体存在するものとして考える三つの試みがあったとする．すなわち，

1）連続体は数え得る離散的要素，原子（アトム）からなると考える試み，
2）無限小の存在を考える試み，
3）極限過程を考える試み，

である．そして最終的には, 3) の「極限過程が勝利を得たのだった」と評する．ライプニッツのモナド論は，彼を上記の 1）の担い手と誤解させてしまう傾向がある．だがそうではない．むしろライプニッツは数学上の発想において，3）を進めた論者であるとワイルは認識している．[10]

ワイルがライプニッツの数学上の考えを示したものとして例示するのは，ヨハン・ベルヌーイ（1667-1748）との書簡のやり取り（1698 年内に執筆）である．ヨハン・ベルヌーイは兄ヤコプとともにライプニッツ流の無限小解析学を発展させた人物として知られる．とはいえ，数学の基礎をめぐるアイデアに関して必ずしもライプニッツの発想を共有していた訳ではない．1698 年 8 月の日付を持つ書簡でベルヌーイが無限小の存在を素朴に認めるべきではないのかとの問いかけをしたことに対して，ライプニッツは次のように返答している．[11]

線分の中に実際に，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，その他〔の長さ〕が与えられ，またこの

---

[9] [Weyl 1949], p. 41, 邦訳［ワイル 1959］，45 頁．ワイルが引用したライプニッツの書簡は，レモン宛書簡（1714 年 7 月）である．[Leibniz 1875-1890], 3, S. 622.
[10] [Weyl 1949], p. 42-45, 邦訳［ワイル 1959］，46-50 頁.
[11] [Leibniz 1849-1863], 3, S. 536.

> 数列のすべての項が実際に存在すると考えることにしましょう．するとあなたはここから無限小が与えられると結論を下します．けれども私は現実に，どのような微小なものも動きの中で（in motus）同じように存在している任意の指示可能な有限な分数が与えられることが従うという他に何も考えませんでした．たとえ，すべての点を通じて変化するものとしても，ただ互いに無限に近接する二つの点が与えられるということが従うだけでなく，互いにごく小さな長さのすぐ近くの点が与えられると考えるのです．

固定された一定の量として無限小があらかじめ存在していて，それにたどり着くのではなく，ある種の動的なプロセスにおいて収束していく分数列の大きさを捉えようとしている．これはまさに，ワイルの言う極限過程に関わるコメントである．現代のわれわれが

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

という式で表される極限を，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して $n \geq N$ に対して $|a_n - 0| < \varepsilon$ と理解することとも一見すると通じている．ただ，そうした不等式による極限操作の表現は 19 世紀の産物である．[12] ライプニッツの言説をあまり現代に引きつけすぎない方がよい．あくまでも無限小の存在を否定する意図に基づき定性的に述べている点を了解することにしよう．これに対してヨハン・ベルヌーイは返書にあたる 1699 年 1 月 7 日付書簡で，まったく合点がいかない旨を表明している（「無限に項が多くあるならば，無限小は存在する」）．[13] 下村寅太郎も同じヨハン・ベルヌーイとライプニッツの書簡に注目していて，「『無限小』は『最小』ではないこと，『任意に小なる何処までも小なる』ものであり，無限大は『あらゆる有限な数以上のもの』であること，無限小は決して『恒常的一定なものではない』，いかに小さくとも恒常的一定の量である限り無限小ではない，こと――をライプニッツは明らかな自覚をもって述べている」と述べている．この点においてはワイルと同様な見解である．ただし，下村はこの無限小・無限大に関してライプニッツの言説が持つさらに他の側面も抉り出している．すなわち，ライプニッツ独自の記号法との内的関連である．[14]

ライプニッツの微分積分学の基礎をめぐる考えが，ワイルが簡略化してまとめるように極限過程に集約されていったと見るのは少し一面的である．むしろ様々な局面で言説を変

[12] 特に 19 世紀になりコーシーによって微分積分学の整備が行われる．コーシーはあまり存在論的な議論にこだわらずに無限小（または無限大）を記号とともに「量」として導入している（［Cauchy 1821］第 1 部第 2 章参照）．数学以外のもの（例えば哲学的な議論）に原理として依存するのではなく，数学内部に基礎をめぐる論議を集約させてしまおうとの意図がコーシーには感じられる．18 世紀から 19 世紀にかけての歴史的変動をめぐっては，［Grabiner 1981］の分析が参考になる．

[13] [Leibniz 1849-1863], 3, S. 563.

[14] ［下村 1988］，374f 頁．下線による強調は引用者による（原文は傍点）．

えているかのように見えるところもある．やはり単純ではない．ライプニッツの多面性をふりかえるために，ヨハン・ベルヌーイとの書簡よりも 10 年以上前の段階に遡って見よう．ライプニッツの微分法が世に公になったのは 1684 年の論文によってである．数学史上に名高い，「分数量にも超越量にも妨げられない極大と極小を，ならびに接線を求める新しい方法」(Nova methodus pro maximis et minimis, itaque tangentibus, quae nec fractuas nec irratioles quantitates moratur, …)（以下では「新方法」論文と称する）では，われわれが現在も使用する記号 dx が登場する．そして微分法の基本計算公式が提示されている．すなわち，与えられた曲線に対して設定される x，y，z，w，v といった諸量に対して，

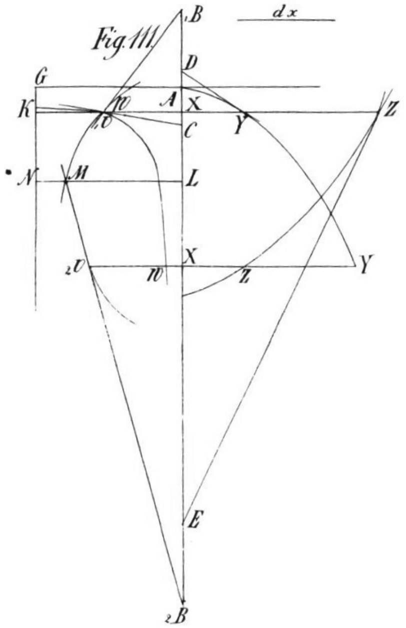

図 1：ライプニッツ 1684 年論文より

- $d(z-y+w+x) = dz - dy + dw + dx$,
- $d(xv) = xdv + vdx$,
- $d\dfrac{v}{y} = \dfrac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$,
- $dx^a = ax^{a-1}dx$，$d\dfrac{1}{x^a} = -\dfrac{dx}{x^{a+1}}$,
- $d\sqrt[b]{x^a} = \dfrac{a}{b}dx\ \sqrt[b]{x^{a-b}}$,

以上の形で定式化される．[15] その上で, 極大･極小や曲線の接線を求めることに応用する．そこでライプニッツは,「新方法」論文中で次のように述べる．[16]

> 接線を見いだすということは，曲線上の無限に小さい距離を持つ 2 点を結ぶ直線を引くことである（tangentem invenire esse rectam ducere, quae duo curvae puncta distantiam infinite parva habentia junget）．つまり私たちにとっては，曲線と同等である無限個の角を持つ多角形の一辺を引くことを見さえすれば，いつも成功するとは限らない特別な仮定など設けることなく，もっとも一般的な方法によって行われるのである．ところで，この無限小の距離は，つねに dv のようなある既知の差分か，

[15] 3 番目の公式で複号がついているのは，軸の正の向きに対して逆方向の量を負の量として扱っているからである．[Leibniz 1849-1863], 5, S. 220ff, 邦訳［ライプニッツ 1997］，296-300 頁．

[16] *IbId.*, S. 223, 同邦訳，301 頁.

それ自身に対する関係，すなわち既知の接線によって表され得るものである．

「無限小の距離」なるものは，（有限量を意味するか，既知の何らかの量）dv との「関係」（relatio）において定められるとしている点がライプニッツの斬新な点であり，注目すべきである．もう少し具体的に述べると，図 1 で dx を与えられた任意の量，また ${}_1VX = v$ とするとき，有限量 ${}_1VX$，X_1B といった辺を持つ三角形上に成り立つ比例関係

$$dv : dx = {}_1VX\,(=v) : X_1B \tag{1}$$

において曲線上の「無限に小さい距離を持つ点」を定めるのである．実は先に下村寅太郎『無限論の形成と構造』からの引用を行なった際に（注（14）の該当箇所），下村がライプニッツに関してさらに深い洞察を獲得していると述べた点はまさにこのことである．[17]

またヨハン・ベルヌーイとの書簡のやり取りを行った時期に近いニーウエンタイトとの微分積分学の基礎（すなわち無限小の位置づけ）をめぐる論争（1695 年）では, 上記の（式（1）のような）比例関係による理解に加えて,「私は，等しいということを差が完全に 0 であると考えるだけでなく, その差が比べられないほど小さいとも考える」と述べている．このように捉えることは，ユークリッド『原論』第 5 巻の比例論の枠組やアルキメデスの文献に記されていた帰謬法による証明といったライプニッツらの同時代人たちにとっての古典的方法論にも適っているとされる．[18] ライプニッツは，自身が何か新規な理論を提唱したという認識を必ずしも持っておらず，むしろ過去の規範の範囲内において議論を提唱したと述べて説得力を付与しようとしている．

17 世紀から 18 世紀へと世紀が変わる前後に，パリの王立アカデミー内で起きた無限小をめぐる論争に関連して，ピエール・ヴァリニョンに送られた書簡（1702 年 2 月 2 日付，および 6 月 20 日付）の中では，さらに注目すべき表明を行っている．ライプニッツは先に挙げた 1695 年論文における主張の延長線上に，無限大（あるいは無限小）を絶対的存在とし

---

[17] 下村は注（14）で引用した文章の前段で, ライプニッツが dx や dy といった記号で表現しているものが,「独立した一個の量としてではなく，相互の比において互いに相関係して初めて意味をもつものと解している」と述べている．［下村 1988］，374 頁．

[18] ライプニッツは，1695 年に刊行されたニーウェンテイトへの反論を目的とした論文の中で次のように述べている（[Leibniz 1849-1863], 5, S. 322）．

> 私は等しいということを，その差が完全に 0 であるということのみならず，その差が比べられないくらい小さい（incomparabiliter parva）ことと定める．そしてたとえそれが完全に 0 であると言わなくとも, ただその差と比較可能な量がないと言えばよい．［中略］私はユークリッド［『原論』］第 5 巻定義 5 を考えるとき，ある有限な数がかけられて，別な数を越すことができるような，そうした同次量のみが比較可能であるということ，そしてそのような量さえも違わないものは等しいと私は定めるのである．

こうして無限小「量」の導入が，ユークリッド『原論』第 5 巻の比例論の枠内に収まっていると考えたのであった．ニーウエンタイトとの論争における論点と詳細な分析は，［林 2003］，173-186 頁参照．

て理解するのではなく，相対的なものとして捉えることを勧めている．つまり，「ここで無限は比較可能でないものによって説明すれば十分です．すなわち，われわれの〔通常認識する〕ものよりも比較不可能なほど，より大きい，あるいはより小さい量と受け取ればよいのです」と述べている．そしてこの「比較不可能な」ものは，ある固定された，定められた存在ではなく，幾何学的推論の中で，誤差を望むだけ小さいものと了解し得るならば，それが無限小の厳密な効用をなすと主張している．そして，無限大，無限小の「線分」を実在物として形而上学的に理解することから解放し，数学における推論を短縮するための「理想概念として」（comme des notions ideales）解釈することを提唱している．[19] ここで類似の数学上の概念として挙げられるのが，代数方程式論における（$\sqrt{-2}$ のような）虚根である．ライプニッツのこのヴァリニョン宛書簡の説明が興味深いのは，その $\sqrt{-2}$ のようなものが，単に方程式の根の表示として有益であると考えるのみならず，実在の量（＝代数方程式の実数解）を解析的表現に必要であるとしていることである．例えば，この書簡の中で

