接合積にならない中心的斜体について

菊池陽一朗

概　　要

中心的単純多元環の同値関係より Brauer 群が定義され，体上の中心的斜体の同型類はその体の Brauer 群の要素と対応する．即ち，Brauer 群は体上にどのくらい中心的斜体が存在するかという情報を持っている．そのような中で任意の中心的単純多元環は接合積と Brauer 同値であるという事実から，接合積は議論の重要な位置を占めてきた．当初，任意の中心的斜体は接合積であるという予想がなされ，実際，基礎体を問わず中心的斜体の次数が 2, 3, 4, 6, 12 であるとき予想は成り立つことが示された．また，基礎体を $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(t)$, $\mathbb{R}((t))$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}((t))$, 有限体，有限次代数体または有限体上の 1 変数代数関数体，局所体，局所体上の 1 変数形式的ローラン級数体のどれかとすれば中心的斜体の次数に関係なく予想が成り立つことも示された．即ち，数論的に興味のあるかなり多くの体上に於いて，中心的斜体は接合積であるということである．予想の証明は 40 年程なされないままであったが，Amitsur［1］によって否定的に解決された．本稿ではその証明の概略と関連する未解決問題を紹介する．

1　準備

定義等の確認を行う．このテーマについての和書は少ないが［2]，［3]，［4］が挙げられる．また，論文やレクチャーノートを含めれば［5]，［6］が挙げられる．洋書では［7]，［8］が詳しい．

以下 K を体とする．

Definition 1.1.　環 A が K 上の線形空間としての構造を持ち，任意の $\lambda \in K, x, y \in A$ に対し，

$$(\lambda)xy \;=\; (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

を成り立たせるとき，A を K 上の多元環（*algebra*）という．A の K 上の線形空間としての次元を K 上の多元環 A の次元とし，$[A:K]$ で表す．K 上の多元環 D の零元以外の元が可逆元であるとき，D を K 上の斜体（*division algebra*）という．本稿では多元環は K 上有限次元であるものとする．

Example 1.2.　K 上の多元環の例としては，K 上の n 次正方行列環 $M_n(K)$，K 上の多元環

A に対する左 A 加群 M の自己準同型環 $\mathrm{End}_A(M)$，K の標数が 2 でないとき $a, b \in K^\times$ に対する四元数環（$\frac{a,b}{K}$）等が挙げられる．

Definition 1.3.　K 上の多元環 A の可換な部分多元環

$$Z(A) = \{z \in A \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対し，} za = az\}$$

を A の中心（*center*）という．

Definition 1.4.　K 上の多元環 A の中心 $Z(A)$ が K であるとき，A は K 上中心的（*central*）であるという．また，A の両側イデアルが自明なもののみであるとき，A は単純（*simple*）であるという．A が K 上中心的かつ単純であるとき, A を K 上の中心的単純多元環（*central simple algebra*）という．A が K 上の中心的単純多元環であるとき，Wedderburn の構造定理を用いて［$A : K$］が平方数になることが示せるので，中心的単純多元環 A の K 上の次数（*degree*）を $\deg A = \sqrt{[A : K]}$ で定める．

Definition 1.5.　A, B を K 上の多元環とするとき，K 上の線形空間としてのテンソル積 $A \otimes_K B$ に対し積を

$$(a \otimes_K b) \cdot (a' \otimes_K b') = (aa') \otimes_K (bb') \ (a \otimes_K b, a' \otimes_K b' \in A \otimes_K B)$$

により定めると，$A \otimes_K B$ は K 上の多元環になる．これを K 上の多元環 A, B の K 上のテンソル積（*tensor product*）という．

Definition 1.6.　A を K 上の中心的単純多元環とするとき，拡大体 L/K で $L \subset A$ であるものを A の部分体（*subfield*）という．A の部分体の中で極大のものを極大部分体（*maximal subfield*）という．A の部分体 L で［$L : K$］$= \deg A$ となるものを強極大部分体（*strictly maximal subfield*）という．

Remark 1.7.　中心的単純多元環は必ずしも強極大部分体を持たない．例えば，$M_n(\mathbb{C})$ は強極大部分体を持たない．一方，中心的斜体は必ず強極大部分体を持つ．

Definition 1.8.　L/K を有限次ガロア拡大，$G = Gal(L/K)$ とする．任意の 2 次のコサイクル $\varphi \in \mathbb{Z}^2(G, L^\times)$ に対し，L 上のベクトル空間

$$(\varphi, L/K, G) = \sum_{\sigma \in G} L \cdot x_\sigma \ (\text{ただし，} \{x_\sigma \mid \sigma \in G\} \text{ は } (\varphi, L/K, G) \text{ の } L \text{ 上の基底})$$

