数学史講義（第14回）：数学の基礎をめぐって4；
現代数学基礎論論争（その2），ヘルマン・ワイルの数学と思想

林　知宏

4　現代数学基礎論論争（その 2），ヘルマン・ワイルの数学と思想

4.1　ヘルマン・ワイル（1885-1955）の生涯と研究業績

数学の究極の基礎，そして究極の意味に関する問いは開かれたままである．
われわれはどのような方向にその最終的な解決が見いだされるのかを知らないし，
またそもそも客観的な最終解答が期待できるのかもまったくわからない．[1]

[1] [Weyl 1968]，4, S. 126.

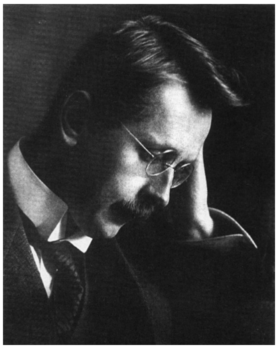

図 1：ヘルマン・ワイル（1885-1955）

ヒルベルトが亡くなった際に（1943 年），恩師を追悼する一文をヘルマン・ワイル（1885-1955）は記した．そこではヒルベルトが形式主義の立場から，算術の無矛盾性の証明（1900 年第 2 回国際数学者会議（ICM）で提唱した 23 の問題における第 2 問題であった）を果たそうとしたことが述べられている．ヒルベルトの企ては，内容を伴った数学を一端意味を剥ぎとって形式化した体系，すなわちメタ数学・超数学を通じて行われるものである．ただし，ワイルはこの試みは不成功に終わったと断定している．実際，直観主義の立場から，ブラウワー（1881-1966）は「われわれに直観的な確実性が数学的証明可能性の目標にとって，どの程度足りていないのかを明らか」にし，また，不完全性定理の証明を 1931 年に公表したゲーデル（1906-1979）は，「反対に直観的な確実性が数学的証明（任意に固定された形式主義）においてできることをどの程度越えているかを」示したからである．[2]　その文脈で，エピグラフの言葉が続く．「数学の詩人」と称されるこの 20 世紀前半を代表する数学者は，数学の基礎をめぐる問題に関してどのような見識に基づいて，どのような主張をしたのか．哲学的素養にも恵まれた稀有の数学者，ヘルマン・ワイルの言説を今回の数学史講義では分析していきたい．

4.1.1　ヘルマン・ワイルの生涯

ヘルマン・ワイルは，1885 年 11 月 9 日，ドイツ北部のハンブルク近郊の街エルムスホルンで生まれた．[3]　ワイルは，1904 年にゲッティンゲン大学に入学する．当時世界をリードした数学者ヒルベルト（1862-1943）の下で学ぶ機会を持つ．[4]　ワイルが数学の素質に恵まれていたのは確かだろうが，それ以外の学問的準備もすでに整えていた．大学入学以前，まだ両親と一緒に暮らしていた頃，その実家の書棚にはカント『純粋理性批判』の古い解説書（1790 年刊）が所蔵されており，それにふれて影響されたという．とりわけ「『空間と時間の観念性』に関するカントの学説を知るに至り，すぐさま私は非常に強く捉えられた」と最晩年（1954 年），スイス・ローザンヌで行われた講演で回顧している（「認識と熟慮（ある人生の回顧）」（Erkenntnis und Besinnung (Ein Lebensrückblick)，1955 年刊））．[5]　後に一般相対論のテキストであり，高度な数学書である『時間・空間・物質』（*Raum・Zeit・Materie*, 初版 1918 年刊）の「序文」の中にもカントへの言及が含まれている．[6]　数学的著作の中

---

[2] *Ibid*.

[3] ワイルの生涯については，“Lebenslauf,” in [Weyl 1968], 1, S. 87, “Vita Hermann Weyl,” in［Weyl 1913], S.175,［佐々木 1995］(下),［佐々木 2001］,［Weyl 2009］(邦訳［ワイル 2014］),［Sigurdsson 1991］等々を参照した．また，図 1 の写真は，［Weyl 1913］から採った．

[4] ワイルとヒルベルトの出会いのいきさつについては，前回の数学史講義［林 2020］，31 頁の注（13）で紹介した．その引用文を参照のこと．

に哲学的な背景や洞察が組み込まれていることは，ワイルの著作では一般的によくあることで不思議なことではない．さらにより哲学的な考察を展開した『数学と自然科学の哲学』（*Philosophie der Mathematik und Naturwisssenschaft*，初版独語版 1926 年刊，*Philosophy of Mathematics and Natural Science*, 英訳改訂増補版 1949 年刊）といった著作も世に問うている．他の数学者と比して際立ったワイルの特徴は，こうした点にある．

その後, 1905 年から翌年にかけてミュンヘン大学に移り, 再びゲッティンゲンに戻った．1908 年には，積分方程式論で博士号を取得した．[7]　そして 1910 年には 2 階常微分方程式の固有値問題に関わる教授資格論文を提出した．そしてヒルベルトの下で助手の経験を積み，1913 年にスイスのチューリヒ連邦工科大学（ETH）に着任する．1930 年にヒルベルトの後任としてゲッティンゲンに戻るまで，多産な研究の日々を送った．

チューリヒでの研究・教育活動は，充実したものだった．次節で取り上げる多くの研究論文とともに，1913 年に現在の多様体論の先駆けとなった『リーマン面の理念』（*Die Idee der Riemannschen Fläche*，邦題『リーマン面』）を刊行した，さらに 1918 年，数学の基礎を論じた『連続体』（*Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*），発表された間もなかったアインシュタインの相対性理論を論じた『時間・空間・物質』（*Raum·Zeit·Materie: Vorlesungen über allgemeine Ralativitätstheorie*，1918 年刊），これまた建設されたばかりの量子力学に関わる『群論と量子力学』（*Gruppentheorie und*

---

[5]［Weyl 1968］, 4, S. 632, 英訳［Weyl 2009］, p. 205, 邦訳［ワイル 2014］，424 頁．ただし邦訳は，英訳［Weyl 2009］からの日本語訳である．引用文中，括弧で括って強調したものは，原文ではイタリック，あるいは何らかの強調が行われている場合である．また, 邦訳は引用者の判断で変更することがある．以下，本稿の引用については同様の処置を行う．

[6] ワイルは，相対論がもたらす認識とカントとを関連づけて，次のように述べている（［Weyl 1923］, S. 3, 邦訳［ワイル 2007］，上，23f 頁）．

> カントにいたって初めて，哲学の内部で十分な明快さを備えて洞察を大きく前進させたのである．すなわち，感覚的な特性ばかりでなく，空間や空間特性までも絶対的な意味で，何ら客観的な意味を持つものではなく,「空間はわれわれの直観の一つの形式にすぎない」ということである．われわれの直観の中に与えられた空間や時間の本質が，数学的に構成された物理学的世界の中には，まったく取り上げられてこなかったことを物理学の領域でとりわけ明確にしたのは，おそらく相対性理論が初めてであっただろう．

このようにアインシュタインの相対性理論をより広いコンテクストの中で位置づけ，かつ数学的に明快に整理することができるのはまれな資質と言えよう．ワイルのカントからの影響は，（超越論的観念論の観点で）特筆すべきものであり，多くの研究者の指摘を待つまでもない．加えて，フィヒテ，フッサールからの影響は顕著と考えられる．特に後者については, 論じるべきことは多い（［Tieszen 2005］, p. 248f）．後ほど 4.2.2 項で，少し考察を加えたい．

[7] 博士論文のタイトルは,「フーリエ積分定理を特に考慮した特異積分方程式」（Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems）であった（［Weyl 1968］, 1, S. 1-86）．ヒルベルトが当時（1902 年頃から 1910 年頃にかけて）取り組んでいた，積分方程式論の研究に触発されたものと考えられる．ワイルの論文中に直接言及されているのは，ヒルベルトの 1906 年論文「線型積分方程式の一般的定理の基本性質」（Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichung），およびゲッティンゲン大学におけるヒルベルトの講義である．

Quantummechanik，1931 年刊）と数々の名著が怒涛のように出版される．これらの著作は今もなお生命力を失わず，20 世紀の古典としての存在意義を誇っている．加えて先に挙げた『数学と自然科学の哲学』も上梓している．

次々と業績を上げるワイルには誘いも多かった．その間，カールスルーエ（1916 年），ブレスラウ（1918 年），ゲッティンゲン（1920 年），ベルリン（1920 年），アムステルダム（1921 年），ライプツィヒ（1925 年）等々から招聘を受けたが断っている．特に，クライン（1849-1925）の後任として母校からの誘いを受けたときは，チューリヒを離れるか否か迷ったようである．[8] アムステルダムに関しては，後ほど述べる数学基礎論論争の主役の一人で，直観主義陣営のリーダーだったブラウワーの発案だった．[9] またアメリカのコロンビア大学（1927 年），プリンストン大学（1929 年）からも申し出があった．ワイルは異動を固辞してチューリヒでの日常を享受していた．ただ，恩師であるヒルベルトの後任人事だけは断ることができなかった．他者から見れば羨望の的になるような恵まれた研究者生活を送っていたワイルだが，ゲッティンゲンで暮らしは長く続かなかった．ヨーロッパでの日々は，1933 年ナチが政権を奪取したことで終わりを迎える．ワイルは，アメリカに渡ることを決意する．そしてアインシュタインと同じく，プリンストン高等学術研究所に籍を置く．第 2 次世界大戦終了後（1954 年），日本人数学者として初めてフィールズ賞を受賞した小平邦彦（1915-1997）を同研究所に招く功績もあった．この出来事は，湯川秀樹（1907-1981）のノーベル物理学賞受賞と並んで，敗戦後日本が学問的な再建を行なう上で何がしかの契機となったことは間違いない．ワイルは，1951 年に研究所を定年退官して，プリンストンとチューリヒで暮らすことになった．1955 年 12 月 8 日，チューリヒで 70 年の人生を終えた．

4.1.2　ヘルマン・ワイルの数学研究

ワイルの微分方程式論　ワイルの初期の研究は，ヒルベルトの影響の下，積分方程式論，あるいはヒルベルト空間論の応用としての常微分方程式論であった．1910 年の教授資格論文は，その後『マテマーティッシュ・アナーレン』誌に「特異点を持つ常微分方程式と随伴する任意関数の展開について」（Über gewöhenliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen）のタイトルで発表された．[10] ワイルが証明したことは，簡単にまとめよう（原論文と一部記号を替えた）．

---

[8] 最晩年，ワイルはアメリカ移住を経て再びチューリヒに戻った．その際に，以前に暮らしていた当時を回想した一文を記している（「1930 年来のチューリヒを回顧する」（Rückblick auf Zürich aus dem Jahre 1930, 1955 年刊）．それによるとワイルは，ゲッティンゲンからの招致を承諾するか悩み，「街の周りを私の妻とともに数時間ぐるぐると何ブロックか歩き回って，結局湖と電信局へと向かう遅くの路面電車に飛び乗った」．妻にも「受け入れるほかない」と言っていた．しかし「窓口へ行き，断りの電報を打った．帰宅すると，私の妻は当然驚いていた」と思い出を語っている（[Weyl 1968], 4, S. 650）.

[9] [van Dalen 2013], p. 350.

[10] [Weyl 1968], 1, S. 248-297.

いま $p(s)$ を $s \geqq 0$ で定義された連続かつ正値関数とする．また $q(s)$ を任意の $s \geqq 0$ で定義された連続関数とする．このとき線形微分作用素を

$$L(u) \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right) - q(s)u(s) \tag{1}$$

と定義する．ただし，境界条件として以下を設定する．

$$u^{(1)}(0) = 1,\ \left[p(s)\frac{du^{(1)}}{ds}\right]_{s=0} = 0 \tag{2}$$

$$u^{(2)}(0) = 0,\ \left[p(s)\frac{du^{(2)}}{ds}\right]_{s=0} = 1 \tag{3}$$

このとき任意の有限区間において一様収束する級数を利用して，$L(s) \equiv 0$ の解は，

$$u^{(1)}(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \iint \cdots \iint_{(0 \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)} \frac{q(\tau_1)\cdots q(\tau_n)}{p(t_1)\cdots p(t_n)} d\tau_1 dt_1 \cdots d\tau_n dt_n \tag{4}$$

$$u^{(2)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \iint \cdots \iint_{(0 \leqq t \leqq \tau_1 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq \tau_n \leqq t_n \leqq s)} \frac{q(\tau_1)\cdots q(\tau_n)}{p(t)p(t_1)\cdots p(t_n)} dt d\tau_1 dt_1 \cdots d\tau_n dt_n \tag{5}$$

となるが, ここで複素パラメータ λ に対して, 微分方程式 $L(u) + \lambda u = 0$ を同じ境界条件（2），（3）の下で，基本解（4），（5）を保ちつつ，$q(s)$ の代わりに $\lambda - q(s)$ とした，

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right) + (\lambda - q(s))u = 0 \tag{6}$$

に対する解 $u^{(1)}(s;\lambda)$，$u^{(2)}(s;\lambda)$ を，方程式

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dv}{ds}\right) + \lambda v = 0 \text{ の解 } v_j(s;\lambda)\ (j = 1,\ 2)$$

を用いて求める．ただし，任意関数 $q(t)$ は，$\int_0^{\infty} |q(t)| dt < \infty$ を満たすとする．すると，求める解は，

$$u^{(1)}(s;\lambda) = m_{11}(\lambda)v^{(1)}(s;\lambda) + m_{12}(\lambda)v^{(2)}(s;\lambda) + E_1(s;\lambda) \tag{7}$$

$$u^{(2)}(s;\lambda) = m_{21}(\lambda)v^{(1)}(s;\lambda) + m_{22}(\lambda)v^{(2)}(s;\lambda) + E_2(s;\lambda) \tag{8}$$

のように表現できる．ただし，式（7），（8）において，E_1，$\frac{\partial E_1}{\partial s}$，$E_2$，$\frac{\partial E_2}{\partial s}$ は，s が増加するとき 0 に一様に収束する．ここで密度行列として

$$\mathrm{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{m}_{11}(\lambda) & \mathrm{m}_{12}(\lambda) \\ \mathrm{m}_{21}(\lambda) & \mathrm{m}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{9}$$