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6} \tag{2}$$

という例が示されている．ライプニッツはもともとデカルトの『幾何学』ラテン語訳を20 代に本格的に数学研究を志すにあたって精読している．その中で，デカルトの方程式論における虚根の扱いに不満を感じていた．3 次方程式はカルダーノの公式が知られていたが，それを利用すると自然に式（2）に示されるような現象が生じる．[20] デカルトは根を線分表示することにこだわったがために，このような例についてどのように正当化するのか考察の対象外にしてしまい，議論を深められなかった．ライプニッツは 1675 年のある手稿で 3 次方程式のカルダーノの公式の運用について議論している．そこで，式（2）と同じ例を掲げて，この虚量から実量を導く操作を四則演算，ベキ根の抽出と並んで第 6 の演算と認めるよう主張している．さらにデカルトの批判の要点として，「方程式を解いたことは，作図をしたこととは違うのである」と述べる．こうした議論をふまえて，無限小に対する理解がアナロジーで語られているのである．[21] さらに同じ 1702 年 6 月 20 日付のヴァリニョン宛書簡では，無限や無限小を 2 月 2 日付の書簡の「理想概念」として考えることの言い換えとして，「よく基礎づけられた作り物として」（comme des fictions bien

---

[19] [Leibniz 1849-1863], 4, S. 91f, アクサン記号の有無はテキスト通り．

[20] 実際，3 次方程式の解の公式（カルダーノの公式），

$$x^3 \pm qx - r = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}\pm\frac{q^3}{27}}}$$

を適用すると，式（2）のような計算が自然に現れる．

[21] ライプニッツの 1675 年手稿は，[Leibniz 1923-], 7-2, S. 678-750, 邦訳［ライプニッツ 1997］，177-202 頁に見ることができる．またデカルトの方程式論との対比においてライプニッツの議論を分析したものとして［林 2009］参照のこと．

fondées）以外に考えねばならないとするのは納得できないと主張する．[22]「よく基礎づけられた」とは数学的推論が無矛盾であること，そういった合理性を備える限りにおいて認容しようということである．まさに, ライプニッツの発想が時代を越えている点である．もちろん，それが同時代人に理解され，共有されたかどうかは別問題である．結局，ライプニッツの発想は，もはや無限小の存在論から離れて数学における形式的無矛盾性の追究ということに行きつく．‘comme des fictions bien fondées’という言葉は，その象徴的な表現である．これは，記号が数学にもたらす役割をと可能性を見出しつつ，存在の意味よりも数学としての論理的整合性を重んじる発想ともいえる. その点でライプニッツの見解は, 20 世紀のヒルベルトの超数学の歴史的起源の一つと言っても過言ではない.

一方で，ワイルも指摘していた極限過程については，ニュートンが『プリンキピア』（＝『自然哲学の数学的諸原理』）で提示していたことが徐々に影響を及ぼす傾向を指すとも考えられる．[23] 哲学と数学の分離のトレンドは，なにも 20 世紀を待たずして早くも 18 世紀の初めに生じていたとも言える．詳細な議論は避けるが，ライプニッツが表明していた考えが多くの人々に受け入れられていたとは言えない．むしろ，ライプニッツの流派においてもニュートンが『プリンキピア』で提示した極限操作に手法がより信を得て，理解されていた様相もある．[24] 結局，ワイルが「極限過程が勝利を収めた」とする見解は，当時の先端にいた数学研究者たちの了解としては正しい．problem-solver たちにとって，未解決問題に自らが解決を与えることが何より重要である．したがって数学の基礎について様々な見方を示すことよりも，ベルヌーイ兄弟に代表されるように自分たちの目的に都合よく理解しやすい形で「腹に収めた」のは，ある意味で自然である．誰もライプニッツのように数学の創造の場面と「無限」に関わる認識論や記号論の複数の領域に関心と思考の跡を残すのは容易にできることではない.

無限小や無限大をめぐる議論は様々に解釈が成り立ち得る．それを明らかにした一人がライプニッツであり, ワイルへの影響も大であった．ただし, ワイルにとってもライプニッツ同様, 無限論に端を発した数学基礎論論争があったはずである．いくつかの立場があり, ワイルは特にブラウワーの主張とヒルベルトのそれとの間を行きつ戻りつした.『数学と自然科学の哲学』独語版刊行後の 1931 年から翌年にかけてワイルは，米国のイエール大学で講演を行った．そのときの講演録が，[Weyl 2009], chapter 4（邦訳［ワイル 2014］第 4 章）である．時期的に近いこともあって，この講演でも連続体に関して,「無限に関して開かれた可能性の領域を，絶対的存在の閉じた領域へと転換させる試み」として先に掲げた三つの試みと同じような見解を示している．[25] ただ加えて 4 番目の試みを追加して

---

[22] [Leibniz 1849-1863], 4, S. 110.

[23] ニュートンの流率法，および『プリンキピア』にける極限過程については，本数学史講義第 6 回［林 2012］，第 7 回［林 2013］を参照のこと．

[24] 18 世紀初頭における微分積分学の基礎をめぐる議論については，［林 2000］，［林 2001］で詳述したので参照のこと．

いる．それはヒルベルトの超数学の構想である(本数学史講義第 13 回[林 2020]参照)．『数学と自然科学の哲学』では，第 1 部第 2 章第 7 節「無理数と無限小」を「プラトンの意味での連続体を『救う』ための第三の試み〔極限過程の方法〕は，解析学の現代の集合論的基礎づけにおいて見られるだろう」と軽く流していた．[26] イエール大学での講演では，ワイルにとっての現代におけるデデキント・カントル流の無限集合論の構築がもたらした様々な議論をふまえて，師ヒルベルトの試みをポジティヴに評価していることがわかる．これはやはり，1920 年代全般に活発に行われた数学の基礎をめぐる論争がワイルにもたらした成果である．ワイルがブラウワーとヒルベルトとの間を揺れ動いたことは前回の数学史講義［林 2021］でくり返し述べている通りである．さらに同じ 1920 年代に大きく発展を遂げた量子力学の数学的形式も念頭にあったかもしれない．ワイルはイエール大学の講演で，次のように述べている．[27]

> 数学それ自体が取り上げられるならば，ブラウワーとともに直観的に認識可能な真実の範囲内に自己を制限し，無限を単なる可能性の開かれた場と考えるべきでしょう．〔中略〕しかし自然科学において，私たちは直観的証拠の受けつけない領域に接触します. このとき認識は必然的に記号的な構成を行おうとします. したがって数学が物理学の理論的構成の過程に取り入れられるとき，あらゆる判断が直観的に確実であるとする，特別な領域として数学的要素は分離可能でなければならないという要請は，もはや必要ではなくなります．科学全体を一つの統一されたものとするこのより高い見地に立つとき，私はヒルベルトが正しいと考えます．

1930 年代に入ってからのワイルの心境がよく表れており，同時にライプニッツの真価がクローズアップされる場面であったことがわかる（「認識は必然的に記号的な構成を行おうとします」)．そこで次に，ワイルがライプニッツを先駆者として捉えるさらなる論点へと進もう．

5.3 関係，形式，同型について

『数学と自然科学の哲学』は，冒頭の第 1 章第 1 節に「関係とその結合，命題の構造」と題された内容が記されている．ワイルは古代ギリシア人たちが(例えばユークリッド『原論』に）残した数学の演繹的学問としての性格を次のように述べている．[28]

> 幾何学は「演繹的学問」の原型となった．そして幾何学の性格を見て数学は，概

---

[25] [Weyl 2009], pp. 73-80, 邦訳［ワイル 2014］，163-178 頁.

[26] [Weyl 1949], p. 45, 邦訳［ワイル 1959］，46-50 頁.

[27] [Weyl 2009], pp. 80, 邦訳［ワイル 2014］，177f 頁

[28] [Weyl 1949], p. 3, 邦訳［ワイル 1959］，3 頁．なお括弧で包んだ部分の原文は，イタリックによる強調.

> 念が他の概念を通じて「定義され」，言明が他の言明によって「推論される」方法にとりわけ興味を抱くのである．〔中略〕それどころか，それらの方法の完全な説明を最初に与えることなしに数学自体の基礎を築くことは可能でないように見える．

ユークリッド『原論』では，まず議論の対象となるものが定義されていく（同時に無定義語も直観的に与えられていく）．点，直線，平面，等々がその例である．だが，それらに関する言明として命題 1 から順に提示されるものは, その対象となるものどうしの関係(結合，順序，合同など）である．「ある 1 点が直線上にある」とか,「ある 1 点 z が点 x と点 y の間にある」とか,「線分 AB と線分 CD が等しい」とか,「ある三角形 ABC と別の三角形 DEF が等しい」のようにである．数学における関係の記述について, ワイルは空所を持った「一つの関係の命題図式」として抽象化して $R(xy)$ と書く．そしてその空所（x，y の箇所）に数学的対象を埋めることで, 関係は（「x は y の従兄弟である」とか,「5 は 4 に続く」のように）命題として提示されるとする．

『数学と自然科学の哲学』では，この空所を持った命題図式に関してライプニッツの見解が引用される．サミュエル・クラーク（1675-1729）宛第 5 書簡（1716 年 8 月）の中の言説が話題となる．[29] ライプニッツは最晩年の 1715 年 11 月から翌年 11 月 14 日の彼自身の死去によって中断してしまうまで，5 回にわたってクラークと書簡をやり取りしている．[30] ライプニッツの思索の終着点として，そしてニュートンの見解を代弁するクラークとの対比において，ニュートン，ライプニッツ二人の同時代の知的巨人の思想的見解の差異を探る格好の資料ともなっている．

ワイルが問題とするライプニッツのクラーク宛第 5 書簡第 47 節では，次の事柄が問題として掲げられる．[31] いま，L と M という二つの線分がある．それらの線分間の比は 3 通りの仕方で想定できる．すなわち，

1）大きい方である L が小さい方である M に対する比として，

---

[29] *Ibid*., P. 4f, 同邦訳，4f 頁.

[30] 17 世紀から 18 世紀の変わり目において，微分積分学の先取権論争がすでにニュートン，ライプニッツ両派の間で生じていた（その詳細は，［林 2016］で事実経過の確認と分析を試みたので参照のこと）．ライプニッツはハノーファー家の宮廷顧問官として仕えていたが，主君ゲオルク・ルートヴィヒはイギリス国王となり当地にハノーファー朝が始まる．ライプニッツは，その先取権論争で神経をとがらせていたイギリス側にとって，新たに外からやってきた体制側の人物として警戒される．そうした状況を当時のライプニッツの主君ゲオルク・ルートヴィヒ（＝イギリス国王ジョージ 1 世）の息子ゲオルク・アウグスト（後のジョージ 2 世）の妃カロリーネは憂慮していた．彼女は，ライプニッツの著作『弁神論』(1710 年刊）の翻訳をクラークに依頼し（クラークは拒むことになる)，イギリス，ドイツ双方の融和を図ろうとしたのだった．これがライプニッツとクラークとのとの間で書簡が往来する契機となった．[Leibniz 1957], p. 13, あるいは [Antognazza 2008], pp. 460, 481, 533f.

[31] [Leibniz 1957], pp. 144f, 邦訳［ライプニッツ 1989］，354f 頁.

2）小さい方である M が大きい方である L に対する比として，

3）L，M，どちらか一方を主語に，もう一方を客語に考えるのではなく，二つから抽象されたものの間の比として．

3）は，L，M のどちらが先でどちらが後，どちらが主体でどちらが客体といったことを考えることなく，抽象化された量 L と M との間の比として捉えることを意味する．1）と2）はいずれも主語内にある偶有性に対して，主語の外に対応するものを形成することになる．こうした偶有性をライプニッツは，「関係」（relation）あるいは，「連関」（rapport）と呼ぶ．特に 3）の場合, その関係はどちらかを主語にとるということができないので,「絶対的に観念的」になるだろうと指摘する．そして「その考察は絶えず有益であり続ける」．そのように抽象的な関係の考察の中に意義を見いだしている．こうした点が，またしても時代に先駆けたライプニッツの炯眼の表れである．ライプニッツは具体例を示す．ユークリッド『原論』第 5 巻の比例論を念頭において，次のように述べている．[32]

> 私はここでおよそユークリッドのように，[33] 幾何学者の意味においてとられる「比」とは何かということを絶対的に理解させることができないので，まさに「同じ比」とは何かを定義しました．同じように「場所」とは何かを説明するのに,「同じ場所」とは何かを定義しようとしました.〔中略〕場所とか位置とか空間とかといったものを思い描くと，これらの類推から，何であれ物事は連関の真理の中にのみ存するのであって，何ら絶対的な実在の中に存するものではないということです．

ワイルはライプニッツの発想を同時代を越えているものと評価している．そして 19 世紀の数学の中になって初めて重要性が認識されたとする．[34] こうした理解は当を得ている

---

[32] *Ibid*., P. 145, 同邦訳，355 頁.