に積を $x_\sigma \cdot \alpha = \sigma(\alpha) \cdot x_\sigma (\alpha \in L)$, $x_\sigma \cdot x_\tau = \varphi(\sigma, \tau)\, x_{\sigma\tau}$ で定める．すると，$(\varphi, L/K, G)$ は $\varphi(1_G,$

$1_G)^{-1} x_{1_G}$ を単位元とする K 上の中心的単純多元環になる．これを φ による接合積（*crossed product*）という．定義より L は（$\varphi, L/K, G$）の強極大部分体である．

Definition 1.9. L/K を n 次巡回拡大，$G = \mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$ とする．任意の $b \in K^{\times}$ に対し，L 上のベクトル空間

$$(b, L/K, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} L \cdot v^i \ (\text{ただし，} \{1, v, \cdots, v^{n-1}\} \text{ は } (b, L/K, \sigma) \text{ の } L \text{ 上の基底})$$

に積を $v \cdot \alpha = \sigma(\alpha) \cdot v$ ($\alpha \in L$)，$v^n = b$ で定める．すると，$(b, L/K, \sigma)$ は K 上の中心的単純多元環になる．これを巡回多元環（*cyclic algebra*）という．定義より L は（$b, L/K, \sigma$）の強極大部分体である．また，巡回多元環が斜体になるとき，これを巡回斜体（*cyclic division algebra*）という．

Remark 1.10. 中心的単純多元環が接合積である必要十分条件は，中心的単純多元環が中心上ガロア拡大であるような強極大部分体を持つことである．また，巡回多元環は接合積であり，中心的単純多元環が巡回多元環である必要十分条件は，中心的単純多元環が中心上巡回拡大であるような強極大部分体を持つことである．

Definition 1.11. K の標数を 0 とし，x_{ij}^k $(1 \leq i, j \leq n, 1 < k \leq m)$ を K 上可換な不定元とする．このとき，$X_k = (x_{ij}^k) \in M_n$ $(K[x_{ij}^k])$ を K 上の n 次のジェネリック行列（*generic matrix*）という. また, $K[X_1, X_2, \cdots, X_m]$ を K 上 m 個のジェネリック行列から生成される次数 n のジェネリック行列多元環（*generic matrix algebra*）といい，M (k, n, m) で表す．M (k, n, m) は Ore 整域であり，その局所化は中心的斜体になる．これを K 上 m 個のジェネリック行列から生成される次数 n のジェネリック斜体（*generic division algebra*）といい，UD (k, n, m) で表す.

2　接合積にならない中心的斜体の存在定理

Amitsur［1］による接合積にならない中心的斜体の存在定理の証明の概略を紹介する．関連する PI-Algebra の理論についても含めるならば，［9］が詳しい.

Theorem 2.1. 奇素数の 2 乗もしくは 8 が n を割り切るとき，ジェネリック斜体 UD $(\mathbb{Q}, n, m)$ ($\mathbb{Q}$ を含むが $\mathbb{Q}$ が中心ではない）は接合積ではない.

Lemma 2.2. K を代数閉体，L/K を K 上の形式的ローラン級数体で $L = K((t_1, t_2, \cdots, t_{2r}))$, $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$（ただし，$p_i$ は相異なるとは限らない素数）とする．また，$1 \leq i \leq r$ の各 i に対し，$L_i = L[t_{2i-1}^{1/p_i}]$ とし，$A_i = (t_{2i}, L_i/L, \sigma_i)$（ただし，$\mathrm{Gal}$ $(L_i/L) = \langle\sigma_i\rangle$）とする．このとき，

$A = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r$ は L 上の次数 n の中心的斜体で，その強極大部分体を M とするとき，M/L はアーベル拡大で $\mathrm{Gal}\,(M/L) \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_r}$（ただし，$S_i$ は位数 i の巡回群）である．

Lemma 2.3. ある素数 p が存在して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上の次数 n の中心的斜体が存在し，さらに，その強極大部分体を N とするとき，$N/\mathbb{Q}_p$ はアーベル拡大で $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}_p) \cong S_n$ もしくは $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}_p) \cong S_2 \times S_{n/2}$（ただし，$S_i$ は位数 i の巡回群）となる．

Lemma 2.4. ジェネリック斜体 $UD\,(\mathbb{Q}, n, m)$ を接合積とし，その強極大部分体の $Z(UD\,(\mathbb{Q}, n, m))$ 上のガロア群を Γ とする．このとき，標数 0 の体上の次数 n の任意の中心的斜体 D は接合積であり，その強極大部分体の $Z(D)$ 上のガロア群は Γ である．