とすると，行列のそれぞれの要素は λ の連続関数である．こうした解が存在することをワイルは証明した．[11]　その後，ワイルの論文を読んだ小平邦彦は，密度行列 $P(\lambda)$ についてさらに進展をもたらすことに成功した（1949 年発表）．[12]　ワイルの業績が日本の数

学者へ影響をもたらした一つの例である．

ワイルの複素関数論　すでに紹介したが，ワイルは 1913 年に『リーマン面の理念』という著書（初版）を刊行した．その名の通り，リーマン面はリーマン（1826-1866）に由来する事柄である．きちんとした定義は当初与えられず，「（多価）解析関数に付随した平面上に多重に広がった面」といった程度の認識のまま議論が進行していた. クラインにいたって, 等角構造の考えが導入された．[13]　ワイルは自身の著書の中で,「通常のリーマン面は」以下のように理解されているとする．まず z を複素変数，ある複数数の定数 a に対して，$z-a$ の正の整数ベキによって展開された級数,

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \cdots$$

の内，$z = a$ 以外においても収束するものを，a を中心とする関数要素と呼ぶ．その与えられた一つの関数要素から，解析接続によって生じるすべての関数要素の集まりを解析関数という．そして次の性質を持つ関数要素の集合 G を解析形体とする．

1）G に属するどの二つの関数要素も，G に属する関数要素からなる解析連結列によって互いに結ばれる．

2）G のいくつかの関数要素を付け加えて，これを拡大し，拡大された集合がなお 1）の性質を持つようにすることはできない．

そしてリーマン面は，解析形体の各関数要素をそれぞれこの面のただ 1 点によって表現する．その際，この形態の関数要素からなる解析連結列がリーマン面上の連続曲線として現れるようにすること，そのように理解されているとする．そこでこの解析関数と解析形体の関係をさらに深く考察して，より一般的な定義として一歩進めて等角構造を持つ，つまり等角写像によって移される二つのリーマン面を（同じ内的性質を持つものとして）同値扱いし，そのような 2 次元多様体と定義づけした．[14]

『リーマン面の理念』第 2 章は，より具体性のある問題としてディリクレ積分が考察される．ディリクレ積分とは次の式（10）で表されるものをいう．E を直交座標 x, y を持つ，

---

[11] ワイルの初期の微分方程式研究については，［小平他 1985］所収（24-28 頁）の吉田耕作「特異常微分方程式の解による任意函数の表現」が参考になる．

[12] [Kodaira 1975], 1, pp. 251-275)．小平は論文原稿を当時スイスからプリンストンに渡っていたワイルへ送ったところ，すでに同じような結果をティッチュマーシュ（1899-1963）が得ていることを知らせてきた．同時にティッチュマーシュの著書を送付してきて, 加えてアメリカ数学会の年会（1948 年 12 月）で,（その段階で未発表だった）小平の結果を引用してもよいかと許可を求めてきたという．小平は，翌年 1949 年プリリンストン高等学術研究所に招聘され，ワイルと同じ場で研究を行うことになる．その当時を回想して小平は,「先生は極東の無名の数学者に対しても極めて丁重であった」と述べている（「ヘルマン・ワイル先生」,［小平他 1985］，7 頁，［小平 2000］，182f 頁）.

[13] ワイルの『リーマン面の理念』に連なる研究史のコンパクトな記述は，［楠 1973］，1ff 頁，［関口他 2016］所収（15-21 頁）の須川敏幸「ワイルとリーマン面」に相当する記述（16f 頁）に見ることができる．

ユークリッド平面内の有限の範囲に収まる点集合とする．このとき，

$$D_E(u) = \int\int_E \{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\} dxdy \tag{10}$$

これは，等角写像に関して不変である．したがって，連続的で微分可能な関数のディィリクレ積分を平面の中だけでなく，任意のリーマン面上に作ることができる．[15]　そこで，閉リーマン面 F を考える．F 上のいたるところで一価，正則な関数，あるいは調和函数（$\triangle u = 0$）は定数以外に存在しない．しかし F 上に非定数の解析関数として，ある種の特異性を持った調和関数（あるいはポテンシャル関数）を構成することはできる．[16]　この存在をリーマンは，「ディィリクレの原理」を利用して示したのだった．

ワイルによれば，ポテンシャル論とディィリクレ積分との間に次の定理が成り立つ．

定理：v を単位円板 $K : |z| \leqq 1$ の上で連続な，その内部では連続的で微分可能な関数であり，有限なディィリクレ積分

$$D(v) = \int\int_K \{(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2\} dxdy \quad (z = x + iy)$$

を持ち，u は $|z| < 1$ において正則なポテンシャル関数で，$|z| = 1$ の上におけるその境界値は v の境界値に一致するならば，

$$D(u) \leqq D(v) \tag{11}$$

---

[14] [Weyl 1913], S. 1-12, 36f, 邦訳［ワイル 1974］，1-13，40f 頁．なお，解析連結列の定義は，*Ibid*., S. 11, 同邦訳，11f 頁参照．また等角写像とは，二つの与えられたリーマン面 F_1 と F_2 の間の写像によって，F_1 上の任意の 1 点における正則かつ解析的な関数が，写像された後も F_2 上の移った点で正則かつ解析的な関数である場合をいう．文字通り，二つの平面上の写像によって曲線どうしのなす角が保存される 1 対 1 写像をいう（*Ibid*., S. 39f, 同邦訳，44f 頁）．

[15] *Ibid*., S. 78ff, 同邦訳，91ff 頁

[16] 一般に，リーマン面 F 上の実数値関数 $u(p)$ が以下の条件 1）から 3）を満たすとき，F 上で劣調和であるという．

1）$-\infty \leqq u(p) < +\infty$, $p \in F$, $u \not\equiv -\infty$.

2）u は上半連続である．すなわち，F の各点 p で，

$$\overline{\lim_{q \to p}} u(q) \leqq u(p).$$

3）各点 $p \in F$ において，p を中心とする局所円板 U および局所変数 $z = \Phi$ があって，$\Phi(U) = \{|z| < 1\}$ とするとき

$$u(p) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi^{-1}(re^{i\phi}))d\theta$$

がすべての $0 \leqq r < 1$ に対して成立する．

$-v(p)$ が劣調和であるとき，$v(p)$ は優調和という．調和関数は劣調和かつ優調和である．このとき，「閉リーマン面 F 上で劣調和な関数は定数以外に存在しない．特に F 上で一価調和，あるいは正則な関数は定数に限る」という定理が成立する．［楠 1973］，68ff 頁．

その上で，「ディリクレの原理」とは，ディリクレ積分 $D(v)$ に最小値を与える関数 u の存在を主張することである．ワイルの著書では，その後の経緯についてヴァイヤシュトラスのリーマン批判，ヒルベルトによる改良について言及している．[17]　そして，関数 v に関する比較条件を与えつつ，d をすべての比較関数に対するディリクレ積分 $D(v)$ の下限とするとき，$D(u) = d$ という性質を持つ比較関数 u の存在を証明している．[18]　なお，後年ワイルはさらに研究を進め，1940 年に新たな論文「ポテンシャル理論における直交射影の方法」(The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory) を刊行した．そこでは, ディリクレの原理をヒルベルト空間上の直交分解の形に拡張している．[19]　すなわち，リーマン面 F 上の可測な微分形式 $\phi = \phi_1 dx + \phi_2 dy$ で

$$||\phi|| = \int\int_F (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) dxdy$$

が有限なもの全体 L はヒルベルト空間をなす．ワイルはこの L を互いに直交する三つの部分空間に分解する．その一つの部分区間 H は，調和微分からなり，L の元の直交分解における H 成分がディリクレの原理の調和関数に対応する働きをする．[20]　こうしたワイルの成果に対しても，小平邦彦はより進んだ結果を導き出している．[21]　なお小平は，後年自身の論文をめぐって，ワイルの数理哲学に関して興味深い証言をしている．[22]

われわれはワイルの 1913 年の著作『リーマン面の理念』初版について，以上のようにごく簡単にその内容を見た．ワイルは，リーマン面の意義を『リーマン面の理念』の序文で次のように述べている．[23]　これはリーマン面という現代数学において重要な概念に対する見解として引用に値する．

> 今でもなおそこここで，リーマン面は関数の多意性を眼前に描き出し，直観に訴えるための「画像」，(「とても」価値のある，「とても」示唆に富むとつけ加えた上での) 手段以上の何物でもないかのような解釈に出会う. この解釈は根底から間違っている．リーマン面はこの理論に欠くことのできない「実質的な」構成部分であり，そのまま理論の基礎である．それはまた，ア・ポステリオリに多かれ少なかれ技巧

[17] ワイルは,「ディリクレの原理」という呼称自体が適切でないとし,「トムソン（＝ケルヴィン卿)･ディリクレの原理」と称する（[Weyl 1913], S. 84, 93, 邦訳［ワイル 1974］, 97, 107f 頁). ヒルベルトの成果は 1901 年に発表され，論文として「ディリクレの原理について」(Über das Dirichletsche Prinzip）というタイトルで 1904 年に *Mathematische Annalen* 誌に掲載された（[Hilbert 1970], 3, S. 15-37).

[18] [Weyl 1913], S. 100-107, 邦訳［ワイル 1974］, 116-124 頁.

[19] ワイルの直交射影の方法については，［関口他 2016］所収（36-42 頁）の西山亨論文「Weyl の愛した調和解析」における記述（39f 頁）を参照.

[20] [Weyl 1968], 3, S. 758-791. さらに［小平他 1985］, 15-18 頁における楠幸男の論考「ワイルと複素函数論」を参照.

[21] 小平の論文は,「リーマン多様体にける調和関数（一般化されたポテンシャル論)」(Harmonic Fields in Riemannian Manifolds (Generaized Potential Theory)（初出 *Annals of Mathematics*, **50** (1949), pp. 587-665）である（[Kodaira 1975], 1, pp. 172-250).

> 的に解析関数から蒸留された何物かではなく，あくまでもそれ以前のもの，母なる大地，その上にこそ初めて諸関数が生育し，繁茂することができる大地と見なされなければならない.

ワイルは多少文学的なレトリックで，リーマン面の意味を述べる．もちろんこれは「数学の詩人」と称される彼の資質の表れに他ならない．だが，本質を見誤ってはならない．リーマン面の定義は，リーマン以来明確に与えられておらず，分岐点を持ち平面上に重なった面分と捉えられていた．ワイルの著作は，それに対して明確な定義を示した．したがって，複素関数論のある専門家はワイルの『リーマン面の理念』の意義を，図形を具体的に想像して議論を展開していた段階から，この著作を通じて抽象化され，「『ハサミとノリ』の時代は終焉を告げる」と指摘する．加えて，「Weyl は Hilbert による Dirichlet の原理を用いて Riemann 以来の古典論を完全な形で示した．なお同書が現代数学の公理化の先駆けを与えた意義も見逃すことはできない」と評価する．[24] 古典的な理論の趣旨を尊重し，直観を大切に保つ．だがそこに止まらず，さらに向こう側へと進む．抽象化（現代化）によって理論の見通しを良くする. その上で理論の発展の可能性を拡大する作業を行っている．やはりワイルはヒルベルトの弟子であり, 数学者として第一級の人である．ただ，その後ワイルは数学の基礎への関心を高め，その過程の中で数学の有り様についての思索を深める（注（22）におけるワイルの言葉を参照のこと）．この著作『リーマン面の理念』

---

[22] 小平の論考は，ワイルの直交分解という手法に触発されたものであり，小平は当然ワイルからよい評価がもらえるものと予想していた．ところが，ワイル自身が自己の手法をどのように思っていたか，意外な反応があったことを次のように記している.

> 筆者がプリンストンに着いてからしばらくして調和微分形式の論文〔前掲「リーマン多様体･･･」論文〕の別刷ができたので一部差し上げようと思ってワイル先生のオフィスを訪ねた．先生は別刷を手にして嬉しそうニコニコして「直交射影の方法でうまくできましたね」というようなことを言ってほめて下さったが,「しかし私は古い（old-fashioned）かもしれないが直交射影の方法はよくないと思う．君の論文も直交射影の方法を用いない形に書き直した方がよい」と言われた．これには驚いた.〔中略〕直交射影の方法は〔前掲注（20）で言及した 1940 年発表の論文において〕ワイルが発見した方法で，調和微分形式の存在証明には極めて有効である．それをよくないと言われる理由はワイル先生の数学の哲学にあるらしい．数学の基礎に対するワイルの立場が直観主義であるということは聞いていたが，筆者は直観主義といってもそれは数学の基礎について論じる場合の話で，普段数学を研究するときには，われわれ普通の数学者と同じように考えるのであろうと思っていたが，ワイルの直観主義はそんな生半可なものでなかったようである（[小平 2000]，185f 頁）.

ワイルの直観主義は，今回の数学史講義のメインテーマである．この直交射影の方法がワイルの数学の基礎に関する見解，または数学の哲学とどうして相容れないかはこの引用からは明確でない．本稿において次第に明らかになるだろうが，ワイルの直観主義は，単純な一つの信条への固執といった類のものではない．ただ，小平が述べるところは，それを数学の研究の先端にいた若き日本人数学者がどのように見ていたのかがわかり，興味深い発言である.

[23] [Weyl 1913], S. (6f), 邦訳［ワイル 1974]，（9）頁.

[24] 下線は引用者による.［楠 1973]，3 頁.