[33] ユークリッド『原論』第 5 巻では，定義 3 で「比とは，同種の二つの量の大きさに関する何らかの<u>関係</u>である」（下線引用者）としている．そして定義 5 で「同じ比」を次のように定義する．

> 四つの量が，第 1 が第 2 に対し，そして第 3 が第 4 に対し，同じ比であると言われるのは，第 1 と第 3 の等多倍が第 2 と第 4 の等多倍に対して，それらが何倍であろうとも，各々が各々に対して，あるいは同時に超過するか，あるいは同時に等しいか，あるいは同時に不足するときである．ただしこれらは対応する順序でとられるとする．

そして定義 6 で,「同じ比を持つ量は比例すると呼ばれる」としている（［ユークリッド 2008］, 367f 頁）．ここに述べられていることを現代の概念，式で表現すると，四つの実数 a，b，c，d に対して m，n を整数として，

$$ma>nb,\ \text{かつ}\ mc>nd$$
$$ma=nb,\ \text{かつ}\ mc=nd$$
$$ma<nb,\ \text{かつ}\ mc<nd$$

のいずれかが成立するというときが「比例する」ことを意味する．

[34] [Weyl 1949], p. 11, 邦訳［ワイル 1959］，12 頁.

と考えられる．この関係による定義から「数学が新たな観念的対象を生み出すことを可能にする『創造的定義』を自由に用いる」という数学の本質に関わる洞察が導かれることになる．[35]　先に式（2）で見た虚根を通じて実量を得る演算を加減乗除，ベキ根の開平に加えて第 6 の演算と見なしたライプニッツの数学に対する先見性のある認識と同様に，20 世紀のワイルの著作にポジティヴに評価された実例である．

『数学と自然科学の哲学』第 1 部第 1 章第 4 節「公理的方法」は, 重要な記述を含むパートである．ワイルの師ヒルベルトは，20 世紀に向けて第 2 回国際数学者会議（ICM）で 23 の問題を提起した．そのうち，第 2 問題（算術の公理の無矛盾性），第 6 問題（物理学の公理の数学的取り扱い）という問題において公理的方法による体系の正当性が問題とされていた．[36]　この箇所でワイルはやはりライプニッツに言及している．その文脈と趣旨を確認しておこう．上で論じた「関係」に寄せてワイルは「純粋数学は，現代的見地によれば，帰するところ関係の一般的な仮言的－演繹的理論である．それは可能的な具体的解釈の中のいずれか一つに拘束されずに論理的『鋳型』の理論を展開する．この『形式化』に関しては，『それなしには数学的方法の理解を問題にすることができない観点』で」あると言う．最後のワイルによる引用は，フッサール『論理学研究』からのものである．したがってワイルは，同書の第 1 巻 67 節から 72 節までを指示している．[37]

数学における「形式」とは何か．それは公理的体系に他ならない．だが，その公理的体系は必ず一つの要請を伴う．無矛盾性の証明である．すなわち，設定した公理から論理的

---

[35] *Ibid*., P. 8, 同邦訳，9 頁.

[36] ヒルベルトの 23 の問題のうち，当該の第 2，第 6 問題に加えて，第 1 問題（カントルの連続体に関する問題）については，［林 2020］，44-51 頁参照.

[37] [Weyl 1949], p. 27, 邦訳［ワイル 1959］，30 頁．フッサールの当該箇所は，ワイルによる引用以外にも興味深い指摘を含んでいる．われわれとしても引用に値すると思われる．すなわち, 以下の通りである．

> これらすべての諸研究〔学一般の可能性の諸条件の究明〕が解決されるならば，理論一般の可能性の諸条件に関する学の理念を満足させたことになる．しかしすぐ後で見るように，この学はそれ自身の領分を越えて「諸理論の本質的種類（諸形式）とそれらに属する種々の関係法則」とをア・プリオリに取り扱う一つの補足的な学問を指し示している．〔中略〕こうした暗示はおそらく何かはっきりしないように見えるかもしれない．それらの指摘において問題となっているのは．あいまいな想像ではなく，確固たる内容を持った構想であることは，最も普遍的な意味での「形式的数学」，すなわち「集合論」というこの現代数学最高の精華が証明している．

この『論理学研究』第 1 巻が出版されたのは 1900 年（改訂版 1922 年）．ヒルベルトの 23 の問題が提起されたのと同じ年である．ヒルベルトがカントルの成果を守ろうとして様々な数学的試行錯誤を行っていたことに対応して，フッサールの哲学的思索も紆余曲折する．この『論理学研究』第 1 巻以降の諸著作における知的格闘がそれを物語る．ただわれわれが注目しておいた方がよいのは，この『論理学研究』第 1 巻において，フッサールがやはりライプニッツに注目していることである．この『論理学研究』第 1 巻第 10 章第 60 節は「ライプニッツとの結びつき」と称して,「われわれは彼〔ライプニッツ〕とは比較的一番近い立場にある」と述べている．現代数学基礎論論争の起こる場面で，ある立場の者たちにとってライプニッツが，共通してある種の知的よりどころになっていたことがわかる．フッサールに関しては，[Husserl 1992], Band 2, S. 222-224, 244-258(esp. S. 222, 248ff), 邦訳［フッサール 1968-1976］，1，241-245，266-279 頁（特に，241，270f 頁）参照.

推論によってある命題 P の証明が与えられるときに，同時に別の証明によって命題 P の否定 $\neg P$ が与えられることは決して無いようにしなければならない．ワイルはいま注目している『数学と自然科学の哲学』第 1 部第 1 章第 4 節で，この点に関して次のように述べている．[38]

> 無矛盾性の絶対的証明のために，われわれが使えるのは〔背理法のような間接証明ではなく〕「直接的証明」以外にない．それは演繹的推論の規則にしたがって，一方が他方の否定であるような二つの命題に決して到達しないということを示そうと努めるのである．ここではそのゲームの論理的規則を完全に列挙することが必要な前提条件である．〔中略〕近年になってようやくヒルベルトは算術公理の無矛盾性を保証する問題をこの仕方でとりかかった．

ただし，ゲームの規則とは無関係に公理的方法は，ある種の理論「模型」と捉えられる．そして模型の発想は，「同型（isomorphism）の理念」を導くという．

いま，（幾何学の点，直線，平面のような）数学的対象の系 Σ_1 とその対象 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots$ 間に成立する諸関係 R_1，R_2，…があるとする．すなわち，

$$R_1 : \Sigma_1 \ni x_1 \to y_1 \in \Sigma_1,\ \ R_2 : \Sigma_1 \ni x_2 \to y_2 \in \Sigma_1,\ \ \cdots \tag{3}$$

のように相互に関連づけられているとする．同様に，系 Σ_2 とその対象 $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \cdots$ 間に成立する諸関係 R_1，R_2，…があるとする．このとき，

$$R_1 : \Sigma_2 \ni x'_1 \to y'_1 \in \Sigma_2,\ \ R_2 : \Sigma_2 \ni x'_2 \to y'_2 \in \Sigma_2,\ \ \cdots \tag{4}$$

このように，系 Σ_1 と Σ_2 の要素が相互に一意に一対にされ，また諸関係 R_1，R_2，…が成り立つ Σ_1 の要素と同じ関係 R_1，R_2，…が成り立つ Σ_2 の要素に対応可能なとき，系 Σ_1 と Σ_2 とは同型であるという．そしてその系の間の対応を同型写像という．つまり，式（3），(4) の関係の下に，

$$R : \Sigma_1 \ni x_1 \to x'_1 \in \Sigma_2,\quad \Sigma_1 \ni x_2 \to x'_2 \in \Sigma_2,\ \cdots \tag{5}$$

のようにあらたな同型写像 R を考えることができる．この同型写像によって，異なる数学的対象の系が同一構造を持つことが認識される．これは現代代数学において，群，環，体の間に同型写像（あるいは準同型写像）が定められることを想起しよう．それらによって諸定理の成立を通じて，対象の構造の究明が行われる．つまり対象が異なっていても，構造の同一性が数学における重要事項になるのである（ガロア理論はそうした手法がふんだんに駆使される）．ワイルは，この同型の考え方から先に引用した公理系の「論理的鋳型」

---

[38] [Weyl 1949], p. 23, 邦訳［ワイル 1959］，26 頁．

の考察が導かれると言う．そしてこうした数学的に整理された同型の観念に至るプロトタイプをやはりライプニッツに見いだすのである．[39]

ワイルの言及の具体的内容をライプニッツ側で確認しよう．ライプニッツは，1677 年 8 月に執筆された「対話」(Dialogus) という小篇で次のように述べている．[40]

> たとえ記号が任意であるとしても，その使用や結合させることで何らかの任意でないものが備わる．すなわち，記号と事物との間のある種の比例関係 (proportio) が備わり，事物は互いの間に様々な記号と同じ関係を持つ．こうした比例関係，あるいは連関は真理の基礎となる．なぜなら，あれやこれやの記号をわれわれが利用するとき，対等である同じ事物や，または比例関係によって対応する同じものがつねに現れるようになるからである．それでも思考のためには，ひょっとすると他の記号を利用することも必要になるかもしれない．

ワイルが指摘するこの小篇の言明は興味深い．ライプニッツは数学研究に本格的に取り組む以前から記号表現には独特の思想を持ち合わせていた．1672 年以降，丸 4 年に渡るパリ滞在が，ライプニッツに数学研究の契機を与えたことは広く知られる．その大きな成果の一つが微分計算に関するものであることも周知事実である．[41] 同時にパリ滞在期を経て，数学研究を充実させていく段階から，その成果を背景に，記号と記号が表現する関係に一層着目するようになる．ライプニッツはこのワイルが言及する小篇（パリ滞在期の直後に執筆されている）の中で，「もっとも，解析〔＝記号代数〕においては，異なる記号によって異なるものがより簡潔に事柄の状況を表す．ただし，つねに真理の基本は，記号の結びつき (connexio) と配列 (collocatio) 自身の中にある」として初等代数の例を提示する．[42] すなわち，

$$a = b + c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \tag{6}$$

a を別の異なるもの $(d - e)$ で置き換えると，

$$a = d - e \Rightarrow a^2 = d^2 + e^2 - 2de \tag{7}$$

となる．さらに式 (6) の a の代わりに $d = a + e$ で置き換えると，

$$d = a + e \Rightarrow d^2 = a^2 + e^2 + 2ae \tag{8}$$

となり，そして

---

[39] *Ibid*., pp. 25f, 同邦訳，28f 頁.
[40] [Leibniz 1875-1890], 7, S. 192.
[41] ライプニッツのパリ時代の数学研究の展開については，［林 2003］第 2 章参照.
[42] [Leibniz 1875-1890], 7, S. 192f.

$$d = a + e \Rightarrow -2de = -2ae - 2e^2 \tag{9}$$

となる．同一律

$$e^2 = e^2 \tag{10}$$

も合わせて，式（8），（9），（10）の両辺を加え合わせると，

$$d^2 - 2de + e^2 = a^2 \tag{11}$$

が成り立つとしている．結局, トートロジーのような言明になっている．ただ, ライプニッツの言いたいことは異なる記号（a，d，e のように）を用いても，そこに 2 項展開という一般的な計算公式（ある種の一般的関係）が成立することが物の本質であるということだろうか．異なるプロセスを経てもそれは不変である．ライプニッツはこの例の後に，「たとえ諸記号の仲介によって得られるにせよ，ただその利用において確かな順序と方式が保持されるならば，つねにすべてのことが一致するということがわかるだろう」と述べている．[43]

ライプニッツ自身が数学研究において，こうした記号の結びつきや配列についての彼の発想をどれほど具体化したか, 断片的であれ明らかにすることは別の場において検討した．[44] すべてが実を結んだわけではないが，特に「関係」に着目し，その関係において対応する事柄を同一視する発想は，構造の解明を目的とする 19 世紀後半から現代に至る数学の基本的な視点に先駆けている．もとはデカルトの『幾何学』ラテン語訳の学習を通じて獲得した記号代数だったが，さらなる展開がライプニッツの頭脳の中で構想されていた．また微分積分学に比べると，ライプニッツの功績として知名度は下がるが，記号表現の追究という点でよりクローズアップされるべきは，位置解析（analysis situs）に関わる研究である．[45]

ライプニッツによる記号表現の思想は，さらに大きな構想，すなわち普遍数学（mathesis universalis）・普遍学（scientia universalis，あるいは scientia generalis）構想，又は普遍記号法（characteristica universalis）のアイデアへと拡がりを見せる．次の考察の項目としてそれらについてのワイル『数学と自然科学の哲学』の言及を見よう．

5.4　普遍数学，普遍記号法について

われわれは 20 世紀の前半に起きた数学の基礎をめぐる議論を見る中で，いくつかの異なる立場からの見解を確認した．すなわち，ヒルベルトの形式主義（［林 2020］参照），

---

[43] *Ibid*., S. 193.