Proof of Theorem 2.1. ジェネリック斜体 $UD\,(\mathbb{Q}, n, m)$ を接合積とし，その強極大部分体の $Z(UD\,(\mathbb{Q}, n, m))$ 上のガロア群を Γ とする．このとき，Lemma 2.2，Lemma 2.3，Lemma 2.4 より $\Gamma \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_r}$ となり，さらに $\Gamma \cong S_n$ もしくは $\Gamma \cong S_2 \times S_{n/2}$ となる．即ち，巡回群の直積が巡回群になる必要十分条件が直積を構成する巡回群の位数が互いに素であることから，$n = 2^\nu \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$（ただし，$0 \leq \nu \leq 2$，$q_i$ は相異なる奇素数）とならねばならない．従って，奇素数の 2 乗もしくは 8 が n を割り切るとき，ジェネリック斜体 $UD\,(\mathbb{Q}, n, m)$ は接合積ではない． □

なお Amitsur の証明後，その手法を踏襲し様々な接合積にならない中心的斜体の存在が明らかになり，[10] にあるように定理は以下のような形に至っている．

Theorem 2.5. K を体，p を素数とするとき，以下の 2 つの条件

(1) p の 3 乗が n を割り切る
(2) K の標数が p でなく，K が 1 の原始 p 乗根を含んでいないときに p の 2 乗が n を割り切る

のどちらかが成り立てば，K を含むが K を中心としない，次数 n の接合積にならない中心的斜体が存在する．

また，Brussel [11] による別の手法により，基礎体を $\mathbb{Q}(t), \mathbb{Q}((t))$ とするとき中心的斜体が接合積にならない場合があることが示されている．

3　関連する未解決問題

中心的単純多元環についての未解決問題は［12］に網羅的にまとめられている．その中で Theorem 2.1 に関連した未解決問題として，次の問題が挙げられる．

Problem 3.1.　p を素数とするとき K 上の次数が p の中心的斜体が接合積，即ち巡回斜体にならないような素数 p を求めよ．

この問題に関して $p = 2, 3$ のときに中心的斜体が常に巡回斜体になることが知られているが，$p > 3$ に関しては未解決である．Theorem 2.1 の主張と同様に，次数が p の中心的斜体で巡回斜体にならないものが存在すると信じられているが，未だ解決されていない．なお，次数が 4 の中心的斜体が常に接合積になることは先に述べたが（例えば，Hamilton の四元数体は $\mathbb{R}$ 上次数 4 の接合積であり巡回斜体でもある），次数が 4 の中心的斜体で巡回斜体にならないものが存在することは Albert［13］によって示されており，これが合成数を含めた場合の中心的斜体で巡回斜体にならないものが存在する最小の次数となっている．

参考文献

［1］S. A. Amitsur. On central division algebras. *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 12, No. 4, pp. 408–420, 1972.

［2］斎藤秀司．共立講座 21 世紀の数学（20）整数論．共立出版，1997.

［3］秋月康夫，鈴木道夫．高等代数学 I，II. 岩波書店，1952.

［4］中山正，東屋五郎．代数学 II. 岩波書店，1954.

［5］長谷川寿人．中心的単純環の理論と中心的斜体に関する種々の問題について．Master's thesis，新潟大学大学院自然科学研究科，2017.

［6］渡部隆夫．中心的単純多元環．http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~twatanabe/algebra.pdf.

［7］R. S. Pierce. *Associative Algebras*, Vol. 88. Springer Science & Business Media, 2012.

［8］L. H. Rowen. *Ring Theory V1*. Academic Press, 1988.

［9］N. Jacobson. *PI-algebras*. Springer, 1975.

［10］D. J. Saltman. Finite-dimensional division algebras. *Azumaya algebras, actions, and modules* (*Bloomington, IN 1990*), *Contemporary Math*, Vol. 124, pp. 203–214, 1992.

［11］E. Brussel. Noncrossed products and nonabelian crossed products over q (t) and q ((t)). *American Journal of Mathematics*, Vol. 117, No. 2, pp. 377–393, 1995.

［12］A. Auel, E. Brussel, S. Garibaldi, and U. Vishne. Open problems on central simple algebras. *Transformation Groups*, Vol. 16, No. 1, pp. 219–264, 2011.

［13］A. A. Albert. Non-cyclic algebras of degree and exponent four. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 35, No. 1, pp. 112–121, 1933.