条件つきの等式と因数定理

―― 潜むつながり ――

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第 18 回

高城彰吾

18.1 今回の自習課題

今年度の 1 学期は，数学Ⅱの最初に置かれている「方程式・式と証明」の章を扱った．実質的に数学Ⅰ「数と式」の延長であり初等的な計算に関わる内容であることから，1 年生のうちに扱うことも可能な単元である．いわゆる「数学教育の現代化」時代の学習指導要領ではすべて数学Ⅰでまとめて扱っていた．内容は 3 次式の展開と因数分解, 二項定理, 整式の除法，等式・不等式の証明から複素数とその計算，剰余の定理・因数定理と多岐にわたり雑多とさえいえるが，虚数という新しい数を認めて数の拡張を行うことを除けば抽象度が高くないため，生徒たちは比較的理解が容易な様子でさほど躓くことなく高次方程式まで学び終えた．学期末考査の範囲としては，次の「図形と方程式」に少し入ったところまでとなり，問題の数と種類は多いがあまり深い内容理解を求めない問題が並んだ。そのような中にちゃんとした理解を問う問題として，次のようなものを出題したいと考えたが，試験の時間に比べた題数の多さを鑑みて，期末考査終了後にレポート問題としてじっくり考えてもらうこととした．

18.2 考査後の課題

学期末考査後の課題は，次の 3 題からなる．

$\boxed{1}$ (1) $a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $f(x)$ を x の 1 次式，$P(x)$ を x の整式とする．条件つきの等式

$f(a)=0$ のとき，$P(a)=0$ である．

が成り立つならば，$P(a)$ は $f(a)$ を因数にもつことを示せ．

(3) (1)と(2)を利用して $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$(3)の因数分解を用いて，次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

$a+b+c\geqq 0$ のとき，$a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$

参考：この不等式において a，b，c をそれぞれ，$\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{b}$，$\sqrt[3]{c}$ で置き換えると，3 個のものに対する相加平均と相乗平均の関係

$a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

が導かれる．

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$(3)とは別に，2 つの公式

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

を用いて，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

$\boxed{1}$(1)では因数分解の公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

を知っている人は利用してかまわない．その場合の解答は

$a+b+c=0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

となる．しかし(3)では問題の主旨として，この公式を用いることはできない．本来的には $\boxed{1}$(1)は単純な計算問題で，条件式を 1 つの文字について解き，証明すべき等式の左辺に代入して右辺に至ることを示すことになる．

これに続く(2)で一見関連性のない内容である因数定理の主張が現れるところが，$\boxed{1}$において主に問われる点となる．一見関連性のないことによる意外性をさておくことができれば，証明そのものは因数定理のものとほぼ同一である。剰余の定理・因数定理についてはその証明もしっかり理解して自分で行うことができるようになることを求めたい．その上でこの問では，与えられた条件のもとで少しの修正を加える必要があり，証明を生徒自身が書くことを求めている．さらに(3)では 3 つの変数を「ある定数」と考えれば 3 次方程式を解く際の因数分解と同様に，3 次式を割り切ることの分かっている 1 次式で実際に割り算を実行することで因数分解を行うことができる．

念のため，実際の(2)，(3)の解答は次のようになる．

(2) $P(x)$を 1 次式 $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$$P(x)=f(x)Q(x)+R$$

$x=a$ を代入して

$$P(a)=f(a)Q(a)+R$$

$f(a)=0$ と仮定すると，$P(a)=0$ であるから

$$0=0\cdot Q(a)+R$$

よって　　　　　　　　　　$R=0$

ゆえに　　　　　　　　　　$P(a)=f(a)Q(a)$

すなわち，$P(a)$ は $f(a)$ を因数にもつ．

⑶ ⑴により条件つきの等式

$$a+b+c=0 \text{ のとき，} a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

が成り立つから，⑵により $a^3+b^3+c^3-3abc$ は $a+b+c$ を因数にもつ．

そこで $a^3+b^3+c^3-3abc$ を $a+b+c$ で実際に割ると

$$
\begin{array}{r l}
 & a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2) \\
\cline{2-2}
a+b+c\,\big) & a^3 \qquad\qquad -3abc \qquad\qquad +b^3+c^2 \\
 & a^3+(b+c)a^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -(b+c)a^2-3bc\cdot a \\
 & \quad -(b+c)a^2-(b+c)^2a \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad (b^2-bc+c^2)a+b^3+c^3 \\
 & \qquad\qquad (b^2-bc+c^2)a+(b+c)(b^2-bc+c^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

となり，この商を整理すると

$$a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

となるから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

と因数分解される．

$\boxed{2}$はさらに不等式にも結び付けられる場合のあることを示し，$\boxed{3}$は$\boxed{1}$で得られた結果を気持ちの上での拠りどころとして，工夫する経験を与えるものである．

18.3　類題づくり

教科書や問題集から条件つきの等式の証明問題を拾い，上と同様に因数分解を行うことができるから，生徒自身が高次式の因数分解を見出す経験をさせることができる．そのようにして見出した因数分解を，レポートの$\boxed{3}$のように式変形のみで導くことを要求するのも計算力のさらなる向上につながると考えられる．

類題

⑴ $a+b+c=0$ のとき，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-3abc$ を示せ．

⑵ ⑴を用いて，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$ を因数分解せよ．

⑶ ⑴を用いずに，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$ を因数分解せよ．

18.4　まとめ

条件つきの等式の証明と因数定理は同一の章で扱われているものの，教科書上では関連性を感じさせる記述は一切見当たらない．生徒にとっては別の異なるものと捉えるのが自然であろう．しかし一旦，その関連性に気づくことができれば，新たな視界が広がることにつながる．それは新鮮な驚きであるばかりでなく，既習事項に対する深い理解と新しい等式を自ら発見する契機を与えるものとなる．

これまでの連載で何度も示してきた次のメモを再録しておく．

＊ 理解を深めることについてのメモ ＊

一般にある対象を「理解する」ときに重要なのは，

⑴　対象の成り立ち（解釈，証明）を把握する

⑵　対象の応用およびその適用される範囲，限界を認識する

ことと考えられ，さらに「理解を深める」というときには

⑶　対象に関する既知の理解と異なる見方が示される（新解釈や別証明）

⑷　別々と思われていた複数のことがらの間の関係が明らかになる

⑸　新たな方向への発展（の可能性）が示唆される

ことが期待され，またそのために

⑹　対象に関するより進んだ状況設定の考察から振り返ることが有効と考えられる．

参 考 文 献

［1］文部科学省検定済教科書「数学Ⅱ」1 章，俣野 博 他（2017），東京書籍，pp.6-60