[44] 例えば，［林 2009］参照.

[45] ライプイニッツの位置解析に関わる言説についての詳細は，［林 2003］，3.1.3 項（114-132 頁），あるいは［Hayashi 1998］参照.

ブラウワーの直観主義（[林 2021］参照)，そして両者に対して共感を抱き，かつ両者の間を揺れ動いたワイル（[林 2021］参照)，それぞれの主張を見た．特に数学における記号の形式的使用について，または数学的対象の構成について，ヒルベルトとブラウワーは対極の考えを持っていた．ワイルは，『数学と自然科学の哲学』第 1 部第 2 章第 11 節「数学的認識の性格について」で次のように述べる．[46]

> すべての数学に顕著な特徴で，素人をおよそ近寄りがたくしているのは，記号のおびただしい使用である．直観主義者はこれを本質的な特徴とは考えずに, 書かれ，話されるあらゆる言語の場合と同じように，記号の中に単に伝達するためと，固定化によって規則を保持するための道具しか認めない．形式主義者はそうではない．彼は，数学はまったくもって記号的なものから成り，それは何ら感覚的，または精神的直観において確証される意味をもたず，決まった規則にしたがって操作されると考える．

こうした歩み寄ることの困難な二つの立場の間をワイルは行きつ戻りつした．この記号をめぐる思考についても際立った数理哲学を展開したとして参照されるのが，またしてもライプニッツである．『数学と自然科学の哲学』における当該の箇所では, 冒頭にライプニッツに関する言及が置いてある．それは強い印象を読者にもたらす．[47]

> 古来数学は量の科学，または空間と数の科学と見なされていた．(この定義はライプニッツにおいても見いだされるが, このように限界づけられた普遍学〔mathesis〕は，彼にとっては一層包括的な結合術〔ars combinatoria〕の一部分にすぎない．) 今日では，こうした見解は射影幾何学または群論のような分野を考慮すると，あまりに狭すぎるように見える．

引用中，学問一般における基礎を与える「普遍学」という語は，mathesis の訳語である．ライプニッツがその「普遍学」を意味する場合に用いる語としては，scientia universalis, あるいは scientia generalis が掲げられる．また数学的学問に狭く限定する場合に，同様にその基礎部分を構成する学問を「普遍数学」(mathesis universalis，または mathesis generalis）と称する．ワイルの文の引用では，少し原語と訳語が一般的使用からするとずれるが，文脈から判断した．

上の引用に関連して，ライプニッツ自身が初期段階から抱いていた思想に加えて，1672 年以降のパリ滞在期を経て，数学研究の成果をふまえた言説をここで確認しよう．ライプ

---

[46] [Weyl 1949], pp. 64f, 邦訳［ワイル 1959］，72 頁.

[47] *Ibid*., p. 62, 同邦訳，69 頁.

ニッツは独自に旧来の学問の新たな再編を構想していた．そして数学を核とする人間の知識一般に対する彼独自の整理と未知のものに対する発見術との連携を企てた．そのために必要な諸学問の基盤形成を特徴づけを考えていた．われわれはワイルの導きにしたがいつつ，ライプニッツの発想を初期段階から確認することも行いたい．そしてライプニッツのこのテーマに関する代表的な手稿の内容を詳しく見ておきたい．

ライプニッツは 1661 年，15 歳でライプツィヒ大学に入学する．その後，イエナ大学の夏学期に参加し，クルト･ヴァイゲルという人物の講義を受講する．ヴァイゲルを通じて，スコラ哲学の固定化された学問的枠組を壊す取り組み，学問的再編のアイデアに刺激を受ける．[48] すなわち普遍学の構想である．若いライプニッツはそこで抱いた夢を，彼の生涯を通じて検討し続けることになる．

一方で，ライプニッツは残された 1 次資料から判断して，同じ 10 代の学問的キャリアを歩みだした当初から記号法に強い関心を持っていた．1666 年，彼の哲学教授資格論文として執筆された『結合法論』（*Ars combinatoria*）は，初期段階の思索の代表作である．[49] その記号法については，1672 年以降に数学研究が本格化することで一層の充実を見る．同時に特に数学の中で基礎となる部分を抽出した普遍数学の理念は，デカルトやその著作のラテン語訳（ライプニッツが熱心に学習することになる）の翻訳者スホーテンの著作によって既に習得済みであった．ライプニッツの中で，異なる方向から流入した普遍学，普遍数学の概念に加えて，自身の数学研究によって内容を膨らませた事柄が相まって拡充されていくものとなる．

ライプニッツには異なる時期における普遍学，普遍数学に関する手稿が存在する．ただし整理された形で生前に公刊された著作・論文等はない．その時その時のアイデアを記した手稿の内容の細かな分析は別のところで行ったことがある．[50] ここでは，1695 年頃の執筆されたと推定される手稿で，ワイルもその『数学と自然科学の哲学』において参照の指示をしている手稿「普遍数学」（Mathesis universalis）について取り上げて，内容を分析してみたい．

この手稿「普遍数学」は，執筆の意図として冒頭に，「数学的普遍学自体とその中における発見術（ars inveniendi）とを促進するためであり，また迷宮の中で何らかの導きの糸を与えて学問を志す人たちを助けるためである」と記されている．[51] ライプニッツは序論部で，既存の学問分野に関して，より上位に位置づけられる（すなわち，より普遍性,

---

[48] クルト・ヴァイゲルについては，［林 2003］，5-8 頁参照.

[49] [Leibniz 1923-], 6-1, S. 165-230, 邦訳［ライプニッツ 1988］，12-52 頁（抄訳）.

[50]［林 2003］，第 4 章「統合的学問の基礎としての普遍数学」参照．ライプニッツの普遍学・普遍数学関連の手稿には，数学上の大きな成果である無限小解析を例示するよう記述が意外と少ない．むしろ数学の他の領域の試行錯誤が普遍数学に関わるアイデアを啓発した節もある．そうした 1672 年以降の数学研究との関連については，［Hayashi 2002］参照.

[51] [Leibniz 1849-1863], 7, S. 49, 邦訳［ライプニッツ 1997］，24 頁.

表 1　手稿「普遍数学」における階層構造

		学問，部門	内容
上位	1）	論理学	思考の最も一般的な技法
	2）	一般記号法（Speciosa Generalis）	結合法，量だけでなく，一般的に事物の形や質を扱う
	3）	計算術（Logistica）	量についての一般的な学問（代数はその一部）
下位	4）	算術，幾何学，機械学，混合数学（mista mathesis）	算術→代数の扱う不定の数の法則にしたがう
			幾何学→直線の長さによって位置を定める．無数の点による軌跡で線，面を定める

一般性を持つ）領域から下位に属する（すなわち，個別性，特殊性が高まる）分野へと新たな学問の階層を提案している．ライプニッツの記述をもとにまとめると，以下の表 1 ようになる．[52]　こうした設定は，他の学問構造を説明するのにも利用される．例えば，自然学は機械学に還元され，また機械学は幾何の方程式に還元される．さらに幾何自身は解析に帰するというようにである．ただし，ここでいう「解析」とは単に代数解析を指すのではない．最下位に属する幾何学，機械学，混合数学等に加えて，無限についての学問が新種の解析（＝記号代数学による方程式論）の下位に属するとしている．もちろんここで言う「無限の学問」（scientia infiniti）は級数計算のみならず，和計算（＝積分計算），微分計算を意味している．それは次の引用から明らかである．[53]

> 代数と相容れないものは，何であれ機械学的であるかのように，計算の権威者たちからは明確に排除されてきた．したがってわれわれは，この誤り（と私が判断するもの）を除きつつ，新種の解析によって無限についての学問を築き上げたのである．単に級数によるだけでなく，様々な段階の総和（summa）と微分，すなわち集積される量と，無限の反復によって集積していく連続的な要素とによって築き上げたのである．

1680 年代までの手稿とは異なり，はっきりと無限小解析を視野に入れた普遍数学の中身の規定が現れている．このような学問階層構造は，上下関係が入り組んでいて，判明でない部分もある．われわれはもう少し数学の基礎に関わる部分に注目したい．

ライプニッツはいま見ている手稿「普遍数学」の序論部で，一般的学問構造について説

---

[52] *Ibid*., S. 50f, 同邦訳，26f 頁.
[53] *Ibid*., S. 52, 同邦訳，29 頁.

明した後，普遍数学自体を直接論題にする．この手稿では言い回しを変えて，繰り返しその内容の規定が試みられる．当時の先端における数学的内容，諸分野の成果を盛り込もうとライプニッツは試行錯誤をしている．以下それらを列挙すると次のようになる．[54]

1）量一般についての方法，量を算定する方法（「とりわけ，その間に何らかのものが属する限界を定める方法について」）の学問.
2）有限についての学問と無限についての学問の二つの部分を持つ（後者では「有限が無限の介入によって定められる」）学問.
3）尺度（mensura）の反復，すなわち数に関する学問，一般的計算法（generalis calculus）.
4）計算術，数学的なものの論理学，数学的分析論（Analysis mathematica）.
5）「量，量について述べられた真理（方程式，多数性，少数性，比例等），論証（すなわち計算の操作），方法（問われているものを調べるために利用する過程）」を含む学問.
6）1，2，3，*a*，*b*，*x* といった 1 次的な記号によって与えられる（自義的概念，notio categorematica）と結合記号，量の間の関係といった 2 次的記号（共義的記号，notio syncategorematica）を含んだ理論.
7）二つの部分に分けられる記号法（speciosa）（「一つは有限量によって見いだされる有限量を扱う代数，もう一方は最終的には無限すなわち指示できない量が消えてしまうとしても，見いだされるべき有限の量を無限の介入によって扱う超越的な代数」）.
8）その上位部分に無限についての学問が見いだされる学問（「最も強力な道具の中に，私によって導入された微分計算がある」）.

上記の各項目のなかで 6）の中に含まれる，2 項間の関係を表現する「共義的概念」という語は，前節で問題としたことをふまえると重要である．また，7)，8）にあるように，この手稿「普遍数学」は，いま分析の対象としていない 1680 年代に書かれた手稿の内容の延長上にはあるが，加えて無限（または無限小）に対する意識が非常に鮮明になったということも特徴である．［林 2003］第 4 章で分析したように，1680 年代までのライプニッツの手稿では, ここに記されているほど明確に論題として扱われていなかった. ライプニッツは 1680 年代後半から 90 年代にかけて，無限小解析の基礎をめぐってニーウェンテイト等の批判を受けた．当然批判に答えるために無限，特に無限小に対して否応なしに自己の考えを整理する必要性に迫られたはずである．この手稿「普遍数学」において積極的に無限，または無限小が論じられることは，その反映ではないかと考えられる．実際，この手稿にはすでに以前の手稿中にも現れていた「超越量」に加えて,「指示できない量」(quantitas inassignabilis）についても次のような言及がある．[55]

[54] *Ibid*., S. 52ff. 邦訳，29-32 頁，または *Ibid*., S. 68f. 邦訳，54f 頁.