は，古びることのない「名著」としての評価を得ている．だが，その名声をもたらしている要因は，ワイルの数学への多面的な志向が影響しているのであろう．ワイルは最晩年の1955 年に本文を改訂した第 3 版を刊行している．この著作を，様々な思いを胸に見ていたことの証である．

ワイルのリー群論，表現論　ワイルは 1910 年代に，前述の『リーマン面の理念』，『空間・時間・物質』といった歴史的な名著を出版していた．加えて数学の基礎に関わる著作，例えば『連続体』（『空間・時間・物質』と同じ 1918 年刊行）を公にした．1920 年代になっても数学基礎論に関して活発に，かつラジカルに論陣を張っていく．直観主義の旗印を鮮明にした論文「新たな数学の基礎の危機について」（Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik）は代表的論考である．ワイルの数学の基礎に関わる論考の分析は後程行うとして，驚くべきことに，ワイルは 1920 年代，数学者としてさらなるピークへと上りつめようとしていた．師であるヒルベルトが，時期に応じて研究の対象を截然と分けて取り組んでいたのと対照的である．先端の未解決領域へのチャレンジとともに，同時に数学の基礎の問題についても並行して思索を巡らせていた点が際立っている．

ワイルの 1920 年代の数学的業績で特筆すべきは，リー群と表現論に関してである．日本におけるその分野の専門家であった杉浦光夫（1928-2008）によって，ワイルの研究を歴史的に位置づける作業が行われてきた．杉浦は，ワイルのリー群論や表現論の研究に関して次のように述べている．[25]

> リー群論の研究は，多彩なワイルの仕事の中でも，その内容の豊富さとその後の研究の影響において特に重要なものである．この研究に，ワイルはそれまでの彼の研究を大いに活用し，また他の研究者のすぐれた仕事を吸収して，大きな理論を作った．

実際，ワイルは先の『リーマン面の理念』で導入した大域的な多様体の概念が，リー群の本質的部分であることを明確に意識して利用した．[26]　また「ペーター・ワイルの定理」の名で知られる定理，すなわち，

> コンパクト・リー群 G の既約ユニタリ表現の同値類の完全代表系を $\hat{G}$ とする．$\hat{G}$の各元 π の次元を $\mathrm{d}(\pi)$，行列成分を π_{ij} とし，
>
> $$B = \{\sqrt{d(\pi)}\pi_{ij} \mid \pi \in \widehat{G}, 1 \leqq i, j \leqq d(\pi)\}$$
>
> とおく．このとき B は $L^2(G)$ の完全正規直交系である．

[25]［杉浦 2018］，27 頁．

において，その証明（1927 年発表）に若き日の特異積分方程式の固有値問題の研究を取り入れている．[27]　この定理はいろいろな形に解釈できる．調和解析の立場から，G の既約ユニタリ表現の代表系として，行列表現 π を次のように選ぶ．

$$\pi : G \to U(n) = \{g \in GL(n, C) : g^{*}g = I_n\} \ (I_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列}) \tag{12}$$

そして，$\pi(g) = \pi_{ij}(g)$ と表し，行列成分 π_{ij} を G 上の関数と見るとき，「$L^2(G)$ の正規直交底を与える」という形でとりあえず理解しておきたい．[28]

リー群論の研究はその名の通り，リー（1849-1899）に始まり，キリング（1847-1923），エリー・カルタン（1869-1951），その他の人々によって発展してきた．[29]　杉浦は，その研究史におけるワイルの業績の評価を 10 の項目にまとめているが，その内さらに最重要な部分をいくつか取り出すと次のようになる．[30]

1）リー群を初めて大域的な実解析多様体として捉えた．

---

[26] 今日において, リー群とは以下のように定義される（[杉浦 2000], 17 頁）. $k \in N \cup \{\infty, \omega, \omega\,\omega\}$ とする．集合 G が次の 1)，2)，3) をみたすとき，g を C^k 級リー群という．

1）G は群である．

2）G は C^k 級多様体である．

3）G の群演算は C^k 級写像である．すなわち，$g : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ は $G \times G \to G$ の C^k 級写像である．

なお，C^k 級多様体とは何かをかいつまんで言うと，集合の各点 p に対して，p を含む開集合が，ユークリッド空間の開集合に同相であり，共通部分が空でない二つの局所座標系をとったときにそれと同相なユークリッド空間に C^k 級同相写像が入るものである．ワイルは『リーマン面の理念』の中で，先に注（14）に該当する箇所（[Weyl 1913], S. 12, [ワイル 1974]，13 頁）で，解析形体を「2 次元の多様体として把握しようと意図するならば，われわれはただちに，リーマン-クラインによる表象の仕方の核心に導かれる」としている．また，後の箇所で（*Ibid*., S. 17f, 同邦訳，19 頁），

1）多様体の「点」と見なされるべきものを指示すること，

2）「近傍」の概念を明らかにすること．

これらの 2 点を通じて多様体の定義づけを行っている．

[27] [杉浦 2018]，26 頁．原論文は（ワイルの学生であった F・ペーターとの共著で），「閉連続群の基本表現の完全性」（Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppen）のタイトルで出版された．[Weyl 1968], 3, S. 58-75.

[28] ペーター・ワイルの定理は，より一般的な形で述べると次のようになる．G をコンパクト群とすると，G の任意の既約ユニタリ表現は有限次元である．さらに次の三つの集合，

1）G の有限次元の既約表現の同値類全体,

2）G の有限次元の既約ユニタリ表現の同値類全体,

3）G の既約ユニタリ表現の同値類全体,

は自然に同一視できる，というものである．（[小林・大島 2005]，117 頁によれば「解析学の長い歴史の中で育まれてきた重要な手法，考え方や概念が多く盛り込まれている」という）ペーター・ワイルの定理を様々に解釈することは，[小林・大島 2005]，118-121 頁参照.

[29] リー群の研究史については, [Hawkins 2000] が第一に参照されるべきである．また [杉浦 2018], 1-13 頁, 第 1 章「リーとキリング-カルタンの構造概念」もコンパクトにまとめられていて参考になる．

[30] [杉浦 2018]，27f 頁.

2）連結コンパクト・リー群の構造論を作り，その基本定理を示した（1925-26 年論文第 4 章定理 1，2）．[31]　またその証明の中で「ワイルの積分公式」を示した．[32]

3）連結コンパクト・リー群の表現論を作り，特に既約表現がどれだけあるかを最高ウェイトで定める基本定理を統一的な方法で始めて証明した（1925-26 年論文第 4 章定理 6）．[33]

4）コンパクト・リー群上の調和解析の基本理論を作った（1927 年論文）．

5）複素半単純リー環のコンパクト実形 g_u の存在を一般的に証明し，g_u をリー環とする連結リー群がすべてコンパクトであることを証明し，ユニタリ制限の原理を確立した．これにより複素半単純リー群に関する命題を，そのコンパクト実形の対応する命題に帰着できることを明らかにした．特に複素半単純リー群の完全可約性をこれによって証明した．（1925-26 年論文第 4 章定理 2，3）．[34]

以上に掲げた以外にも大きな貢献がある．特に杉浦によってまとめられた諸項目の中で，1925-26 年に発表された連作論文「線形変換による半単純連続群の表現論」1, 2, 3（Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen，1，2，3）が歴史的に重要であることがわかる．リー群論の形成史を描いたホーキンスも，この 1925-26 年連作論文と 1927 年のペーターとの共著論文の二つは，リー群研究史の中でだけでなく，より一般的に数学史全般において「一つの重要なランドマークをなす」と最大級の評価をしている．[35]

われわれにとって驚嘆すべきことは，こうした数学上の大きな業績を築いていたワイル

---

[31] [Weyl 1968],2, S. 629-632.　現代的な用語でこの基本定理を述べると次のようになる（[杉浦 2018], 24 頁，あるいは [小林・大島 2005], 342 頁）．G を連結コンパクト・リー群, T を極大トーラス部分群（$T = \{diag(t_1, \cdots, t_n) : t_j \in C, |t_j| = 1(1 \leqq j \leqq n)\}(\subset U(n))$）とするとき，

- 定理 1：G の任意の元は，T の元と共役である．すなわち，$G = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$
- 定理 2：G が連結コンパクト半単純リー群ならば，G の基本群 $\pi_1(G)$ は有限群であり，G の普遍被覆群 G^* はコンパクトである．

[32] dg，dt を，それぞれ G，T の正規化されたハール測度とする（すなわち，このとき,「ワイルの積分公式」とは,

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{w}\int_{G/T}\int_T f(gtg^{-1}|D(t)|^2 dtd(gT) \tag{13}$$

が成立することをいう．ただし w はワイル群 $N(T)/T$ の位数（$N(T) = \{g \in G : gTg^{-1} \in T(\forall t \in T)\}$），$|D(t)|^2 = \Pi_{1 \leqq i < j \leqq n}(t_i - t_j)$ である．つまり，dg を式（13）のように T と G/T 上の積分で表すことである．

[33] [Weyl 1968], 2, S. 640.　ユニタリ群 $U(n)$ の有限次元表現 (π, V) に対して，有限集合 $\Delta(V, T) = \{\lambda \in \hat{T} : V_\lambda \neq \{0\}\} \subset \hat{T} \simeq Z^n$ を定める．ただし $\hat{T}$ は，T の既約ユニタリ表現の同値類全体，$V_\lambda = \{v \in V : \pi(v) = \chi_\lambda(t)v\ (\forall t \in V)\}$，$\chi_\lambda$ は $\chi_\lambda : T \to C^\times, t = diag(t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_1^{\alpha 1} t_2^{\alpha 2} \cdots t_n^{\alpha n}$) である．$\Delta(V, T)$ の中で，順序関係を定め，その順序＞に関して最大の元を最高ウエイトと呼ぶ．ワイルの原論文によると，この定理 6 は「カルタンによってすでに証明されている」としている．現在,「カルタン-ワイルの最高ウエイト理論」とも称される（[小林・大島 2005]，359-363，369 頁）．

が，同時期（1926 年）に短期間の集中的な執筆作業を経て，『数学と自然科学の哲学』の独語初版を刊行したことである．後で（4.2.2 項）でふれるように，1910 年代から 20 年代にかけて繰り広げられていた数学の基礎をめぐる論争にワイルも渦中の人として関わっている．師ヒルベルトの形式主義から一定の距離を置いて，ブラウワーの直観主義に共鳴してそちらの方へ急旋回して傾倒していく．次第にブラウワーの思想も相対化されて，独自の境地へと導かれる．『数学と自然科学の哲学』はその後アメリカにわたってから英語版に改訂されるが，自分自身の思考の変化も含めて深い洞察に満ちている．数学の先端における問題解決に業績を残しながら，基礎に関して積極的に発言し，著作を残す見識も持ち合わせた．これがワイルの稀有な才能と研鑽の結果である．ワイルはすでに紹介した（注（5）参照）最晩年の 1954 年，スイス，ローザンヌでの講演「認識と熟慮（ある人生の回顧）」において，この 1920 年代（ワイル自身の 30 代半ばから 40 代半ばにかけて）の状況をある種の感慨とともに回想している．少し長くなるが興味深いので引用しておこう．[36]

> フィヒテとエックハルトを通して刺激された私の形而上学的・宗教的思索は，解決がもたらされるには至りませんでした．それはおそらく事柄の本性の中にあるのでしょう．その後何年か，私は（とりわけ）自分の科学的･哲学的経験に基づいて，学問の方法論を批判的にじっくり考えることに没頭しました．このときになって徹底的にライプニッツに取り組むことがかなり重要になりました．形而上学の高揚の後に，冷静さが戻ってきました．私が哲学者から学んだこと，そして自分自身で考えたことは 1926 年に刊行された『数学と自然科学の哲学』の中に表れています．執筆は，2 ～ 3 週間の休暇を利用して行ないましたが，その前の 1 年間，私は哲学

---

[34] [Weyl 1968], 2, S. 631, 633. 一般にリー環とは，R（または C）上の線形空間 L で，任意の元 X，Y に対して L の元 [X, Y] = XY － Y X を対応させる演算が定義されていて，以下の式（14），（15），（16）が満たされるとき，R（または C）上のリー環という（［小林・大島 2005］，184f 頁）．

$$[X,\ X] = 0, \tag{14}$$

$$[a_1X_1+a_2X_2,\ b_1Y_1b_2Y_2] = \textstyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_ib_j[X_i,\ Y_j](\forall a_j,\ \forall b_j \in R), \tag{15}$$

$$[X,[Y,\ Z]]+[Y,[Z,\ X]]+[Z,[X,\ Y]] = 0\ \text{（ヤコビ律）}. \tag{16}$$

また，自分自身と 0 という自明なイデアル以外のイデアルを持たず可換でないリー環を単純リー環という．さらに, 単純リー環の直和となるリー環を半単純リー環と呼ぶ（*Ibid.*, 186 頁）．加えて, C 上のリー環 g に対して,

$$g_0 + Jg_0 = g,\ g_0 \cap Jg_0 = 0 \tag{17}$$

を満たす R 上の部分リー環 $g_0 \subset g$ を g の実形という．ただし，J は,

$$J^2 = -I\ \text{（}I\text{は恒等写像）},\ [X,\ JY] = J[X,\ Y]\ (\forall X,\ \forall Y \in g). \tag{18}$$

を満たす作用である（*Ibid.*, 242 頁）．

[35] [Hawkins 2000], p. 465. また，［関口他 2016］中の平井武による「ワイルの群論」でも「Weyl の純粋数学における金字塔」と評価されている（［関口他 2016］，51 頁）．

[36] [Weyl 1968], 4, S. 647f, 邦訳［ワイル 2014］，453f 頁（ただし注（5）参照）．

> 書をあくせく読んで，ちょうど蝶が花から別の花へと舞って，各々から蜜を吸おうと努めるように，本の抜き書きに励んでいたのでした．私の認識論的良心は，精密科学の研究で研ぎ澄まされていたので，私たちのような人間が哲学的発言をする勇気を持つことを気楽に許しませんでした．〔中略〕同じ時期に私は，数学の研究でも半単純連続群についての探究で高得点をたたき出しました．これによって私の発展は本質的に終わりを迎えました．他の人にとって同じかどうかわかりませんが，私の人生を振り返ってみると，若い時から大体 35 歳から 40 歳頃までの間は，つねに新たな進展がありました．まだ気づかれずに，じっくりと検討されていない内容へと突き進み, その後に続く円熟期や老年期とは比較にならないくらい豊かでした．

この引用の中で印象的なのは，半単純連続群の業績について自己評価が高いこと，自らのピークと捉えていること．そして，ライプニッツへの関心である．1920 年代の数学の基礎をめぐる論説を通じて，ワイルはブラウワー，ヒルベルト，様々な立場を代表する言説に関わる．ただし，結局は歴史的考察を通してライプニッツの数学に対する理解に共感を寄せるようになる．極論すれば，1920 年代のワイルの知的遍歴は，ライプニッツを見いだす旅でもあったといえる．いまわれわれが見た引用は，本項におけるこの後の分析を先取りした形になっている．ワイルの数学研究として，積分方程式論，リーマン面の研究，さらには杉浦光夫等の論考に依りつつ，リー群論や表現論の業績の要点を簡潔に押さえてきたが，それはこうしたワイルの発言の内実を少しでも理解したいという欲求があったからである．そして次のテーマである数学の基礎をめぐる論争の中で，ワイルの思想的変遷をより的確に捉えたかったからである．

4.2　ワイルと数学の基礎をめぐって

> 数学的精密さがどこにあるのかという問いに対して，二つの派は異なる答え方をする．
> すなわち直観主義者は言う「人間の理性の中に」．形式主義者は言う「紙の上に」．[37]

われわれは前回の数学史講義［林 2020］において，ヒルベルトの形式主義の主張について経過を含めて分析した．ヒルベルトは，デデキント，カントルによって築かれた実数論，

---

[37] [Brouwer 1975]，1, S. 125. 引用した言葉は，ブラウワーが 1912 年 10 月 14 日に行ったアムステルダム大学での就任講演に含まれているもので，翌年英訳され刊行された論文から採った（*ibid*., p. 123 参照）．「直観主義者」，「形式主義者」という用語の指示するところを明確にすると，前者はブラウワーに代表される論者たちを指し，後者はとりわけヒルベルトの発想を支持する者たちを指す．20 世紀初頭の数学基礎論論争の代表的陣営を表すためのある種のレッテルである．ただし，それらの語はヒルベルト以前から存在していた．クラインの 1893 年の講義の中ですでに用いられていたという．ただ, 特に「直観主義」はブラウワーが主張する内容とは異なる（[van Dalen 2013], p. 218, n. 67）．ワイルもここに掲げたブラウワーの有名な言葉を自著『数学と自然科学の哲学』の中で引用している．[Weyl 1949], p. 61, 邦訳［ワイル 1959］，68 頁．

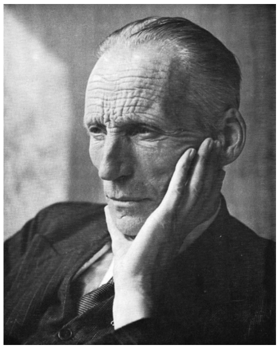

図 2：L. E. J. ブラウワー
（1881-1966）

無限集合論の成果を守るための方策を思案した．多方面から指摘されたパラドックスによる危機を回避するためであった．具体的な目標として，初等数論の無矛盾性の証明に行きついた．数学全般の基礎の安定化のために，通常行われる数学自体を一端意味をはぎ取って，相対化する手続きを考える．すなわち，記号と必要な論理操作と公理の設定によるメタ数学（超数学）という体系に一段階シフトアップする．その上で，その体系の無矛盾性の証明を試みたのだった．

一方，ヒルベルトが国際数学者会議でも提唱したこうした取り組みに対して反発もあった．問題の設定自体に無理がある思う者もあった．ブラウワーがその代表者である．ヒルベルトの形式主義に疑念を持ち，独自の観点から数学の基礎，あるいは無限集合論・実数論を考える立場は，直観主義（Intuitionism）と称される．ブラウワーは今回われわれのテーマにしているヘルマン・ワイルの思想へ大きな影響を与える．[38]　ワイルは 1910 年代の後半から積極的に数学の基礎に関する言説を発表する．ヒルベルト，ブラウワー，ワイル，この三者については，前二者が（良い悪いは別にして）比較的首尾一貫した主張を行っているのに対して，ワイルの立ち位置は変化を伴う．ワイルは思索の深い人である．同時に先に見たように，数学者として先端研究をリードする実践者でもあった．ワイルの数学の基礎をめぐる論考は，こうした背景からブラウワー，ヒルベルト両者の発想との関係，距離感が微妙に変わっていくところに特徴がある．そこでまずわれわれは，ブラウワーの主張の要点を押さえることから始めよう．

4.2.1　ブラウワーの直観主義

ブラウワーは，1907 年アムステルダム大学で博士号を取得する．[39]　それによって学問的キャリアを開始する．『ブラウワー著作集』第 1 巻の冒頭を飾るその論文は，「数学の基礎について」(On the Foundations of Mathematics) というタイトルである．[40]　ブラウワーは数学研究者としてトポロジーやリー群などに業績を作っていくが，当初から数学基礎論にも守備範囲を広げていた．いま，われわれはブラウワーの主張を「直観主義」というカテゴリーに入れている．カントルの無限集合論やラッセル等の論理主義的プログラムに対抗する意識は当初より鮮明であった．だが，やはり最大の論敵はヒルベルトである．［林

---

[38] ブラウワーとワイルとの直接の出会いは，遅くとも 1912 年に遡る．ブラウワーは，1910 年からヒルベルトと書簡を交わしている．翌年になってゲッティンゲンを訪れる機会を持つことができたようである．またその翌年にゲッティンゲンを再度訪れ，その際ワイルとの親交を結ぶ機会ができたようである．[van Dalen 2013], p. 208f.

[39] 図 2 のブラウワーの写真は，[Brouwer 1975], 1 より採った．

[40] [Brouwer 1975], 1, pp. 15-101.

2020］で分析したヒルベルトのプログラムに対して，そもそも「意味を失った数学」は存在に値しないと断じる．意味を伴い，充実させるための数学基礎論，あるいは無限論，実数論の構築をブラウワーは目指したのである．その意味で，形式的論理を過大に利用せずに，むしろ数学的「直観」に一定依拠しながら，数学研究を進めていくこと重んじる立場と言えるだろう．こうした考えは，ブラウワー以前に数学界になかった訳ではない．クロネッカー（カントルの無限集合論を批判した）であれ，ポアンカレ（ヒルベルトの形式主義を批判した）であれ，先駆者はいた．[41] さらに，19 世紀以前にも数学に取り組む人々の間にブラウワーの先駆者の存在は歴史的に遡ることができるだろう．文献上の直観主義者の主張の原形は，アリストテレスに求めることができる．[42] だが，一つの強固な主張として旗印を鮮明にするには，ブラウワーの強烈な個性が必要だった．彼ほど徹底した論者はいない．そこにワイルは一度は強い共感を寄せることになったのである．[43] 現在では，このブラウワーの発想がどのような背景によってもたらされたのか，ファン・ダーレンによる伝記もあり，解明が進んだ．特に言語や記号を忌避するブラウワーの信条がどこに根ざすのか，その点はかなり明らかにされている．[44]

ブラウワー流直観主義の主張　本節のエピグラフとして掲げたブラウワーの言葉は刺激的である．1913 年論文「直観主義と形式主義」（Intuitionism and Formalism）に含まれる（ブラウワーはその前年から母校アムステルダム大学の教壇に立っていた．そして 1951 年まで教授職を全うした）．彼の主張を時間的経過とともにおさえていこう．

ブラウワーは何より直観によって構成される数学的概念の存在と，明示的に構築される数学的内容・意味を重んじた．それを無視して，形式的な体系を考え，その無矛盾性の

[41] 特にフランスの数学者たちには，ブラウワーに類似した直観主義的な発想をする者がいた．ボレル（1871-1956），ルベーグ（1875-1941）などが代表的人物である．こうしたフランスの直観主義者たちについては，[Largeault 1993], chapitre 2 (pp. 37-65) が参考になる．あるいは，「フランス経験主義」というカテゴリーでボレル，ルベーグ等を括りつつ，より数学的観点からまとめたものとして［井関・近藤 1977］，160-171 頁参照．

[42] 本数学史講義第 12 回でカントルの無限集合論が実無限を前提していると述べたとき，対比する議論として，カントルはアリストテレスを意識し，ライプニッツを援用して対抗しようとしていた（［林 2018］，66-70 頁）．アリストテレスは構成的可能無限の立場であったと一応言える（アリストテレスの数学論については，[Cleary 1995] 参照）．それに対して，ライプニッツにはヒルベルトにつながる記号活用の下で，無限小なり，虚量なりといった数学的に新規な事柄を無矛盾性によって存在を正当化する考え，すなわちヒルベルト・プログラムの先駆者（！）という面もあった．ワイルもライプニッツを好んで引用している．ワイルがライプニッツに傾倒したことは，すでに注（36）における引用でも見たが，その内実については，後ほど第 5 章で論じたい．

[43] ワイルは，後で分析する 1921 年刊行の論文「新たな数学の基礎の危機について」では，ブラウワーから受けたインパクトを隠そうとせずに，最大級の言葉で表現する．曰く，「ブラウワー，それは革命である（Brouwer, das ist die Revolution!）」．[Weyl 1968], 2, S. 158.

[44] ファン・ダーレンによるブラウワーの伝記第 1 章，第 2 章は参考になる．特にブラウワー固有の主張の背景を探る第 2 章が「数学と神秘主義」と題されているのは象徴的である．[van Dalen 2013], pp. 1-76.

目標にするような数学基礎論には違和感を覚えていた．ヒルベルトは，1900 年の第 2 回 ICM 講演で「数学の問題」として 23 の問題を掲げ，その第 2 問題（数論の形式的体系の無矛盾性を証明すること）として提起していた．[45] ヒルベルトが，その無矛盾性の保証によって数学が安心感を持って迎えられ，全体として数学的存在が認知されるとしたこととは相反していた．ブラウワーは, その数学の「意味」の構成にとって, 自然数に対する「原直観」に高い地位を与える．そして，自然数の系列から多様な数学的存在が構成し得るとする．1907 年の博士論文の主張の一つである．[46] これはおおむねポアンカレの姿勢とも相通じる．

さらに，この博士論文第 3 章「数学と論理」では，カントル流の無限集合論の重要な成果が批判の俎上に載せられる．とりわけ，超限順序数 ω の系列，

$$\omega,\ \omega+1\,,\ \omega+2\,,\ \cdots,\ 2\omega,\ 2\omega+1\,,\ m\omega+n,\ \cdots,\ \omega^2,\ \cdots$$

さらには，

$$v_0\omega^n + v_1\omega^{n-1} + \ \cdots\ v_{n-1}\omega + v_n,\ \cdots,\ \omega^\omega,\ \cdots$$

と続く無限系列に対して，こうした系列全体を実在物として眼前に把握できるものとして捉えることを批判する．たとえ論理的に無矛盾であったとしても，人間の直観によって構成できるものではないのではないかと疑義を呈するのである．[47] ブラウワーはこの博士論文の中で次のように語っている．[48]

> 数学が物質的世界から完全に独立しているというのは本当である．だが，数学において「存在する」ということは，直観によって構成されることを意味する．そして関連する言語が無矛盾であるかどうかという疑問は，それ自体重要でなく，そればかりか数学的存在に対する一つのテストにもなっていない．

ここにはブラウワーが一貫して主張し続ける発想の原点が述べられている．

無限論が関わる延長上には，ヒルベルト流形式主義において，重要な論理的公理として設定される排中律（ある主張 A に対して，その否定を $\overline{A}$ とするとき，A，またはその否定 $\overline{A}$ のどちらかが成立する）に対して，無制限の運用を認めない姿勢も打ち出す．博士論文の翌年 1908 年に公刊された論文「論理的諸原理の信頼不可能性」（The Unreliability of the Logical Principles）で明らかにされる．ブラウワーは，この排中律（the principium tertii

---

[45]［林 2020］，44-51 頁参照.

[46] 1907 年論文第 1 章「数学の構成」にその内容が詳述されている．[Brouwer 1975], 1, pp. 15-52.

[47] 博士論文第 3 章「数学と論理」全体は，[Brouwer 1975], 1, pp. 72-97. 特にカントルの超限順序数についての言及は，pp. 81f

[48] *Ibid*., p. 96.

exclusi）の正当性の問題は,「解決不可能な数学的問題が存在し得るかどうか」という問題と同等であるとして，ヒルベルトがあくまで問題解決可能性に対する楽観的な期待を終生保持していたことと対峙する．[49] ヒルベルトの信念を向こうに回して, 排中律をめぐって「解決可能でない」問題の具体例を次のように挙げる．[50]

- π の 10 進小数展開で，他のどんな数字よりも多く生じる数字があるのか.
- π の 10 進小数展開で，連続して同じ数字が並ぶような組が無限に多くあるのか.
- 排中律は，数学において例外なく成立するのだろうか.

周知のとおり π は 10 進小数展開を行うと, 循環しない無限小数となる．ここでブラウワーが提起していることは，無限論に関わる事柄である．ただし，無限に続くものを実際に確認することはできない．小数展開における数の発生メカニズムが与えられているわけでもない．これを決定可能とすることができるのだろうか，という主張である．[51]

無限論という観点からブラウワーの主張は, 1913 年論文ではさらに先鋭化する．注 (48) の該当箇所で引用したように，ブラウワーにとって，数学的事柄は形式的に無矛盾でありさえすれば，その存在が保証されるものではない．したがって，カントルの無限集合論において大きな成果であった非可算濃度 $\aleph_1 = \aleph$ = 実数全体の集合の濃度を次のように否定し，可算無限集合の濃度 $\aleph_0$ のみを容認する．[52]

> 形式主義者は,「$\aleph_1$ は $\aleph_0$ よりも大きい」と結論づけるが，この命題は直観主義にとっては無意味である．なぜなら，形式主義者，直観主義者，双方が満足するには，$\aleph_1$ よりも小さい濃度を持ち，$\aleph_0$ よりも大きい濃度を持つと証明される可算無限順序集合を構成することが不可能であると論じることができるからである．形式主義者はこうも結論づける．「$\aleph_1$ は 2 番目に小さい無限順序数である」．これも直観主義者には無意味である．

---

[49] *Ibid*., p. 109. ヒルベルトが 1900 年の第 2 回 ICM 講演にて,「数学には ignorabimus〔われわれは知らないままだろう〕はないのだ」述べていたこと（[林 2020]，49 頁注（64）に該当する引用参照），あるいは後年（1930 年）故郷ケーニヒスベルクで名誉市民を授与された時の講演で述べた言葉（同［林 2020］のエピグラフに掲げた）‘Wir müssen wissen. Wir werden wissen.’（「われわれは知らなければならない．われわれは知るだろう．」）を想起されたい.