〔超越量に加えて〕指示できない量が与えられるとせよ．それらは無限であるか，無限に小さいか，すなわち無限小であるかであり，さらに様々な段階のものが与えられる．それらはたとえそれ自体で役に立たないとしても，指示できない量を迂回して指示できる量を見いだすのに少なからず役立つのである．そして一般的にあらゆる超越的なものの中には無限または無限小についてのある種の考察が介入してくる．

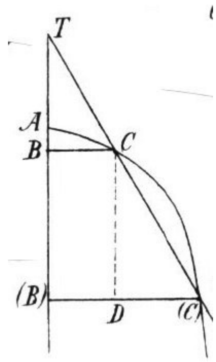

図 2：手稿「普遍数学」より

「指示できない量」とは，特定の量として具体的に定められない量（例えば無限小は 0 に等しくなく，かつ任意の有限量より小さい量）をいう．この語は，1670 年頃の著作「抽象的運動論」の中で披露されて以来用いられていた用語である．[56] また初の微分算に関する公刊論文「極大，極小を求める新方法」(1684 年刊)，ニーウェンテイトへの反論を試みた 1695 年の『学術紀要』誌上の論文では，有限量との比によって理解する方法が提示され，大きさ自体は有限量と「比較不可能」(imcomparabiliter) と断定されていた．その際ライプニッツは，1 階のみならず，2 階の微分量についても特殊例ながら正当化したと主張していたのであった．[57] この手稿「普遍数学」における具体例を提示しておきたい．いま，有限量（＝指示可能な量）との比による無限小理解は，以下の通りである．図 2 において，直線 TC が曲線 AC(C) と 2 点 C，(C) で交わっている．加えて，CB，(C)(B) は軸 AB への垂線である．このとき CD = B(B) が横線 AB と A(B) の「微分」(differentia) であり，D(C) が縦線 BC と (B)(C) の微分である．いま，直線 TC が軸 AB と T で交わっている．すると三角形 TBC と微小な三角形 CD(C) は相似である．もし直線 TC が AC(C) と接する（すなわち C と (C) が一致する）場合は三角形 CD(C) は「無限に小さい辺からなる指示不可能なもの」になる．しかし三角形 CD(C) と TBC の相似性は保たれる．これを用いて接線は次のように決定される．[58]

この指示不可能な三角形のおかげで，すなわち指示不可能な量 CD と D(C) との間の比（我々の微分計算は通常の指示可能な量によってそれを示す）の介入によって，指示可能な量 TB と BC との間の比が見いだされ，したがって接線 TC を引く方法が見いだされる．

---

[55] *Ibid*., S. 68. 邦訳，54 頁.

[56] ライプニッツの初期の著作「抽象的運動論」については，［林 2003］，1.3.2 項，28-35 頁参照.

[57] ライプニッツと無限小解析学の批判者ニーウェンタイトとの論争については，［林 2003］，3.3.2 項，173-188 頁参照．また，注（18）における引用参照.

[58] [Leibniz 1849-1863], 7, S. 75. 邦訳［ライプニッツ 1997］，64f 頁.

典型的なライプニッツの接線法の議論である．ここでは「指示不可能な量の介入→指示可能な量（有限量）を決定する」という流れが, 明らかに方程式論における虚量の介入によって実量が見いだされることのアナロジーとして捉えられていることに注意したい．[59] しかし，この議論はある意味では転倒している．「極大，極小を求める新方法」で，あるいはニーウェンテイトへの反論の中で提示された無限小の理解ではあくまでも有限量が認識の基礎にあって，無限小の方をその有限量との比例関係によって捉えるものであった．したがってここでのライプニッツの論理を，ライプニッツ以前に接線法に取り組んだフェルマーやバロウの接線法の議論と同じレヴェルで同一視することはできない．同時代人に対してどれほどの説得力があったかは別にしてもである．[60] ライプニッツはあえて議論を逆にして虚量と無限小との対比を持ち出し，その有用性，普遍数学概念に関連づけることの意義を説いているのだと理解すべきであろう．ここに，われわれはライプニッツ流の議論の典型を見る．いったん認識可能な事物を基本に据えながらも，記号の助けを借りて，むしろ記号活用の成果として位置づけられるものをスタートにして，認識可能な実量，有限量の方を見いだすための手段とする発想である．数学における直観と記号による形式的運用とのバランスをライプニッツは見抜いていた．また，そうした記号の効用の中に数学の発展性を感じていたのだろう．

とはいえ，20 世紀の数学者ヘルマン・ワイルからすると，ライプニッツの数学的学問構造の規定は幅が狭いものにしか見えなかったかもしれない．それはやむを得ないことである．むしろ, 本質はそこにあるのではない．現在進行形にある数学研究の成果を含めて，個別の数学的内容を一般的な学問的構造の中で位置づける作業をライプニッツが行ってい

[59] この手稿「普遍数学」中の虚量に関する言及を見ると次のように記されている．「無理量から不可能な量，すなわち虚量が生じる．それらの量は驚くべき性質を持ち，その有用性を過小評価するべきではない．というのもたとえこれらの量それ自体で何か不可能なものを意味するとしても，単に不可能性の原因や，不可能が生じないためには，問題がどのように正されるかということを示すだけでなく，その介入によって実量が表現されるからである」（*Ibid*., S. 73. 邦訳，61 頁）．

[60] 普遍数学関連で，1680 年代以前に執筆されたと推定される手稿の中に無限小が取り扱われているものもある．クーチュラが 1674 年以降の執筆と推定した手稿「普遍性の方法について」（De la methode de l'universalité）である．ライプニッツはその手稿の中で，曲線に対する割線（2 点で交わる直線）の交点の距離が「無限小」になった場合を考えることで，接線を見いだすのに十分であることを主張する．そして「不可分者〔カヴァリエリ〕の方法は，無限の方法に依存したものに比べて確固としたものでない」とした上で,「アルキメデスの幾何学は，ギュルダン，グレゴワール・ド・サン・ヴァンサン，カヴァリエリが復活させた者たちだが，無限小量を利用していることは明白である」と断定している（[Leibniz 1903], pp. 105f）．この手稿で「普遍性の方法の諸操作」として想定されるものは，スホーテンの著作で設定された記号代数を用いた四則演算程度である．位置解析，方程式論，そして確からしさの計算の成果が全く反映されていない点を考慮すると，パリ滞在期，すなわちライプニッツの数学研究の修業時代に執筆されたとしたクーチュラの推定は，一定の正当性を持つだろう．だがそれ以上に無限小に対する理解，ギリシャ数学の枠組に対してどのように考えるかに関して，ライプニッツはまだ非常に素朴な表明をしている．同じ接線の決定を例にとっているとはいえ，1680 年代以降の手稿の内容と同列に見ることはできないだろう．

たことにある．数学が基礎・土台として抽出される内容に基づいており，また数学自体に対しても基礎・土台の部分を抽出する作業を行うという諸学問全体の階層構造の組み換えこそがライプニッツの目指したところである．そして，そうした構想の核となるのが記号法である．例えば上で引用した（注（58）参照）ように，指示不可能な「量」を通じて，指示可能な量を特定できる手法をライプニッツは接線法（= 微分計算に基づく方法）の議論から導いたが，その際に独自の記号（例えば，dx のように）を与えることが議論を促進させるのだった．独自の記号を与えることが議論にとって不可欠であることもライプニッツは強調していたのである．ここに，数学において記号が数学の持つ形式性との関連を明らかにされた．ワイルが『数学と自然科学の哲学』の冒頭で（本稿のエピグラフ参照），ライプニッツをとりわけ賞賛するのはこうした理由であると考えられる．ワイルのライプニッツ評価は的を射たものである．

5.5 中間考察のまとめ，ワイルとライプニッツ

本稿は，20 世紀初頭から 1930 年代まで数学者たちの中で続いた数学基礎論論争の中間考察として，ヘルマン・ワイルとライプニッツの思想的関連を見た．特にワイルの著作『数学と自然科学の哲学』第 1 部の中で，ライプニッツに関わる記述を摘出してきた．その中で直接ライプニッツ自身の記述にふれて，ワイルが下した評価の成否を確認してきた．結局，ワイルが置かれた論争の中での立場において，ライプニッツはどのような影響を持ったのだろうか．前回の数学史講義［林 2021］で見たワイルの考えをもう一度振り返ることにしたい．

ワイルによる数学の基礎をめぐる関心は，数学研究者としてのスタートを切ったころから継続していた．［林 2021］ではそれを五つの段階にまとめた．[61] その内，研究初期の段階を除く四つは，

1）1918 年刊行の著作『連続体』の段階，フッサールの影響を受けながら既存の実数論，無限論に関わる議論を批判的に乗り越えようとしていた．
2）1920 年代前半の段階，直観主義者ブラウワーの実数論（構成主義）に強く影響され，ヒルベルトの形式主義的試み（超数学による無矛盾性の証明）と批判的に対峙していた．
3）1920 年代半ば以降の段階，ブラウワーの議論から一定の距離を取り，ヒルベルトを再評価しようとする．
4）ゲーデルにより 1931 年に公表された不完全性定理の証明以降の段階，数学の基礎をめぐる論争全体を相対化しつつ，懐疑を深め，より基礎の安全な数学を研究において模索する．

---

[61]［林 2021］，44 頁．

以上の通りである．ライプニッツは 17 世紀から 18 世紀の人物であり，20 世紀の論争の特定の立場にはめ込んでしまうことはできない．ただし, 上のワイルにとっての 3) の段階，すなわちブラウワーへの熱狂を覚ます効果を担ったのではないかと考えられる．ヒルベルトの形式主義に潜む企図，すなわち記号による意味をはぎ取られた超数学によって数学全体の無矛盾性を証明しようとする試みは，ライプニッツの記号論や学問全体の構造に関する言説によって再評価されることにつながったのではないか．まさしくライプニッツの数学に対する（ある意味で孤立した）見識が，時を経過して異なる局面で大きな意味を持つに至ったのである．

われわれは，すでにライプニッツの独特の記号論を見た．ライプニッツはデカルト『幾何学』に代表される新しい記号法とそれを最大限に利用した代数方程式論に強く影響を受けた．そしてデカルトを越えて，さらに記号を数学の中で一層有効に利用しようとした．例えば，デカルトが線分によって実量を目に見えるように作図を重んじたがゆえに，3 次方程式の虚「量」を実質的に排除したことや，3 次方程式の解の公式（カルダーノの公式）が，限定的な有効性しか持たないと同時代人たちには解釈されていた．それに対して，ライプニッツは式（2）のような計算に関して，形式的な観点から正当化されるので，過剰に存在論的な観点に固執する必要がないと主張していた．ライプニッツは,「作図によって線分の長さとして目に見える＝直観的に把握できる」存在だけでなく,「形式的に無矛盾な議論によって導けるもの＝論理的に了解できる」存在をも数学的存在の中に積極的に組み込もうと提案していたのである．同じことは接線を求める微分法の中でも見ることができる．それこそ従来の（ユークリッド『原論』第 5 巻で理論化された）量のカテゴリーの中にないと考えられていた無限小を，式（1）のように，あるいは注（58）に該当する引用で示したように有限量との比例関係の中に位置づけて，既成の比例論の枠組に収まっている存在と認識する解釈を述べた．無限小も（有限な）線分の長さとして直観的に理解できるものではない. また旧来からあるアリストテレスによる可能無限の理解とも異なる．あくまでも記号の活用による形式性を伴った議論である．数学がその対象を拡大し，問題解決を図るためには，直観的認識に過剰に依拠することにこだわらず，形式的議論の活用も必要なのである．したがって，ブラウワーが主張する排中律の使用を無制限に認めないといった，あまりにも厳しい制約の下で，実際に数学を展開する上での身動きが自由に取れないことは好ましくないと，ヘルマン・ワイルはあらためて考えるに至ったように見える．その観点からブラウワー批判が『数学と自然科学の哲学』にも記されていたのはわれわれも見たところである．[62]

ライプニッツは記号活用と学問の根本にある論理学上の形式的無矛盾性を前提に，一般的学問的構造（普遍学構想）を練っていた．ただし，そのライプニッツの発想が同時代を生きた彼の弟子筋のヤーコプ，ヨハンのベルヌーイ兄弟やロピタル，ヴァリニョン，ある

---

[62]［林 2021］，43f 頁，注（70）に該当する引用参照.