[50] [Brouwer 1975], 1, p. 110.

[51] ブラウワーがゲッティンゲンで講演を行ったとき，ある人物が質問に立ち，次のように述べた．「あなたは π を十進法で表した時に 9 が 10 回連続して現れるかどうか，われわれは『知る』ことが不可能であるとおっしゃるのですね．おそらくそれは知り得ないでしょう．ですが神はご存じのはずです」．するとブラウワーは答えた．「私は神との連絡方法を持ち合わせていません」（I do not have a pipeline to God）．[Reid 1970], p. 184, 邦訳［リード 2010］，356 頁.

[52] 下線は引用者による．[Brouwer 1975], 1, p. 133.

同様に「0 と 1 の間の実数」という概念を考えるとき，形式主義者は小数点以下の数の基本列としか捉えない．それに対して，直観主義者は小数点以下の「数の基本列の構成規則であり，有限個の操作手段によって組み立てられるもの」と見なす．したがって，そもそもブラウワーには「『0 と 1 の間にあるすべての実数の集合』，こうした言葉は，直観主義者には意味をなさない」ことになる．[53]　ずらずらと並ぶ数の列ではなく，その列を構成する規則，それ自体が実数であると考えるのである．数学的存在に対する顕著な相違が見いださせるだろう．ただ，一方でわれわれは，「数直線上にすき間なく並んでいる点の一つとして対応する」実数の視覚的イメージを根強く抱いている．デデキントは，実数論の要点に切断の概念を置いた際，その数直線によるイメージに依拠していたし，それを通じて一定の説得力を醸し出してもいた．[54]　よって，ブラウワーが主張する「有限回の操作によって構成される規則」をもって実数とする考えは，素朴なイメージを廃棄させられる分，インパクトがある．ブラウワーの発想はラジカルである．加えて抽象的な言説だけでなく，数学的理論として具体的に有限構成主義の内実を明確にしていく．

ブラウワーの生成的選択系列，実数論　ブラウワーが 1918 年から翌年にかけて公表した論文「論理学的排中律に依拠しない集合論の基礎づけ」（Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischem Satz vom ausgeschlossenen Dritten）は，第 1 部「一般集合論」，第 2 部「点集合論」となっていて，カントルの 1883 年の無限集合論に関わる論文を意識しているかのようである．ただ，カントルが実数全体という集合を始めとして，無限集合に対してその全体を把握可能としているのに対して，ブラウワーは内包的性質によって無限集合を「一つの全体」と捉えることを認めない立場を鮮明にしている．そこで，自然数列のみをあらかじめ設定し，いわば「下から」無限集合を組み上げて構成する規則を明示する．ブラウワーは，「集合論は，記号の無限系列を基礎に置き，最初の諸記号とそれらの記号から次のものを導く規則とによって定められる．このために役立つ様々な法則の中には，数複合体 1, 2, 3, 4, 5, · · · の列 ζ を発生させる最もふさわしいものが現れることになる」と述べている．[55]

1920 年代に入ると，次第に集合を要素の集まりと見なすことから離れていく．上のような自然数の系列からスタートしていくことに変わりない．加えて，一歩一歩自由に選択する行為により物の集まりが創造される．そのように強調される．つねに生成状態にある「生成的選択系列」（werdende Wahlfolge）自体が連続体，または変数を表すと主張するようになる．すなわちそうした外延的全体として連続体を捉える立場である．このブラウワー

---

[53] *Ibid*., p. 133f.

[54]［林 2017］，44-54 頁参照．現在の解析学の代表的なテキストにおいても，デデキント流の切断概念は実数論の基本設定としてしばしば用いられている（例えば，［小平 2003］，1，9-21 頁）．当然それは，ヴィジュアルな表象の助けを借りつつ，論理的整合性も備えていると見なされているからである．

[55] [Brouwer 1975], 1, p. 150.

の発想にワイルは,「すべての自然数ではなく,すべての実数,すなわち実数のすべての値に関する主張が果たして成立するのか？」と疑問を投げかけている.数学の主張が「任意の実変数に対して,云々」という形をとることが多いことに対する懸念である.ワイル自身の解釈によれば,単なる自然数の系列から意味が転じて,つねに生成状態にある（in statu nescendi）系列（すなわち生成的選択系列）が連続体,あるいは実数全体を表す.こうした一定の法則によって無限に至るまで規定された生成系列がある一点に達した時に,肯定・否定のどちらかを決定することを許すような,そうした性質だけが数学的に意味を持つことになる,と先の疑問に対して自答する.[56] カントルの無限集合論が素朴な面を持っていることは確かである.だが,ブラウワー（あるいはワイルの解釈）は,かなり狭く数学的命題の持つ意味充実性を限定してしまうようにも見える.こうした点は,積極的に数学的問題の解決に心血を注ぐヒルベルトの陣営（あるいは大多数の数学者たち）からすると,極端に「息苦しさ」を覚えたはずである.[57]

ブラウワーの 1920 年代の諸論文は,数学の基礎（＝集合論,実数論）のみならず,既成の数学的成果を直観主義的観点から再構成したものが多く出版される.関数論(1923 年,1924 年,1927 年),[58] 代数学の基本定理の証明（1924 年),[59] 次元の概念（1926 年),[60] ハイネ・ボレルの定理の直観主義的形態（1926 年),[61] 等々が次々と発表される.こうした文脈の中で,いわば集大成として公刊されたのが,1930 年論文「連続体の構造」(Die Struktur des Kontinuums）である.

この論考は,まず 1920 年代に数学の基礎をめぐる異なる主張がぶつかり合った経緯をもとに,歴史的総括がなされる.ブラウワーによれば,数論上の連続体,あるいは幾何学的連続体は,古代から認識されている.ただし,19 世紀後半に至るまで正確な内容の把握にはつながらなかった.だが,その 19 世紀後半になり連続体の議論を深めるのに次の三つの事柄が貢献したという.[62]

1）非ユークリッド幾何学の進展に伴い,ユークリッド幾何学における（平面上の,あるいは空間上の）連続性,および数論におけるアルキメデス流の連続体の解釈が相

---

[56] [Weyl 1949], p. 52, 邦訳［ワイル 1959］, 57f 頁.

[57] 前回の数学史講義［林 2020］で,ヒルベルトが 1928 年論文で展開していた直観主義批判を紹介した.ヒルベルトは,ブラウワーの主張する排中律の限定使用を,「天文学者に望遠鏡を」,「ボクサーに握りこぶしを」使うなと言うようなものだと述べていた.それほど排中律は不可欠な論理的公理であり,数学的成果を犠牲にしてまで,「主義に殉じる」のは愚かな情熱であると,ヒルベルトとしては嘆くほかなかった.［林 2020］, 59 頁注（85）参照.

[58] [Brouwer 1975], 1, pp. 246-267, 268-274, 298ff, 390-405.

[59] *Ibid*., pp. 283-290, 291-294.

[60] *Ibid*., pp. 341-349.

[61] *Ibid*., pp. 350f.

[62] *Ibid*., pp. 430f.

対化されたこと.

2）カントルの無限集合論において，連続体が直観とは異なりつつも論理的操作に基づいて構成されたこと.

3）公理的方法論が幾何学の基礎において一定の成功を収めたことで，数論上の連続体においても同様な成功が期待されたこと.

ブラウワーの把握は正当であろう．ブラウワーのラジカルな主張は，決して無知のなせる業ではない．その点は，評価されるべきである．そしていま述べた状況下で，連続体を考察する次の二つの方法論が明確になったという．[63]

1）形式主義的方法（デデキント，ペアノ，ラッセル，ツェルメロ，ヒルベルト等による）.

2）旧直観主義的方法（ポアンカレ，ボレル等による）.

旧直観主義者は先に掲げた三つの歴史的進展を拒む．そして，自然数の理論のみを（カント流の）総合的ア・プリオリな判断として受け入れる．ブラウワーの共感はそうした点にある．ブラウワーは，「旧直観主義者の方法は，形式主義者の方法に比して，理論的な論理学に信を置くことがより大きな役割を果たしている」とする．なぜなら，形式主義者は，少なくとも全論理法則を彼らの言語的探究の領域に引きずり込むのに対して，そうした法則を適用する際に，ある種の注意を払うことに気づいているからであると指摘している．[64]　だが，自己の立場から旧直観主義者へも次の三つの批判を浴びせる．[65]

1）旧直観主義者は，連続体の定義で「超可算多」（überabzählbarviele）を作ることはしないが,「可算で尽きることのない多くの」（abzählbarumfertigviele）要素を作ることにしている．それは数学の外にある論理学の創造的な力を退けている.

2）「種（Spezies）の種」として有理数の部分種（Teilspezies）と一体となったものを連続体の定義とするのでは根拠が乏しい．[66]　排中律の原理を用いずに，（実数の連続体に必須の項目である）上界（oberen Grenze）の存在を示しきれていない.

3）デデキントの切断による連続体の定義と収束する基礎列と一体となった連続体の定義とが，直観主義的基礎に照らして同等ではない.

2）で収束基礎列と関連して，ブラウワーは自己の「生成的選択系列」による例を挙げている.

---

[63] *Ibid*., pp. 431.

[64] *Ibid*.

[65] *Ibid*., pp. 431f.

[66] ブラウワーは，ある時期から集合（Menge）という語を用いず，「種」（Spezies）という語で物の集まりを表現していた.

すなわち，λ_f を「逃げていく性質 f の解消数」（Lösungszahl einer fliehenden Eigenschaft f）とする．[67]　このとき列 $\{a_n\}$ に対して, その列の無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ を考える．ただし，

$$a_1 = 1\ ,\ a_{\nu+1} = \frac{1}{2}a_\nu\ (\nu \neq \lambda_f),\ a_{\nu+1} = 1\ (\nu = \lambda_f)$$

と定める．そして n が，$r < a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ が成り立つように定められるとき有理数 r を考えると，こうした有理数 r の「種」は，あきらかに上界を持たないという．

ブラウワーは，形式主義者，旧直観主義者に受け入れられている連続体における次の一般的，基礎的性質 1）から 7)，すなわち，

- 1）離散性，2）順序性，3）自己稠密性（Die Insichdichtheit），4）分離性，5）連結性，6）汎稠密性（Die überalldichtheit），7）コンパクト性.

を直観主義的観点から見直す．少し具体的に例を見よう．まず 2）の順序性について．ブラウワーによれば形式主義者や半直観主義者の間では，ある種（＝集合）が「順序づけられる」とは，任意の要素の組（a, b）に対して，何らかの順序関係 $a < b$（$b > a$ と同値）が以下のように定められている場合をいう．

- a と b が相等であるとは，$a < b$，$a > b$ がともに矛盾することと同値である．
- 関係 $a < b$，$a > b$ は互いに排反的であることをもとに定められる．
- $a \neq b$ とは，$a < b$ または $a > b$ が成り立つこととする．
- $a < b$，かつ $b < c \Rightarrow a < c$ が成り立つ．
- $a < b$，かつ $a = h$，$b = k \Rightarrow h < k$.

これに対して，直観主義的連続体ではそのように順序づけられないことが，収束列 $c_1, c_2, \cdots$ で決定される要素 p に対して示されるという．すなわち，c_1 を零点とし，任意の自然数 ν に対して，$c_{\nu+1} = c_\nu$ と続けていく．ただし，例外を一つ設け，以下のように定める．

$$\text{ある逃げていく性質} f \text{の解消点} \lambda_f \text{が見いだされる} \Rightarrow c_\nu = -2^{-\nu-1}$$

[67] ブラウワーは 1929 年論文「数学, 科学, 言語」（Mathematik, Wissenschaft, Sprache）で, ここに登場する「逃げていく性質 f」とその「解消数 λ_f」を定義づけている．前者は，その性質を持つ特定の自然数を定めることはできないとしても，さらにあらゆる自然数に対してその性質の矛盾性を証明することもできないとしても，定められた各々の自然数に対してその存在を示すか，あるいは矛盾を導くことができるような性質を指す．また後者は，その逃げていく性質 f を持つ（仮定される）最小の自然数のことを言う．ここでブラウワーは，（可算濃度を持つ）自然数列の存在を認めた上で，そこから組み立てられる数学的性質のみを問題に対象にしようとしている．[Brouwer 1975], 1, p. 425.

$$\text{ある逃げていく性質} f \text{の矛盾性の証明が見いだされる} \Rightarrow c_v = 2^{-v-1}$$

すると，列 $\{c_v\}$ によるこの要素 p は 0 と異なっている．だが，0 よりも大きくもなければ小さくもない．[68]

また 7）のコンパクト性については，通常「区間の入れ子」（Intervallschachtelung），すなわち閉区間の列 I_1, $I_2 \cdots$（ただし，任意の v に対して，$I_{v+1} \subset I_v$ となっている）があるとき，すべての I_v に共通する要素が一つ存在すると定義されるのに対して，やはり直観主義的観点から反例が提示される．いま λ_f を逃げていく性質 f の偶奇自由消失数（die Lösungszahl der paritätsfreien fliehenden Eigenschft f）とする．

$$v < \lambda_f \Rightarrow \mathrm{I}_v = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$$

$$\lambda_f \text{が奇数}, v \geqq \lambda_f \Rightarrow I_v = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}),\ \lambda_f \text{が偶数}, v \geqq \lambda_f \Rightarrow I_v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

以上のように定めると，開区間の列 I_1, $I_2 \cdots$（ただし，任意の v に対して，$I_{v+1} \subset I_v$ となっている）があるが, すべての I_v に共通する要素は存在しない．ブラウワーは代替案として，連続体の「仮順序」（virtuelle Ordnung）を提案して独自の実数論を築こうとする．[69] カントル，デデキント流の実数論が連続濃度を持つ無限集合の総体を（数直線上の点集合として）把握可能とする点に困難を見いだして，自然数列の選択によって実数と同一視する試みを示している．ただ，少し議論がスムースに行かない恨みはいかんともしがたい．

このように選択的生成系列による構成によって，ブラウワーは連続体の既定の性質を無制限に認めず保留する．形式主義の対比で見ると，自然数列の存在をベースにして連続体を組み上げていく様子は明瞭にわかる．全体としてブラウワーの議論は，形式主義に対する批判は非常に鋭く，無限集合を安易に把握したつもりになることや，排中律のような基本的論理規則を無限の場面で適用することに一定の歯止めをかけるべく進めようとしている．その点は理解できる．だが，オルターナティヴを提示して説得力に富んでいるかと言えば疑問符が付く．余りにも実数論が息苦しいものになってしまうように誰もが感じるだろう．ワイルは，『数学と自然科学の哲学』の中でブラウワーの直観主義的数学を次のように論評した．[70]

> 数学はブラウワーとともに最高度の直観的明瞭性を獲得する．以前になされたよりもはるかに密接に直観との接触をつねに保ちつつ，一つの自然な仕方で解析学の

---

[68] *Ibid*., p. 434ff

[69] *Ibid*., p. 440.

[70] [Weyl 1949], p. 54, 邦訳［ワイル 1959］，60 頁

> 始まりを展開することに成功した．しかしながら，より高くより一般的な理論へと進む場合，古典論理学の簡単な原則が適用できないことが，結局はほとんど堪えられないほどのやりにくさにつながってしまうのは否定できない．そして数学者は，ブラウワーがコンクリートブロックで築いたと信じた彼の高くそびえる大建造物の大部分が，目の前で霧の中に薄れていくのを心を痛めながら見つめるのである．

こうしたワイルの評価は，一朝一夕に得られたものでない．ワイル自身が 1910 年代から数学の基礎に関して様々な試行錯誤を重ねてきた結果として達した境地である．そこに至るまでは，ヒルベルトの形式主義から離れ，ブラウワーに接近し，そしてまたそこからも一定の距離をとるというプロセスがある．ブラウワーの議論を一応押えたところで次項では，いよいよそのワイルの数学の基礎をめぐる言説の分析に取りかかろう．

4.2.2　ワイルの数学の基礎をめぐる論考（1910 年代から 1940 年代まで）

1910 年代以降の数学の基礎をめぐる論争の中で，ヘルマン・ワイルの主張はいくつかの段階を経て変化が見られる．次のようにそれらは分類できるだろう．[71]

1）教授資格授与ともに基礎的な事柄にも関心を寄せた段階（ツェルメロの選択公理と集合論の公理化に関わる），
2）『連続体』の刊行（1918 年）と同時に，既存の無限集合論，実数論を批判的に乗り越えようとした段階．同時にフッサールの哲学的思索の影響を色濃く残した段階，
3）ブラウワーの直観主義に共感を寄せ，ヒルベルトの形式主義と距離を置こうとした段階（1921 年頃），
4）ブラウワーの直観主義に対しても相対化する立場に転じた段階（1925 年頃），
5）ゲーデルの不完全性定理の発表（1931 年）以降，論争全体を独自の視点から一定の距離感をもって総括し，なお懐疑を深めた段階．

以上の内，われわれが興味を持つのは，やはり 2）から 5）の段階である．時期的には，主としてワイルが最充実期にあったチューリヒ時代，あるいは第 2 次大戦後から晩年に属している．2)から 5)のそれぞれの段階から代表的な論考を俎上にのせよう．2)は『連続体: 解析学の基礎についての批判的考察』の要点を分析しよう．また 3）の段階は，1921 年論文「数学の基礎の新たな危機について」を取り上げる．また, 4）の段階は, 1925 年論文「数学における今日の認識状況」（Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik）に注目する．加えて『数学と自然科学の哲学』初版（1926 年刊）が出ていることから，その著作にも目を向けたい．そして最後の段階は，1946 年論文「数学と論理：『バートランド・ラッセル

---

[71] [Mancosu 1998], pp. 65f 参照.

の哲学』批評への序文として提供する簡潔な報告」（Mathematics and Logic: A Brief Survey Serving as a Preface to a Review of ‘The Philosophy of Bertrand Russell’）とやはり『数学と自然科学の哲学』英語増補版（1949 年刊行）である．それぞれの時期におけるワイルの状況も合わせて確認しつつ，ワイルの発想の理解を深めていきたい．

『連続体』（1918 年刊）における反復原理，自然数論，実数論　『連続体：解析学の基礎についての批判的研究』という著作は，その副題が示すように解析学の基礎，すなわち集合，数（自然数，有理数，実数），関数，連続性といった基本的事項に対する「批判的研究」である. ここでは内容を逐語的に追究することは避ける. われわれに必要なポイントに絞って論じていきたい．[72]

序文のメッセージは，次のように一定のインパクトを伴なったものになっている．[73]

> 解析学の建物が築かれている「堅固な岩盤」を形式主義の意味で木組みの構造で覆って，読者やついには自分自身にも，これが真の土台になると信じ込ませることが，以下の著作にとって問題なのではない．ここではむしろ，その建物が本質的な部分で砂上の楼閣となっているという考えを主張している. この定まらない土台は，信頼できる強度を持つ支えで置き換えることができると私は信じる．しかしそれは今日一般に安全であると考えられているものすべてを支えるわけではない．

根源的な主張が展開される予感がする文面である．ワイルの認識は，カントル，デデキント，ヒルベルトの進んできた道を単純に継承することでないことは明らかである．もちろん，すでに数学的なパラドックスが提起され，素朴な集合概念に基づいた基礎論が不十分であることは多く人々に認識されている段階に来ているので当然と言える．ただ，ワイルにユニークなことは，数学研究者と先端の活動を行いつつ，数学としての理論構成を目指しながらも，なおその枠内にとどまっていないことである．『連続体』の序文では，「哲学的な問いかけも避けられなかった」と述べている．[74]　実際，ここでワイルが言及しているのは，フレーゲ『算術の基本法則』（*Grundgesetze der Arithmetik*，1893 年刊），フッサール『論理学研究』（*Logische Untersuchungen*，第 2 版（1913 年刊）)，『イデーン』（*Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, 第 1 巻, 1913 年刊）である．とりわけ後者のフッサール（1859-1938）が当時刊行したばかりの著作から受けた影響は，

---

[72] この『連続体』を詳細に論じ，かつ現代的な数学基礎論の知見をもとに，ワイルの議論をすくい上げようと試みているのは，フェファーマン論文「正当性を立証されたワイル：『連続体』70 年後」（Weyl Vindicated: Das Kontinuum Seventy Years Later, [Feferman 1998], pp. 249-283）である．われわれも適宜その論文を参照していく．

[73] [Weyl 1918], S.（3）, 邦訳［ワイル 2016］,（7）頁.

[74] *Ibid*., p. (4), 同邦訳,（8）頁.

ワイルの思考の特徴づけとして見逃せない. 特にフッサールの後半生において獲得した「現象学的還元」(phänomenologische Reduktion) という方法論がワイルにも少なからず刻まれていることは重要である．[75]　今の段階では，この興味深い問題があることを指摘するにとどめて，また他日を期して論じたいと思う．[76]

『連続体』第 1 章は,「集合と関数(数学的概念形成の分析)」と題されている．論理と集合を扱うが，無限集合論のパラドクスにふれている．そして数学における理想元の導入について述べられている．この第 1 章で特に注目すべき事柄は,「反復の原理」(Prinzip der Iteration) と自然数論である．第 1 章第 5 節でワイルは，自然数と呼ばれる「理想的対象物」のカテゴリーを考える．すなわち，二つの自然数 x，y の間に「y が x のすぐ次に来るもの」$F(x, y)$ という関係を設定する．そして,

- 数 1 が存在する,
- 各数 x に対して F (x, y) を成り立たせるような y が存在する．

こうした完全帰納法による定義(「反復原理」の言い換え) を通して，自然数全体が与えられると考える．そして数学の各分野において,

1) ある仮定された操作領域が基礎となる (何らかの数学的対象物のカテゴリーが一つ

---

[75]「現象学的還元」という方法論は，フッサールが 1907 年にゲッティンゲン大学で行った講義の中で明らかにしたものである．後に『現象学の理念』(Die Idee der Phänomenologie) というタイトルで公刊された．現象学的還元の意味する内容は，以下の通りである ([フッサール 1965]，1f，16 頁).

> 現象学的還元とは，一切の超越者 (私に内在的に与えられていないもの) に無効の符号をつけるものであり，すなわちその超越者の実在と妥当性をそのまま定立しないで，せいぜい妥当現象として定立することである．たとえば一切の心理学や自然科学など，あらゆる科学を私はただ現象として利用し得るに過ぎず，したがってそれらを私にとって〔認識批判学の〕手がかりとなり得る妥当的真理の体系としては，また前提としては，仮説としてでさえも，利用してはならないのである．

さらにこの態度は「エポケー (判断停止)」=「括弧に入れる」という姿勢にもつながっていく．フッサールは『現象学の理念』の講演から 6 年後, 代表作の一つ『イデーン』第 1 巻を刊行する．その中で，この点について次のように述べている ([フッサール 1979-1984]，1-1，250 頁).

> われわれがさらに詳しく熟考してみると，ある種の前提の下でならば，形式論理学やしたがって形式的学のすべての諸学科 (代数学，数論，多様体論等々) を「括弧」の中に入れ得る可能性が，帰結してくるのである．〔中略〕形式論理学と全普遍学一般とを，したがってわれわれは，表立って遮断するエポケーの中に，取り込んでしまうことができるのであり，われわれは，われわれが現象学者としてしたがおうとする次のような規範の正当性を確信することができるのである．すなわち，われわれが意識そのものに即して，純粋に内在において，自ら本質上明白に洞察し得るようにさせる事柄以外の，いかなる事柄も要求しないということである．

「括弧に入れる」という行為が, 既存学問の根本に対して問いを投げかける際に支えとなる発想であったことは確かであり，一つの「武器」となったのだろう．

ある），

2）自然数全体と自然数とを結びつける関係 F が付随する（「絶対的操作領域」と呼ぶ），

3）この組み合わされた操作領域の上に，反復する数学的過程により，集合や機能的関係性から新たな理想的対象物の領域が構築される

こうした特徴づけが行われる．[77]　ワイルは第 1 章の結語の箇所で，こうした記述を受けて次のように述べている．[78]

私はもともとは，デデキント，カントルの理論の基礎が厳密で，かつ完全に形作

---

[76] このワイルとフッサールとの関係については，すでに多くのことが論じられている．ワイルにとって，フッサールは講義に出席したことのある哲学上の師であるという以上の人物である．1908 年，ワイルがゲッティンゲン大学で博士論文の審査を受ける際，フッサールが審査委員長を務めている（[佐々木 2001]，123 頁）．またワイルは最初の妻ヘレーネ（1893 年生まれ）と 1913 年に結婚しているが，彼女はフッサールの弟子で, 現象学を専攻した経歴を持つ（同，124 頁）．そのフッサールの数学論について，またはワイルとの関連について論じた文献としては，［佐々木 1995］，（下），第 5 章第 3 節「数学基礎論争と哲学者たち」中の「1　現象学的数学論 – エトムント・フッサール」（同書，166-213 頁），［鈴木 2013］, [Tieszen 1989], さらには [Tieszen 2005] 所収の論文「ワイルの数学的構成主義の哲学的背景」（The Philosophical Background of Weyl's Mathematical Constructivism, pp. 248-275）を挙げることができる．

さらに，フッサールの『イデーン』あるいは現象学的還元という方法論との関連では，『連続体』と同じ年に初版が刊行された『空間・時間・物質』の中にも以下のような興味深い記述がある．ワイルは，参照すべき文献としてはっきりフッサールの『イデーン』を明示している（[Weyl 1923], S. 4, 325, 邦訳［ワイル 2007］，（上），26f 頁，（下），251 頁）．

> 世界の諸々の出来事を，私によって作られた意識の遊戯とする見解が素朴な実在論に比べてより高い真理を保つとは，私は決して思わない．にもかかわらず，逆に次のことは大切である．すなわち，意識が与えられるということは，実在が置かれていることの意味と正当性とを絶対的なやり方で把握するためにわれわれが並ばなければならない出発点であると理解することである．〔中略〕「純粋な意識」は，哲学的なア・プリオリの居場所である．これに対して実在の主張を哲学的に解明するには，次のことを明らかにしなければならないし，また明らかにするであろう．すなわち，いかなる知覚，またはいかなる記憶，等々というような経験的行為も，これらの中で私は実在を把握するとはいえ，なんであれ知覚された対象の存在を，または知覚されたままの状態を保つことを書き添えることの最終的な正当性を与えることはないということである．〔中略〕実在するものの本質には，その内容をくみ尽くせないという性質がある．

ここで引用した『空間・時間・物質』という著作は，当時の最先端の理論であった一般相対性理論を通じて物理学の根本をなす枠組みの本質を明らかにしようとする意図がある．同時に先の注（75）に見られるようなフッサールの思想を通じて獲得した哲学的な視点を，このようにワイルは惜しげもなく投入し，自己の作品に深みと広がりを与えている．

[77] [Weyl 1918], S. 17f, 邦訳［ワイル 2016］，26f 頁．第 1 章第 7 節では，「反復原理」は，代入原理に続き定式化される．すなわち，関係 $R(x\,x'\,|X)$ が与えられるとする．ただし，その空位の箇所は従属な x, x' と独立な X との二つのグループに分けられる．R から引き起こされる関係を $\Psi(x)$ と表す．このとき，

$$R_{n+1}\,(x\,x'|\,X\,) = R_n\,(x\,x'|\,\Psi(X\,))$$

というある種の行程の抽象的な図式として表現される（*Ibid*., S. 26f, 同邦訳，37ff 頁）．

[78] *Ibid*., S. 36f, 同邦訳，50f 頁．

られていたツェルメロの集合論の公理から出発した.〔中略〕〔『連続体』において設定した〕これらの原理を集合構築の公理として定式化し，そして公理系に含まれる構成原理の有限回適用によって作ることのできる集合以外には存在しないという要請を表明した上で，しかもこれを「自然数の概念を前提せずに」行うことの試みを繰り返すうちに，最終的な成果が得られないまま，どんどん複雑な定式化に陥ってしまった.〔中略〕「反復の概念，自然数列の表象が，最終的な数学的思考の基礎」となる（ポアンカレとは，哲学的な立場でそれ以外にはほとんど分かち合うものがないにもかかわらず彼の立場と一致する）との強い確信に達したのだった.