いはオイラーへと至る数学の発展の経過の中で理解され，踏襲されたは言い難い．当時も先端にいた数学研究者たちが，具体的な未解決問題を解くのに，それこそ「身動きが自由に取れない」のは望ましくなかっただろう．そもそも，数学研究者が基礎の問題に強い関心を寄せるとは限らないのである．時代が飛んで，19 世紀後半になり，ゲルハルトによって 1 次資料［Leibniz 1849-1863］，［Leibniz 1875-1890］が公刊された．そのように資料が充実して実相がより豊かに把握できるような条件が整ったことも影響しているだろう．ようやくライプニッツの議論が，20 世紀前半の文脈に沿って急速に理解され，ワイルのように数学基礎論論争の中でクローズアップするようにもなる．20 世紀初頭から 1930 年代までの数学の基礎をめぐる論争の場面で，数学にも哲学にも深い見識を持った人物ヘルマン・ワイルを待って，ライプニッツは真の理解者を得たのだと言えようか．

数学において，形式か直観かという 2 項対立の図式は，もはやあまり意味をもたない．とりわけゲーデルの不完全性定理の証明が公表されて，ヒルベルトの企ても限界づけられてしまったからである．むしろ問題なのは，数学と数理哲学とが完全に分離して専門化してしまい，クロスする場面がほとんどない状況に 20 世紀後半に至ったことである．数学にとって喫緊の課題と哲学におけるそれとは互いに関連性も持つ機会を失っていく．また，数学基礎論という一つの専門分野が「数学の中に」確立して，哲学を切り離したともいえる．もちろんこれはある種の必然性をともなった現象であり，一概に批判すべきことではない．

われわれは，ワイルが 1920 年代に公刊し，第 2 次世界大戦後英語版として改訂版を出版した『数学と自然科学の哲学』の記述の中からライプニッツとの関わりを見てきた．同じワイルの第 2 次世界大戦後の論文「数学と論理」（1946 年刊）についても，すでに［林 2021］で取り上げた．その論文では，ワイルは自身を含めて数学の基礎をめぐる論争に関わった人物たちの「立ち位置」を図式化し，ある種の相対化を試みていた．そしてワイルは，数学の基礎をめぐる議論が，多くの数学者たちの日常の研究にあまり影響していないことを危惧しつつ，自分自身は比較的安全な分野において研究を進める旨述べていた．[63] そこで，ワイルなど数学基礎論論争に関わった者たちにとって大きなインパクトをもたらし，同時に多くの数学者が数学の基礎から一般的に遠く離れる契機となったゲーデルの定理について，その内容と意義とを検討することを次の課題としたい．

（未完．以下次号に続く）

6　ゲーデルの不完全性定理

[63]［林 2021］，60-64 頁参照．

文献

1 次文献（翻訳も含む）

[Brouwer 1975] *L. E. J. Brouwer Collected Works, 1, Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting (Amsterdam, Oxford: North Holland Publishing Company, 1975).

[Brouwer 1981] *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, edited by D. van Dalen (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1981).

[Cantor 1915] Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, translated by Philip E. B. Jourdain (1915_1) (New York: Dover Publications Inc., 1955) (rep.).

[Cantor 1932] *Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, herausgegeben von Ernst Zermelo(1932_1) (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980) (rep.).

[Cantor 1991] *Georg Cantor Briefe*, herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson (Berlin etc.: Springer- Verlag, 1991).

[Cauchy 1821] Cauchy, Augustin- Louis, *Cours D'analyse de L'École Royale Polytechnique* (1821_1) (Sceaux: Édition Jacques Gabay, 1989) (rep.).

[Courant and Hilbert 1968] Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik*, 1 (3. Auflage) (1924_1, 1930_2), 2 (2. Auflage) (1937_1) (Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1968).

[Dedekind 1930-1932] *Richard Dedekind Gesammelte mathematische Werke*, herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, und Öystein Ore ($1930\text{-}1932_1$) (Bronx: Chelsea Publishing Company, 1969) (rep.).

[Descartes 1996] *Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery ($1897\text{-}1913_1$) (Paris: J. Vrin, 1996).

[Dirichlet 1889-1897] *G. Lejeune Dirichlet's Werke*, herausgegeben auf Verlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker und L. Fuchs ($1889\text{-}97_1$) (Bronx: Chelsea Publihshing Company, 1969) (rep.)

[Ewald 1996] *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 1, 2, edited by William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1996).

[Fourier 1822] Fourier, Joseph, *Théorie analytique de la chaleur* (1822_1) (Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1988) (rep.).

[Gödel 1986-1990] *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 1-2, edited by Solomon Fefferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort (Oxford etc.: Oxford University Press, 1986-1990).

[Hilbert 1900] Hilbert, David, "Über den Zahlbegriff," *Jarhresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **8** (1900), S. 180-184.

[Hilbert 1926] Hilbert, David, "Über das Unendliche," *Mathematische Annalen*, **95** (1926), S. 161-190.

[Hilbert 1928] Hilbert, David, "Die Grundlagen der Mathematik," *Abhandlungen aus dem* *mathmatischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), S. 65-85.

[Hilbert 1930] Hilbert, David, "Probleme der Grundlegung der Mathematik," *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 1-9.

[Hilbert 1970] *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, Zweite Auflage, Band 1-3 (1932, 1933, 1935_1) (Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1970).

[Hilbert 1998] Hilbert, David, *The Theory of Algebraic Number Fields*, Translated from the German by Iain T. Adamson with an Introduction by Franz Lemmermeyer and Norbert Schappacher (Berlin, Heiderberg and New York: Springer- Verlag, 1998).

[Hilbert 2004] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, edited by Michael Hallett and Urlich Majer (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2004).

[Hilbert 2009] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics 1915-1927*, edited by Tilman Sauer and Urlich Majer (Dordrecht, Heidelberg, London, and New York: Springer- Verlag, 2009).

[Hilbert 2013] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933}*, edited by William Ewald and Wilfried Sieg (Heidelberg, New York, Dordrecht and London: Springer, 2013).

[Hilbert 2015] Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*, herausgegeben von Klaus Vorkert (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2015).

[Hilbert and Bernays 1968-1970] Hilbert, David and Bernays, Paul, *Grundlagen der Mathematik*, Zweute Auflage, 1(1934_1), 2(1939_1)(Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968-1970).

[Husserl 1992] *Edmund Huusserl Gessammelte Schriften*, herausgegeben von Elisabeth Ströker (Hamburg: Felix Meiner verlag, 1992).

[Klein, 1926-1927] Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927_1) (New York: Chelsea Publishing Company, 1967) (rep.).

[Kant 1998] Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, nach der ersten und zweiten Originalausgabe, herausgegeben von Jens Timmermann (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1998).

[Kodaira 1975] *Kunihiko Kodaira Collected Works*, Vol. 1-3 (Tokyo, Princeton: Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1975).

[Kronecker 1895-1930] *Leopold Kronocker's Werke}*, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel (1895-1930_1) (New York: Chelsea Publishing Company, 1968) (rep.)

[Kronecker 2001] " 'Sur le concept de nombre en mathématique': Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891)," Retranscrit et commenté par Jaqueline Boniface et Norbert Schappacher, *Revue d'histoire des mathématiques*, **7** (2001), pp. 207-275.

[Leibniz 1849-1863] *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1849-1863_1) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).

[Leibniz 1875-1890] *G. W. Leibniz Die philosophischen Schiriften* herausgegeben von Carl

Immanuel Gerhardt ($1875\text{-}1890_1$) (Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1996) (rep.).

[Leibniz 1903] *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, publiés par Louis Couturat (1903) (Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1988) (rep.).

[Leibniz 1923-] *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Berlin: Akademie Verlag, 1923-).

[Leibniz 1957] *Correspondance Leibniz- Clarke*, présentée d'après les manuscrits originaux des bibliothèque de Hanovre et de Londre par André Robinet (Paris: Presses Universitaires de France, 1957).

[Leibniz 2004] Leibniz, G. W., *Discours de métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, Édition établie, présentée et annotée par Michel Fichant (Gallimard, 2004).

[Poincaré 1902] Poincaré, Henri, "Hilbert, Les Fondements de la Géométrie," *Bulletin des sciences mathématiques*, **26** (1902), pp. 249-272.

[Poincaré 1905-1906] Poincaré, Henri, "Les mathématiques et la logique," *Revue de métaphysique et de morale*, **13** (1905), pp. 815-835, **14** (1906), pp. 17-34, **14** (1906), pp. 294-317.

[Poincaré1906] Poincaré, Henri, *La science et l'hypothèse* (2e éd.) (1902_1) (Paris: Flammarion, 1968).

[Riemann 1990] Riemann, Bernhard, *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftliche Nachlass und Nachtrage*, neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan (Berlin etc.: Springer Verlag, Leibzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft,1990).

[Russell 1903] Russell, Bertrand, *Principles of Mathematics* (1903_1) (London and New York: Routledge, 2010).

[van Heijenoort 1967] *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931}*, edited by Jean van Heijenoort (Cambridge, London: Harvard University Press, 1967).

[Weyl 1913] Weyl, Hermann, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913_1, 1923_2, 1955_3) (Stuttgart, Leibzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1997).

[Weyl 1918] Weyl, Hermann, *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis (und andere Monographien)* (1918_1, 1932_2) (Providence: AMS Chelsea Publishing, 2006) (rep.).

[Weyl 1923] Weyl, Hermann, *Raum・Zeit・Materie: Vorlesungen über allgemeine Ralativitätstheorie* (1918_1) (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1923_5).

[Weyl 1931] Weyl, Hermann, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated by H. P. Robertson (1931_1) (Mineola: Dover Publishing, Inc., 2018).

[Weyl 1940] Weyl, Hermann, *Algebraic Theory of Numbers* (1940_1) (Princton: Princeton University Press, 1998).

[Weyl 1946] Weyl, Hermann, *The Classical Groups: Thier Invariants and Representations* (1939_1, 1946_2) (Princeton: Princeton University Press, 1997).

[Weyl 1949] Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926_1, 1949_2)

(Princeton: Princeton University Press, 2009).

[Weyl 1952] Weyl, Hermann, *Symmetry* (1952_1) (Princeton: Princeton Univeristy Press, 2016).

[Weyl 1968] *Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von K. Chandrsekharan (Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968).

[Weyl 1987] Weyl, Hermann, *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Translated by Stephen Pollard and Thomas Bole (1987_1) (New York: Dover Publications, Inc., 1994).

[Weyl 1994] Weyl, Hermann, *Le continu et autres écrits*, Notes introductives et traduction par Jean Largeault (Paris: J. Vrin, 1994).

[Weyl 2009] Weyl, Hermann, *Mind and Nature: Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics*, Edited and with an Introduction by Peter Pesic (Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2009).

[Weyl 2012] Weyl, Hermann, *Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics, and Philosophy*, Translated and Edited with an Introduction and Notes by Peter Pesic (Mineola: Dover Publications, Inc., 2012).

[Zermelo 1904] Zermelo, Ernst, "Beweis, daßjede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)," *Mathematische Annalen*. **59** (1904), S. 514-516.

[Zermelo 1908] Zermelo, Ernst, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1," *Mathematische Annalen*. **65** (1908), S. 261-281.

[Zermelo 2010] *Ernst Zermelo Collected Works*, Volume 1 edited by Heinz- Dieter Ebbinghaus and Akihiro Kanamori (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2010).