ここでワイルが言及する「ツェルメロの集合論の公理系」とは，彼が 1908 年論文で選択公理の導入も含めて定式化した内容を指すと考えられる.[79] また全自然数列の概念が数学的思考の基礎にあるという判断は，翌年の 1919 年論文「今日における解析学の基礎づけの中にある循環論法」（Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis）でも，「反復という直観に支えられて，われわれは自然数の概念が外延的に限定された（umfangs-definiert）と確信する」と明確に表明される.[80] ここでワイルが数学という学問を一定程度相対化して公理化する作業は，ヒルベルトの形式主義の思想からも受け継いでいることがわかる.一方で，ブラウワーの考えへの親和性も感じられる.それはポアンカレ（ブラウワーが自身の先行者と見なしていた）との一致点を見いだしているところからも明らかである（ヒルベルトもブラウワー，ワイル等の批判を受けて 1920 年代には次第に有限主義を標榜するようになっていくが）.ワイルのブラウワーへの傾倒へは，何かの一押しがあれば実現するところまで来ている.

第 2 章は，「数の概念と連続体（無限小計算の基礎）」というタイトルで，この著作の主題が扱われる.自然数論を経て有理数，実数へと数の拡張作業が行われる.実数が導入されるにあたって，デデキントの切断の手法が用いられる.ただデデキントと異なり，ワイルは有理数全体をア・プリオリに認めるのではなく，自然数からの構成原理を掲げて，それによって組み上げている.その点は注目に値する.[81] その際，実数値関数の連続性などの基本性質（中間値の定理，最大値・最小値の存在，等々）が証明される.この書物の副題が「解析学の基礎についての批判的研究」とあるので，その点では，本質的な項目に入った訳である.だが，ワイルはそうした全体の論点の中で，「直観的な連続体」と数学的な連続体との差異を述べている.その点が特徴的である.特にこの箇所はフッサールの

---

[79] ツェルメロの集合論の公理系と彼の 1908 年論文については，［林 2017］，74-78 頁で分析を試みたので参照のこと.

[80] [Weyl 1968], 2, S. 43f. またこの 1919 年論文では，直観に基づく認識論に関してフィヒテ（注（36）の引用文中にもその名が挙げられていた）やフッサール『論理学研究』第 2 版（1913 年刊）について言及されている.

[81] [Weyl 1918], S. 51, 邦訳［ワイル 2016］，68 頁.同頁おける訳者注（132）も参照のこと.

哲学的思索の影響を色濃く残している．

ワイルは第 2 章第 6 節「直観的な，そして数学的な連続体」と題された箇所の冒頭で，いままでの議論を振り返りながら「われわれは立ち止まって，一体どこに位置しているのかについて，われわれ自身に釈明を試みたい」とする．[82]　ワイルは「直観的に与えられた連続体と数概念との関係をよりよく理解するために」，「最も基本的な連続体」として時間を例に取る．ただし，ここで言うのは「（客観的時間に対する）『現象学的時間』（die phänomenale Zeit）」のことである．数学的概念（実数論）と関連づけて，まず一点としての「現在」を取ること，その可能性が措定される．その上で，異なる 2 点，すなわち二つの時点（Zeitpunkt）A，B（A が B よりも前，あるいは，B が A よりも後という 2 項関係が入る）と時間区間 AB が定まる．そして他の時間間隔 A′ B′ に対して，関係「AB と A′ B′ は等しい」を導入する．この基礎の上に数学的時間論を構築するという．[83]　とはいえ，単純に「数直線上に実数が連続的に存在する」というデデキントが 1872 論文「連続性と無理数」の中で述べていたのと類比されるべきイメージに還元できない側面が時間にはある．[84]　ワイルは以下のように指摘する．[85]

1）時間の中の個別の各点は独立していない．いわば，純粋の無であり通過点としてのみ存在していて，それを数学的に表現することができない．
2）ある特定の時点を示すことができない．つねに「確定的」でなく，「近似的」にしか固定が可能でない．それは時間の本質に基づいている．

これら 1)，2）について，ワイルは直接フッサール『イデーン』第 1 巻〔第三篇第 2 章「純粋意識の一般的構造」〕第 81，82 節への参照を求めている．フッサールの論は直接ワイルの議論に影を落としている．[86]　実数全体の集合と同様，時間全体もある種の直観的連

---

[82] *Ibid*., S. 65, 同邦訳，85 頁.
[83] *Ibid*., S. 67, 同邦訳，87 頁.
[84] デデキント，1872 年論文における有理数と実数の関係，切断概念の導入，直線の連続性の公理，そうした事柄については，［林 2017］，43-52 頁参照.
[85] [Weyl 1918], S. 70, 邦訳［ワイル 2016］，90 頁.
[86] フッサールが該当箇所（［フッサール 1979-1984］，1-2，75-81 頁）で展開した議論を要約すると，次のようになる．フッサールは，「現象学的時間」（＝一つの体験流における諸体験の統一的な形式）と「客観的な時間」（「宇宙的時間」と言い換えられる）とを区別する．フッサールによれば，宇宙的時間の現象学的時間に対する関係は，次のアナロジーが成立する．すわなち，ある具体的感覚内容（例えば，視覚的感覚与件の領野における視覚的感覚内容）の内在的本質に属する「拡がり」が客観的空間的な延長に対する関係と同じである．その上で，「顕在的な今」は，一つの点のようなものである．それ自身はつねに新しい質料を受け容れるための変わることのない形式に他ならない．ところが，どんな体験の今も必然的にそれ以前の地平を持っている（過去把握との関連）．すなわち，今の意識には，必然的にたった今過ぎ去ったものの意識が結びつくが，この後者の意識は，それ自身が再び一つの「今」に他ならない．こうして我々は時間的な体験統一の流れの全体（＝連続体！）を手に入れることになる．

続体と捉えることには，違和感はないかもしれない．だが，合致するものではなく，大きな相違を抱えている．ワイルは言う．「直観的な連続体と数学的連続体とは互いに一致しない．それらの間には，深い溝が堅固に存在している」．[87] それでも，時間論，あるいは同様に空間論という，カント『純粋理性批判』のいわゆるア・プリオリに直観的存在する対象に対して，「独立した数学的・公理論的学問として」（als selbständige mathematische-axiomatische Wissenschaft），その範疇に構築したいのならば次のことに留意すべきことになる．[88]

1）各々の点を示すことは不可能であり，各点は個別のものではなく，その性質によって特徴づけられない．
2）連続性公理は，単位区間 *DE* に対して，任意の点 *P* に実数が座標として対応し，また逆も成り立つように形作られなければならない．
3）自然数を基礎とする観点より．より高いレヴェルの出発点を設定したいという新たに起こる誘惑に打ち克たなければならない．

3）は付記して，通常の解析学（＝微分積分学）こそが，連続体の理論として役に立つものであるとしている．

こうして見ると，数学的実数論の公理的構成は，物理的直観的連続体に対してそぐわない面がある．ただ，ヒルベルトのように数学内部で無限集合論と関連する実数論を公理論的に追究して，他の合理的根拠をひとまずわきに置くということは，一つの立場としてあり得ることである．この『連続体』という著作は，序文のラジカルな雰囲気に比して，本文の内容構成は，基本的にはそのヒルベルト流の姿勢を保っている．とはいえ，いま引用したように，ワイルはフッサールの哲学を梃子にそうした立場を相対化する視点も備えている．むしろ（時間のような）直観に支えられた連続体の異なる様相に照らして，数学に（先の 3）の観点のように）「自然数を基礎とする観点より．より高いレヴェルの出発点を設定したいという新たに起こる誘惑に打ち克たなければならない」とする方向へのかじ取りも示唆されている．ヒルベルトの提唱する公理系の無矛盾性によって数学的存在が保証されるというような考え方には鋭く対立する．これが 1918 年の著作『連続体』におけるワイルの数学上の「分岐点」である．この『連続体』という著作は，ワイルが数学の基礎について本格的に取り組んだものである．数学研究に供するために実数という連続体の性質を公理的に構築しようと試みつつ，ある面では 1920 年代初めにワイルがブラウワーに傾倒する予兆を感じさせる面を備えている．ワイルの二面性は，いろいろな変遷を経てなお一貫していくものである．ただ本項の冒頭でも述べたように，同時に注（76），（86）に

---

[87] [Weyl 1918], S. 70f, 邦訳［ワイル 2016］，91 頁．
[88] *Ibid*., S. 71f, 同邦訳，92f 頁．

も記したように，フッサール哲学のラジカルに思考する側面を栄養分として吸収してもいた．ワイルは 1920 年代初頭，数学思想的にヒルベルトから離れ，急速にブラウワーに傾倒し，そして次第に距離をとるようになっていく．それは，ワイルの数学者としての矜持と数理哲学の研究がもたらす必然であったと考えられる．次にその時期の代表的論考を分析しよう．

ブラウワーへの接近：1921 年論文「数学の基礎の新たな危機について」 ワイルの 1921 年論文，「数学の基礎の新たな危機について」は，1919 年にワイルがブラウワーに直接面会し，数学の基礎をめぐって議論を重ねたことに端を発している．また，ワイルはホームグラウンドであるチューリヒ連邦工科大学で同じ年にその問題について講義を行っている．こうしたことが論文公刊への契機になったことは間違いない．1920 年 5 月にワイルはブラウワーに向けて論文の写しを添えて書簡を送った．その論文は「プロパガンダ・パンフレット」であると自ら称している．ブラウワーは，ワイルが自分の陣営に馳せ参じたことを歓迎したに違いない．[89]

ワイルの論文は,「プロパガンダ･パンフレット」と自称するだけあって, いささか気負った，大げさな表現で次のように始まる．[90]

> 集合論の二律背反は，数学的帝国（mathematische Reich）の遠く離れた地域だけに関係する通常の境界争いであるとみなされていて，帝国それ自体やその本来の中核的領域の内的強固さや確実性を危うくすることはどのようにしてもあり得ないようなものである．しかしながら，この平和破壊について，（それを否認したり，調整したりする目的で）しかるべき側から公表された説明は，ほとんどすべて完全に解き明かされた証拠から生まれた明らかに自分自身に基づく確信といった性格を持つものではなく，政治的，哲学的思考に極めて頻繁にみられる半分から四分の三までの誠実さを備えた自己欺瞞といった種類の企ての一部をなしている．

いかにも終結したばかりの第一次世界大戦の状況と，その後のドイツ帝国の崩壊の様子を背景にしたものであることは疑いない．最晩年（1955 年），ワイルはこの論文に「補遺」をつけた．この論文が記された背景について，「これらの〔1921 年論文の〕記述を，私はただ若干の躊躇を伴って承認する．その所々で本当に大言壮語的なスタイルは，激動の時代，すなわち第一次世界大戦直後の時代の気分を反映している」と自ら認めている．[91]

さて，この論文は 1918 年の著作に引き続き，連続体論，すなわち実数論を論じ

---

[89] [van Dalen 2013], p. 310f.
[90] [Weyl 1968], 2, S. 143.
[91] *Ibid*., S. 179.

る．論文の前半第 1 部は，「連続体の原子論的な把握」（Die atomistische Auffassung des Kontinuums）と題され，後半第 2 部はブラウワー流につながる「自由生成の媒体」としての連続体について述べられている．対比のために前半から気になる箇所を引用しておくと次のような部分が目を引く．[92]

> 定義された有理数の特性は，（それが同一の切断という性質に関わる限りにおいて）実数に相応している．われわれがそうした方法で概念を構成する場合にのみ，その外延は定まり，限定され，実数に関する存在の問いは意味を手に入れる．この概念の制限を通じて，個別化された点の集まりは，いわば連続体の流れるかゆ状のもの（fliessender Brei des Kontinuums）から取り出されるのである．連続体は，孤立した要素にばらばらにされ，そのあらゆる部分の互いどうしへの流れは，これら孤立した要素間の「より大きいとかより小さい」といった関係に基づいて，ある概念的関係に置き換わる．だからこそ私は，一つの「連続体の原始論的な把握」について話すのである．

デデキントの切断による実数の定義は，有理数の存在を前提にした上で行われる．[93] 連続体を原始論的にばらばらに解体する捉え方を「かゆ状の流れ」とたとえるのは妙である．デデキント流の数直線上に連続的に存在する実数を，稠密であるものの不連続な有理数によって根拠づけることに一定の合理性を認める．ただ，ワイルの本心はもはや別のところにある．実数の構成に別のやり方があると考えている．すなわち，第 2 部は「自由生成媒体としての連続体」（Das Kontinuum als Medium freien Werdens）と題して異なる論点をもたそうとしていくのである．

1921 年論文第 2 部は，まさしく注（43）で述べたブラウワーへの共感が示される箇所である．数理哲学上の理解を端的な言葉で標語とする．ワイルは「ブラウワーがしばしば言うように」として，次のように断じる．[94]

> 数学は教説であるというよりも行為である（Die Mathematik ist mehr ein Tun denn eine Lehre）．

これは実数を有理数全体の存在を前提に公理的に定める方法（一つの「教説」である）に満足せずに，4.2.1 項で見た生成的選択系列を通じて構成していく手法へのシンパシーを端的に表現している．

---

[92] *Ibid*., S. 149.
[93] デデキントの「切断」による実数の定義と実数の性質については，［林 2017］，44-54 頁参照．
[94] [Weyl 1968], 2, S. 157.