［アリストテレス 1968］『アリストテレス全集』12,『形而上学』出隆訳（岩波書店，1968 年）.

［アリストテレス 2017］『アリストテレス全集』4,『自然学』内山勝利訳･解説（岩波書店，2017 年）.

［カッシーラー1989-1997］カッシーラー，エルンスト『シンボル形式の哲学』（一）～（四），木田元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1999-1997 年）.

［カッシーラー2017］カッシーラー，エルンスト『実体概念と関数概念：認識批判の基本的諸問題の研究』（1979 年 $_1$），山本義隆訳（みすず書房，2017 年）.

［カント 2011］カント，イマニュエル『純粋理性批判』，熊野純彦訳（作品社，2011 年）.

［カントル 1979］G. Cantor『現代数学の系譜　8　カントル　超限集合論』功力金二郎・村田全訳・解説（共立出版，1979 年）.

［クライン 1995］Klein，Felix,『クライン：19 世紀の数学』，彌永昌吉監修，足立恒雄・浪川幸彦監訳，石井省吾・渡辺弘訳（共立出版，1995 年）.

［クーラン，ヒルベルト 1959-1962］R. クーラン = D. ヒルベルト『数理物理学の方法』1-4，齋藤利弥監訳，丸山滋弥・銀林浩・麻嶋格次郎・筒井孝胤訳（東京図書，1959-1962 年）.

［クーラント，ヒルベルト 2013-2019］R. クーラント, D. ヒルベルト『数理物理学の方法』

上，下，藤田宏・高見穎郎・石村直之訳（丸善出版，2013-2019 年）.

［ゲーデル 1997］ロドリゲス - コンスエグラ，フランシスコ編『ゲーデル未完哲学論考』好田順治訳（青土社，1997 年）.

［ゲーデル 2006］ゲーデル，クルト『不完全性定理』林晋・八杉満利子訳・解説（岩波文庫，2006 年）.

［ディリクレ，デデキント 1970］P. G. L. Dirichlet, J. W. R. Dedekind『現代数学の系譜　5　ディリクレ，デデキント『整数論講義』酒井孝一訳・解説（共立出版，1970 年）.

［デカルト 2010］デカルト，ルネ『方法序説』山田弘明訳（ちくま学芸文庫，2010 年）.

［デデキント 1961］デーデキント『数について：連続性と数の本質』河野伊三郎訳（岩波文庫，1961 年）.

［デデキント 2013］デデキント，リヒャルト『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳・解説（ちくま学芸文庫，2013 年）.

［ヒルベルト 1972］D. Hilibert『現代数学の系譜　4　ヒルベルト　数学の問題：ヒルベルトの問題　増補版』一松信訳・解説（共立出版，1972 年）.

［ヒルベルト 2005］D.　ヒルベルト『幾何学基礎論』中村幸四郎訳（1969 年 1）（ちくま学芸文庫，2005 年）.

［ヒルベルト，クライン 1970］D. Hilbert, F.Klein『現代数学の系譜　7　ヒルベルト　幾何学の基礎，クライン　エルランゲン・プログラム』寺阪英孝・大西正男訳・解説（共立出版，1970 年）.

［ヒルベルト，ベルナイス 1993］D. ヒルベルト，P. ベルナイス『数学の基礎』吉田夏彦・渕野昌訳（シュプリンガー・フェアラーク東京，1993 年）（Hilbert and Bernays 1968-1970］の抄訳）.

［フッサール 1965］フッサール，エドムント，『現象学の理念』立松弘孝訳（みすず書房，1965 年）.

［フッサール 1968-1976］フッサール，エドムント，『論理学研究』1-4，立松弘孝・松井良和・赤松宏訳（みすず書房，1968-1976 年）.

［フッサール 1979-1984］フッサール，エトムント，『イデーン』1-1，1-2，渡辺二郎訳（みすず書房，1979-1984 年）.

［フレーゲ 2000］『フレーゲ著作集　3　算術の基本法則』野本和幸編（勁草書房，2000 年）.

［フレーゲ 2001］『フレーゲ著作集　2　算術の基礎』野本和幸・土屋俊編（勁草書房，2001 年）.

［ポアンカレ 1953］ポアンカレ，アンリ『科学と方法』吉田洋一訳（1926 年 1）（岩波文庫，1953 年）.

［ポアンカレ 2021］ポアンカレ，アンリ『科学と仮説』伊藤邦武訳（岩波文庫，2021 年）.

［ボルツァーノ 1978］ボルツァーノ, B.『無限の逆説』藤田伊吉訳（みすず書房，1978 年）.

［ユークリッド 2008］斎藤憲・三浦伸夫訳・解説，『エウクレイデス全集』第 1 巻，『原論』1-6（東京大学出版会，2008 年）.

［ライプニッツ 1988］『ライプニッツ著作集』1，『論理学』沢口昭聿訳（工作舎，1988 年）.

［ライプニッツ 1989］『ライプニッツ著作集』9,『後期哲学』西谷裕作・米山優・佐々木能章訳（工作舎, 1989 年）.

［ライプニッツ 1997］『ライプニッツ著作集』2,『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳（工作舎, 1997 年）.

［ライプニッツ 1999］『ライプニッツ著作集』3,『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長島秀男訳（工作舎, 1999 年）.

［ライプニッツ 2019］ライプニッツ『モナドロジー：他二篇』谷川多佳子・岡部英男訳（岩波文庫, 2019 年）.

［リーマン 2004］リーマン, ベルンハルト『リーマン論文集』足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳（朝倉書店, 2004 年）.

［リーマン 2013］リーマン, ベルンハルト『幾何学の基礎をなす仮説について』菅原正巳訳（1970 年 $_1$）（ちくま学芸文庫, 2013 年）.

［ワイル 1959］ワイル, ヘルマン『数学と自然科学の哲学』菅原正夫・下村寅太郎・森繁雄訳（岩波書店, 1959 年）（［Weyl 1949］の邦訳）.

［ワイル 1970］ヴァイル, ヘルマン『シンメトリー』遠山啓訳（紀伊國屋書店, 1970 年）.

［ワイル 1974］ワイル, ヘルマン『リーマン面』田村二郎訳（岩波書店, 1974 年）（［Weyl 1913］, 初版の邦訳）.

［ワイル 2007］ワイル, ヘルマン『時間･空間･物質』上, 下, 内山龍雄訳（1973 年 $_1$）（ちくま学芸文庫, 2007 年）（［Weyl 1923］の邦訳）.

［ワイル 2012］ワイル, H.,『古典群：不変式と表現』蟹江幸博訳（2004 年 $_1$）（丸善出版, 2012 年）（［Weyl 1946］の邦訳）.

［ワイル 2014］ワイル, ヘルマン,『精神と自然：ワイル講演録』ピーター・ヘジック編, 岡村浩訳（ちくま学芸文庫, 2014 年）（［Weyl 2009］の邦訳）.

［ワイル 2016］ヴァイル, ヘルマン『連続体：解析学の基礎についての批判的研究』田中尚夫・渕野昌訳・注釈・解説（日本評論社, 2016 年）（［Weyl 1918］の邦訳）.

2 次文献

[Arthur 2018] Arthur, Richrad T. W., *Monads, Composition, and Force: Ariadnean Threads through Leibniz's Labyrinth* (Oxford, New York: Oxford University Press, 2018).

[Antognazza 2008] Antognazza, Maria Rosa, *Leibniz: An Intectual Biography* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2008).

[Belna 1996] Belna, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege: théories, conceptions et philosophie* (Paris: J. Vrin, 1996).

[Blumenthal 1935] Blumenthal, Otto, "Lenbensgeschichte," in [Hilbert 1970], Band 3, S. 388-429.

[Boniface 2004] Boniface, Jacqueline, *Hilbert et la notion d'existence en mathématique* (Paris: J. Vrin, 2004)

[Cavaillès 1994] Cavaillès, Jean, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, présentation par

Bruno Huisman (Paris: Hermann, 1994).

[Cleary 1995] Cleary, John J., *Aritotle and Mathematics: Aporetic Method in Cosmogy and Metaphysics* (Leiden, New York, Köln: E. J. Brill, 1995).

[Corry 2004] Corry, Leo, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Second Edition (1996_1) (Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004).

[Dauben 1979] Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Princeton: Princeton University Press, 1979).

[Dawson, Jr. 1997] Dawson, Jr., John, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel* (Wellesley: A K Peters, 1997).

[Dugac 1976] Dugac, Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: J. Vrin, 1976).

[Dreben and Kanamori 1997] Dreben, Burton and Kanamori, Akihiro, "Hilbert and Set Theory," *Synthese*, **110** (1997), pp. 77-125.

[Ebbinghaus 2007] Ebbnighaus, Heinz- Dieter, *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work* (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2007).

[Edwards 1979] Edwards, Jr., Charles Henry, *The Historical Development of the Calculus* (New York etc.: Springer- Verlag, 1979).

[Feferman 1998] Feferman, Solomon, *In the Light of Logic* (New York, Oxford: Oxford University Press, 1998).

[Ferreirós 2007] Ferreiros, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Second Revised Edition (Basel: Birkhäuser Verlag, 2007).

[Ferreirós and Gray 2006] Ferreirós, José, and Gray, Jeremy J., *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy* (Oxford: Oxford University Press, 2006).

[Frei und Stammbach 1992] Frei, Günter und Stammbach, Urs, *Hermann Weyl und die Mathmetik an der ETH Zürich 1913-1930* (Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992).

[Garber 2009] Garber, Daniel, *Leibniz: Body, Substance, Monad* (Oxford, New York: Oxford University Press, 2009).

[George and Vellman 2002] George, Alexander and Vellman, Daniel J., *Philosophies of Mathematics* (Malden, Oxford: Blackwell Publisihers, 2002).

[Grabiner 1981] Grabiner, Judith V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus* (1981_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2005).

[Gray 1989] Gray, Jeremy, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic* (Oxford: Clarendon Press, 1989).

[Gray 2013] Gray, Jeremy, *Henri Poincaré: A Scientific Biography* (Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2013).

[Hallett 1984] Hallett, Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size* (Oxford: Clarendon Press, 1984).

[Hayashi 1998] Hayashi, Tomohiro, "Introducing Movement into Geometry: Roberval's Influence on Leibniz's Analysis Situs," *Historia Scientiarum*, 8 (1998), pp. 53-69.

[Hayashi 2002] Hayashi, Tomohiro, "Leibniz's Construction of *Mathesis Universalis*: A Consideration of the Relationship between the Plan and His Mathematical Contributions," *Historia Scientiarum*, 12 (2002), pp. 121-141.

[Hawkins 2000] Hawkins, Thomas, *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics 1869-1926* (New York etc.: Springer- Verlag, 2000).

[Heck 2011] Heck, Richard G., *Frege's Theorem* (Oxford: Clarendon Press, 2011).

[Heck 2012] Heck, Richard G., *Reading Frege's Grundgesetze* (Oxford: Clarendon Press, 2012).

[Jech 1973] Jech, Thomas J., *The Axiom of Choice* (1973_1) (Mineola: Dover Publications Inc., 2008) (rep.).

[Jech 2003] Jech, Thomas, *Set Theory The Third Millennium Edition, Revised and Expanded* (Berlin, Heidelberg New York etc.: Springer, 2003).

[Kanamori 1996] Kanamori, Akihiro, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **2** (1996), pp. 1-71.

[Kanamori 2004] Kanamori, Akihiro, "Zermelo and Set Theory," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **10** (2004), pp. 487-553.

[Kanamori 2009] Kanamori, Akihiro, *The Higher Infinite, Second Edition* (Berlin, Heidelberg: Springer, 2009).

[Kitcher 1976] Kitcher, Philip, "Hilbert's Epistemology," *Philosophy of Science*, **43** (1976), pp. 99-115.

[Largeault 1993] Largeault, Jean, *Intuition et intutionisme* (Paris: J. Vrin, 1993).

[Lauria 2004] Lauria, Philippe, *Cantor et le transfini: mathématique et ontologie* (Paris: L'Harmattan, 2004).

[Mancosu 1998] Mancosu, Paolo, *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s* (New York, Oxford: Oxford University Press, 1998).

[Mancosu 2010] Mancosu, Paolo, *The Adventure of Reason: Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900-1940* (New York, Oxford: Oxford University Press, 2010).

[Mclarty 2006] Mclarty, Colin, "Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of the Functors," in [Ferreirós and Gray 2006], pp. 187-208.

[Moore 1982] Moore, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (1982_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

[Moore 2002] Moore, Gregory H., "Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolution of Hilbert's Thought," *Historia Mathematica*, **29** (2002), pp. 40-64.

[Raatikainen 2003] Raatikainen, Panu, "Hilbert's Program Revisited," *Synthese*, **137** (2003), pp. 157-177.

[Reid 1970] Reid, Constance, *Hilbert* (1970_1) (New York: Springer- Verlag, 1996).

[Reid 1976] Reid, Constance, *Courant* (1976_1) (New York: Springer- Verlag, 1996).

[Segre 1994] Segre, Michael, "Peano's Axioms in Their Historical Context," *Archive for History of Exact Sciences*, **22** (1994), pp. 201-342.

[Scholz 2001] *Hermann Weyl's Raum- Zeit- Materie and a General Introduction to His Scientific Work* (Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001).

[Sieg 2013] Sieg, Wilfried, *Hilbert's Programs and Beyond* (New York etc. : Oxford University Press, 2013).

[Sieg and Schlimm 2013] Sieg, Wilfried and Schlimm, Dirk, "Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms," in [Sieg 2013], pp. 35-72.

[Sigurdsson 1991] Sigurdsson, Skuli, "Hermann Weyl, Mathematics and Physics, 1900-1927," A Thesis to the Department of History of Science, Harvard University, 1991.

[Sinaceur 1999] Sinaceur, Houriya, *Corps et modèles: Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle* (Paris: J. Vrin, 1999).

[Takeuchi 2013] Takeuchi, Gaishi, *Proof Theory Second Edition* (1987_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

[Tieszen 1989] Tieszen, Richard, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge* (Dordrecht, London, Boston: Kluwer Academic Press, 1989).

[Tieszen 2005] Tieszen, Richard, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2005).

[Tieszen 2011] Tieszen, Richard, *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press, 2011).

[van Dalen 2013] van Dalen, Kirk, *L. E. J. Brouwer Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life* (London etc.: Springer- Verlag, 2013).

[Wang 1987] Wang, Hao, *Reflexions on Kurt Gödel* (Cambridge, London: A Bradford Books, The MIT Press, 1987).

[Wang 1996] Wang, Hao, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (Canbridge, London: The MIT Press, 1996).

［新井 2021］新井敏康『数学基礎論　増補版』（2011 年 $_1$）（東京大学出版会，2021 年）．

［飯田 1995］飯田隆編『リーディングス　数学の哲学：ゲーデル以後』（勁草書房，1995 年）．

［井関・近藤 1977］井関清志・近藤基吉『現代数学：成立と課題』（日本評論社，1977 年）．

［伊東・原・村田 1975］伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』（筑摩書房，1975 年）．

［彌永 1972-1978］彌永昌吉『数の体系』（上），（下）（岩波新書，1972 年，1978 年）．

［カスー＝ノゲス 2020］カスー＝ノゲス，ピエール『ゲーデルの悪霊たち：論理学と狂気』新谷昌宏訳（みすず書房，2020 年）

［菊池 2014］菊池誠『不完全性定理』（共立出版，2014 年）．

［キューネン 2008］キューネン，ケネス『集合論：独立性証明への案内』藤田博司訳（日本評論社，2008 年）．

［楠 1973］楠幸男『函数論：リーマン面と等角写像』（1973 年 $_1$）（朝倉書店，2011 年）．

［倉橋 2021］倉橋太志「不完全性定理の数学的発展」，『数学』，**73-1**（2021 年 1 月），60-87

頁.
［小平他 1985］小平邦彦他『特集　ワイル生誕 100 年』（『数学セミナー』1985 年 9 月号）（日本評論社，1985 年）.
［小平 2000］小平邦彦『怠け数学者の記』（1986 年 $_1$）（岩波現代文庫，2000 年）.
［小平 2003］小平邦彦『解析入門』1，2（岩波書店，2003 年）.
［小林・大島 2005］小林俊行・大島利雄『リー群と表現論』（岩波書店，2005 年）.
［小松 2009］小松勇作『無理数と極限』（1967 年 $_1$）（共立出版，2009 年）.
［近藤 1994］『近藤洋逸数学史著作集』第 1 巻『幾何学思想史』佐々木力編集（日本評論社，1994 年）.
［齋藤 2002］齋藤正彦『数学の基礎：集合・数・位相』（東京大学出版会，2002 年）.
［佐々木 1995］佐々木力『科学革命の歴史構造』（上），（下）（1985 年 $_1$）（講談社学術文庫，1995 年）.
［佐々木 2001］佐々木力『二十世紀数学思想』（みすず書房，2001 年）.
［佐々木 2020］佐々木力『数学的真理の迷宮：懐疑主義との格闘』（北海道大学出版会，2020 年）.
［志賀 1988］志賀浩二『集合への 30 講』（朝倉書店，1988 年）.
［志賀 2013］志賀浩二『数学という学問：概念を探る 3』（ちくま学芸文庫，2013 年）.
［下村 1988］『下村寅太郎著作集』1，『数理哲学･科学史の哲学』（みすず書房，1988 年），『科学史の哲学』（1941 年 $_1$，2012 年 $_2$）所収，143-329 頁，『無限論の形成と構造』（1944 年 $_1$，1979 年 $_2$）所収，333-450 頁.
［杉浦 1980-1985］杉浦光夫『解析入門』1，2（東京大学出版会，1980，1985 年）.
［杉浦 1997］杉浦光夫編『ヒルベルト　23 の問題』（日本評論社，1997 年）.
［杉浦 2000］杉浦光夫『リー群論』（共立出版，2000 年）.
［杉浦 2018］杉浦光夫『杉浦光夫数学史論説集』，笠原乾吉・長岡一昭・亀井哲治郎編（日本評論社，2018 年）.
［鈴木 2013］鈴木俊洋『数学の現象学：数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学』（法政大学出版局，2013 年）.
［砂田他 2019］砂田利一他『ヒルベルト：現代数学の礎の源を探る』（『数理科学』2019 年 9 月号）（現代数学社，2019 年）.
［赤 2014］赤攝也『集合論入門』（1957 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2014 年）.
［関口他 2016］関口次郎他『特集　ワイル：現代の数学と物理に与えた影響を探る』（『数理科学』2016 年 10 月号）（サイエンス社，2016 年）.
［高木 1971］高木貞治『初等整数論講義』第 2 版（1931 年 $_1$）（共立出版，1971 年）.
［高木 1995］高木貞治『近世数学史談』（1931 年 $_1$，1942 年 $_2$）（岩波文庫，1995 年）.
［高木 2010］高木貞治『定本　解析概論』（1938 年 $_1$）（岩波書店，2010 年）.
［竹内 1980］竹内外史『直観主義的集合論』（紀伊國屋書店，1980 年）.
［竹内･八杉 1988］竹内外史･八杉満利子『証明論入門』（1956 年 $_1$，1974 年 $_2$，1988 年 $_3$）（共立出版，2011 年）.

［田中 2006-2007］田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の論理学』全 4 巻（1『ゲーデルの 20 世紀』，2『完全性定理とモデル理論』，3『不完全性定理と算術の体系』，4『集合論とプラとニズム』）（東京大学出版会，2006-2007 年）．

［田中 2012］田中一之『原点解題　ゲーデルに挑む：証明不可能なことの証明』（東京大学出版会，2012 年）．

［田中 2019］田中一之『数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ』（裳華房，2019 年）．

［田中 2005］田中尚夫『選択公理と数学：発生と論争，そして確立への道』（増訂版）（遊星社，2005 年）．

［谷山 1994］『谷山豊全集［増補版］』，谷山豊全集（増補版）編集委員会（佐竹一郎・清水達雄・杉浦光夫・山崎圭次郎）編（日本評論社，1994 年）

［ドーソン Jr 2006］ドーソン Jr，ジョン・W『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』村上祐子・塩谷賢訳（新曜社，2006 年）．

［中村 2021］中村大介『数理と哲学：カヴァイエスとエピステモロジーの系譜』（青土社，2021 年）．

［長岡 2018］長岡亮介「ゲオルク・カントルと彼の集合論」，『数学文化』，**29**（2018 年），13-25 頁．

［野本 2012］野本和幸『フレーゲ哲学の全貌：論理主義と意味論の原型』（勁草書房，2012 年）．

［野本 2019］野本和幸『数論・論理・意味論　その原型と展開：知の巨人たちの軌跡をたどる』（東京大学出版会，2019 年）．

［林 2000］林知宏「17-18 世紀における無限小をめぐる論争：ライプニッツを中心に」，『数学の思考』（『現代思想』2000 年 10 月臨時増刊号）（青土社，2000 年）所収，176-195 頁．

［林 2001］林知宏「無限小量をめぐる論争と基礎づけの問題，ライプニッツ，ヴァリニョン，ヘルマン」，『数学史の研究』（京都大学数理解析研究所講究録 1195，2001 年）所収，14-37 頁．

［林 2003］林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）．

［林 2008］林知宏「数学史講義（第 2 回）：ユークリッド『原論』，論証学問の成立」，『学習院高等科紀要』，**6**（2008 年），23-52 頁．

［林 2009］林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』（世界思想社，2009 年）所収，37-56 頁．

［林 2011］林知宏「数学史講義（第 5 回）：17 世紀における記号代数と方程式論」，『学習院高等科紀要』，**9**（2011 年），11-38 頁．

［林 2012］林知宏「数学史講義（第 6 回）：アイザック・ニュートンの数学 1」，『学習院高等科紀要』，**10**（2012 年），29-95 頁．

［林 2013］林知宏「数学史講義（第 7 回）：アイザック・ニュートンの数学 2」，『学習院高等科紀要』，**11**（2013 年），13-66 頁．

［林 2016］林知宏「数学史講義（第 10 回）: アイザック・ニュートンの数学 5」,『学習院高等科紀要』, **14**（2016 年）, 57-110 頁.
［林 2017］林知宏「数学史講義（第 11 回）: 数学の基礎をめぐって 1 : 集合と数の理論（デデキント）」,『学習院高等科紀要』, **15**（2017 年）, 39-82 頁.
［林 2018］林知宏「数学史講義（第 12 回）: 数学の基礎をめぐって 2；カントルの無限集合論」,『学習院高等科紀要』, **16**（2018 年）, 37-75 頁.
［林 2019］林知宏「数学史講義（番外編）: パスカルとモンテーニュ」,『学習院高等科紀要』, **17**（2019 年）, 27-75 頁.
［林 2020］林知宏「数学史講義（第 13 回）: 数学の基礎をめぐって 3；現代数学基礎論論争 (その 1) : ヒルベルトの形式主義」,『学習院高等科紀要』, **18**（2020 年）, 25-80 頁.
［林 2021］林知宏「数学史講義（第 14 回）: 数学の基礎をめぐって 4；現代数学基礎論論争（その 2）: ヘルマン・ワイルの数学と思想」,『学習院高等科紀要』, **19**（2021 年）, 21-75 頁.
［原 2013］原亨吉『近世の数学 : 無限概念をめぐって』（1975 年 $_1$）（ちくま学芸文庫, 2013 年）.
［渕野 2018］渕野昌「カントルの精神の継承 : 無限集合の数学 / 超数学理論としての集合論のその後の発展と, その「数学」へのインパクト」,『数学文化』, **29**（2018 年）, 26-41 頁.
［前原 1977］前原昭二『数学基礎論入門』（朝倉書店, 1977 年）.
［リード 2010］リード, C.『ヒルベルト : 現代数学の巨峰』彌永健一訳（1972 年 $_1$）（岩波現代文庫, 2010 年）.