結局のところ，ワイルにとってブラウワー流の実数論の何がそれほどまでに惹きつけることになったのであろうか．佐々木力は，ブラウワーが「十九世紀数学（あるいは広く，近代数学）において一般的であった，数学的存在の実在を素朴に認容する姿勢に批判的であったから」ではないかと推察している．[95] 一つの根拠として頷けるものではある．数学者の大勢は，デデキント，カントルの流れにある実数論，無限集合論の成果を支持して，たとえ予想もしなかったパラドックスや選択公理の導入の必要性を生んだとしても，数学的成果が生まれていくことに支障なければよいとしていた．ヒルベルトの問題認識は，いかにそうした数学の基礎を支える理論を正当化し，支障を降り除くかという点にあった．ヒルベルトが 1925 年論文「無限について」の中で述べた言葉，「カントルがわれわれのために作り上げくれた楽園から，何人もわれわれを追放できるはずがない」を想起されたい．[96] ヒルベルトのように数学の基礎に関心を持つ者の多くは，ある種の数理哲学的省察に関して保守的な態度を保っていたのだろう．それに対して，ワイルはより広い素養と深い洞察を備え，大きく路線を乗り換えるメンタリティを備えていた．数学的理論の意味充実性にこだわる気落ちが強かったと考えられる．そこにブラウワーのラジカルな思考が合致したのではないかと思われる．ただし，ワイルは一方で，生産的数学者として（少なくとも 1920 年代までは）活動してきた一面も持つ．自己の数学的創造のために十分な理由づけを探すならば，その都合のよい正当化を合理的に追求する側面もあり得るだろう．したがって，ブラウワーの考えが「身動きが取りにくい」ならば，自然と距離を隔てることになっていくだろう．同じこのブラウワーの発想を肯定的に捉える 1921 年論文の第 2 部の中にさえ，そうした要素は現れている．ブラウワーが制限する排中律（数学的論証に不可欠な論法だった）の一般的妥当性に関連して，次のように述べている．[97]

> ブラウワーは，排中律という論理的公理の否認へと，われわれがいままで論じてきたよりもなお本質的に幅広く進んで行く．彼は「数列」についての存在定理だけでなく，自然「数」自体の存在定理に対して，その妥当性に異を唱える．E を自然数の領域における意味充実な性質（sinnvoll Eigenschaft）とし，*n* が何らかの数であるとするとき，E がその数 *n* で認められるかどうか，それ自体は定まっているとするならば，ブラウワーによると，その性質 E を持つ数があるかという問いは，数列の場合と類似している．〔中略〕ブラウワーは，こうした存在の問いが「決定される」ものだと信じることは,何の根拠もないとする見解を正当化する．すなわち，彼によれば，排中律の妥当性の証明は，任意の性質 E に対する何らかの意味での存在問題を論理的に決定づけることを導くような方法を申し立てることの中になけ

[95]［佐々木 1995］,（下）, 124 頁.
[96]［林 2020］, 63f 頁参照.
[97] [Weyl 1968], 2, S. 155f.

> ればならない．周知のとおりこうした立場は，クロネッカーによって最初に主張された．〔中略〕重要なことは，われわれが定まった手段，例えば形式論理学の推論によって，問題を決定できるかどうかでなく，「問題自身がどのような事情にあるのか」（wie die Sache an sich verhält）ということである．すなわち，数の領域における意味充実的な性質 E に対して，E を満たす数が存在するのか否かが，つねにそれ自体確定しているという「その」流儀で，自然数列やそれに関連する存在概念が数学の基礎になっていることが大事なのである．

ブラウワーが排中律の無制限な使用を制限するという主張を行うことに対して，ワイルがフッサール哲学を背景に一定の相対化をしているのが窺えるだろう．キーワードは「意味充実」である．[98]

数学という活動が円滑に進むことも大事なのである．ヒルベルトは，1928 年論文「数学の基礎」の中で，排中律の使用制限に対して，数学者から排中律を奪うのは，「あたかも天文学者から望遠鏡を，ボクサーに握りこぶしの使用を禁じるようなものである」と述べていた．[99]　ワイルはヒルベルトと歩調を一にはしないが，かと言ってブラウワーの極端さにも同調していない．その視座を確保する上で，ワイルはフッサールからの影響を隠さない．ブラウワーの実数論構成に大いに示唆されたとしても，少し距離をとる．さらに

---

[98] ワイルに影響を与えたフッサールの「意味充実」概念であるが，フッサール自身の定義づけは『論理学研究』第 2 巻に現れる．フッサールによれば, 次の通りである（[Husserl 1992], 3, S. 75, 邦訳［フッサール 1968-1976］，2，80 頁）．

> 記号的－算術的思考と計算の領域での操作は，無意味的な記号（bedeutungslosen Zeichen）によって行われるのではない．つまり算術的な意味によって根源的で生気を与える記号の代理をするのは，一切の意味をはく奪された物理的記号という意味での「単なる」記号ではなく，むしろ算術的に意味のある記号の代理をするのは，何らかの操作意味，あるいはゲーム意味（Operations- oder Spielbeduetung）と解された記号である．

数学における記号の使用は，何らかの数学上の操作やルール（定義・公理・公準によって規定された論理的枠組）に基づき意味が付与される行為によって根拠づけられる．より一般的には，表現と対象との関係が次のように当該の用語が示される．

> 対象に対する表現の関係が，単なる意味〔Sinn oder Bedeutung ＝表現を表現たらしめる心的体験の全体〕志向に留まる限り，その関係はまだ実現されていない．例えば,「名辞」は対象を「思念する」限り，いかなる場合にもその対象を命名している．しかし対象が直観的に現存していない場合，したがって命名されたものとしても（すなわち思念されたものとしても）現存していない場合には，ただ単なる思念に終わってしまう．最初は「空虚な」意味志向が充実されることによって対象に対する関係が実現されるのであり，命名は名辞と命名されたものとの間の実際に意識された関係となるのである．

このように，意味を求める行為を意味付与作用（bedeutungverleihende Akte），また意味志向（Bedeutungsintentionen）という．そして，その志向が，何等か適切に確証されて満たされることを意味充実作用（bedeutungerfüllende Akte）と呼んでいる（*Ibid*., S. 44f, 同邦訳，48f 頁）．

[99]［林 2020］，59 頁注（85）参照．

少し時期を経て『数学と自然科学の哲学』では，一般的な観点において数学という学問の形式的，論理的「鋳型」について言及することになるが，そこでも純粋数学の理論的基盤に関わりフッサールの『論理学研究』第 1 巻の内容の参照を求めている．[100]　フッサールがワイルにとって知的支えになってきたことは，今までも確認してきた．それは，たとえブラウワーへの共感を述べたとしても, すぐに相対化することへ結びつける役割をする．われわれは注（70）に該当する箇所で，ワイルが述べていたことに突き当たる．[101]　とはいえ，その『数学と自然科学の哲学』におけるコメントの境地に行きつく前に確認すべき経緯がある．それを次に見よう．

独自の立ち位置へ：1925 年論文「数学における今日の認識状況」，『数学と自然科学の哲学』　1925 年論文「数学における今日の認識状況」（以下では「今日の認識状況」と略す），1926 年初版（独語版）『数学と自然科学の哲学』は，ワイルが独自の立場を固めた論考・著作である．[102]　ヒルベルトの形式主義，ブラウワーの直観主義，それぞれに対して距離を置きながら, 数学の基礎を論じる態度が鮮明になってくる．論文「今日の認識状況」は，それまでの論文や著作の中で表明されていたフッサールの哲学に依拠した視点に加えて，歴史的総括を組み合わせる．ギリシアの無限論（アナクサゴラス）からワイルにとっての近過去（カントル，デデキント）の業績に対するまとめが行われる．特定の哲学的認識論の言説に依拠するのではなく，無限論をめぐる長い歴史的な背景の探ることで，数学の基礎に関わる同時代の論争の淵源を見いだそうと取り組む．その結果，論争におけるいくつ

---

[100] [Weyl 1949], pp. 25ff, 邦訳 [ワイル 1959]，28ff 頁.

[101] フッサール自体は，『論理学研究』（第 1 巻初版 1900 年刊）以来，1930 年代初頭まで続く数学の基礎をめぐる論争に特定の立場からコミットした訳ではない．鈴木俊洋は，フッサールの哲学を「形式主義と直観主義の対立についても，フッサールの数学論が深く関係するのは，ヴァイアーシュトラウス・プログラムの古典的数学を踏襲し，実践的数学者たちの主潮流となった形式主義の方である．しかし，フッサールは形式主義の後ろ盾となる哲学基盤を提供したわけではない．フッサールがしようとしたのは，形式主義の（あるいは厳密には「公理的手法」の）方法論的成功を認めながら，その未熟な数学観を補い，形式主義の暴走（論理法則を自動的定理導出装置として使う暴走）を「監視」するような哲学を作ることだった．そして実際には，その哲学は逆にブラウワーの直観主義の哲学的後ろ盾として機能することになる」と位置づける．加えて，「フッサールの数学論上の立場を一言で表現すれば，それは『数学者への信頼にもとづく非修正主義をともなった直観主義』ということができるだろう」と述べている（[鈴木 2013]，225f 頁）．ヒルベルトの試みが，論理法則を「自動的定理導出装置」として用いることだったかどうかは疑問の余地はある．だが，鈴木が指摘するこうしたフッサールのスタンスが，ワイルに感知されて，独自の立場を保つことに支えになったのは確かであろう．

[102] われわれが『数学と自然科学の哲学』に関して依拠するテキストは，[Weyl 1949]，あるいは邦訳［ワイル 1959］である．1949 年に出版された英語版は，世界大戦前に刊行された版の増補改訂版であり，内容的に異なる部分がある．しかし，変更箇所については明示されていて（[Weyl 1949], pp. (15)f, 邦訳［ワイル 1959］，（3）ff 頁），相対論や量子力学に関わる箇所は大きな変更を伴っている．われわれが問題にしている数学の基礎に関する考察については，依拠する文献の記述は考えを異にせず，1926 年段階の見解としてみなしてもよいとだろう．

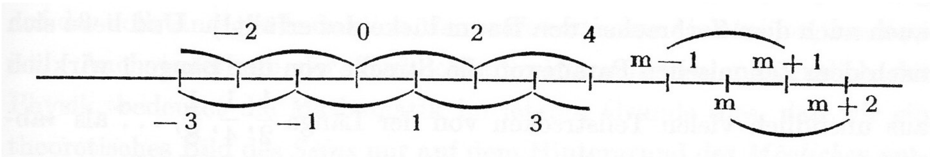

図 3：実数の構成

かの立場は，ある意味で過去に表明されたいくつかの論をよみがえらせたものと捉えている．ラッセルの論理主義，ヒルベルトの形式主義，ブラウワーの直観主義とそれぞれの主張が相対化されていくのである．やはり数学に限らず，多くの論争にしばしば見られるように，次第に各々の主張が混合，中和されて「何々主義」は薄まっていくことが多い．そうした過程は，ワイル自身の数学の基礎に対する理解と表明される立場の変化につながっていくということだろう．こうした作業は，翌年に刊行される『数学と自然科学の哲学』の中で，そのまま同じ議論が繰り返されたり，さらに論点を整理する形で引き継がれていくことになる．

1925 年論文は，今も述べたように実数論（連続体論），すなわち無限概念を把握しようと多くの人々がどのように取り組んだのかについて歴史的考察から入る．中でもその論文第 1 節で，アリストテレス『自然学』第 8 巻第 8 章におけるいわゆるゼノンのパラドックス（例えば，「アキレスは亀に追いつかない」＝無限に多く分割される部分を有限の時間で通過することはできない）に対するアリストテレス流の解答を紹介している点は注意を引く．[103]　連続的な距離（直線（線分）によって表現される）を 2 分割する行為を考えたとき，仮にその直線がある原子のような最小単位からなるとすると，分割はその最小構成要素にも及ぶ．最小であるものがさらに分割されてしまうことになる．したがって，このような分割を実無限の立場から認めるならば, 距離も運動も連続ではなくなってしまう．ここにパラドックスの生じる原因があるとするのである．つまり，連続体に対する無限 2 分割は，あくまでも可能性の中で保証されるのみであるとするのがアリストテレスの論である．[104]

連続体を独自に構想してきたのがブラウワーである．その実数の構成について，実数をその全体が確定したものと見るのではなく，「区間の長さが 0 に収束する互いの中へ入れ子になった有理数の区間の無限列」をもとに考える．そのために今，m をあらゆる整数値をとり得るとして，h 番目の近似段階を表示するため $\frac{m-1}{2^h}$，$\frac{m+1}{2^h}$ という二つの分数を両端とする区間を設定する．特定の m を固定するとき，図 3 は $h = 0$ の場合を表示する．h

[103] [Weyl 1968], 2, S. 512.

[104] アリストテレス『自然学』第 8 巻第 8 章における，ゼノンのパラドックスに対するアリストテレス流の解答を提示した該当箇所は，［アリストテレス 2017］，427-441 頁．

$= 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ と増加していくと，区間は前の段階の区間に含まれつつ縮小する無限列が形成される．こうして「無限において外から定められた個々の区間の列が, そのとき『個別の実数』を生み出し, 一方で自由選択列は『連続体』を生み出す」．ワイルはブラウワーの（自由生成選択系列による）実数構成の方法とアリストテレスとの類比を見いだしている．[105]

本数学史講義第 12 回［林 2018］で取り上げたカントルの無限集合論において，彼の 1883 年論文の中でアリストテレスの無限論を批判していたことと対照的である．[106] すなわち，この 19 世紀後半にカントル（あるいはデデキント）によって創始された無限集合論とそれに基づく実数論と，それに端を発する数学基礎論論争は，ある意味で古代ギリシアの原子論（実無限）と可能無限との間に生じた存在論的相異と対比されるものである．その対比もふまえた上で，ブラウワーの方法論は，魅力的だったが，数学の諸問題を解決する現場において動きが取りにくいというネガティヴな面を持っていた．ワイルは，それを十分に認識していた．われわれは，この 1925 年論文が出るのと同時に，4.1.2 項で 1925-26 年の連作論文「線形変換による半単純連続群の表現論」1，2，3 という偉大なる成果を上げていたことを見た．ワイルの数学的創造性がピークに達していたことが，アクティブな数学者としての研究実践に照らした見解をも生んだのだろう．ブラウワーの実数構成の方法論は明瞭である．反面，解析学が展開される場面では，実数全体が集合として把握される必要性にも直面する．そうした理由で，数学を形成する土台としてブラウワーの実数論, 連続体形成論は採用しづらいことも確かである．ワイルのブラウワー評価は『数学と自然科学の哲学』の中で記されるものが著名で，注（70）の該当箇所ですでに引用した．1925 年論文でも同じような評価が下されている．[107] ワイルは師ヒルベルトが，たとえ素朴な集合概念ゆえにパラドックスをひき起こしたとしても，カントル，デデキントによる実数論を守ろうと，数学の形式化とその無矛盾性の証明を与えようと試みたことに今一度思いを寄せたのかもしれない.

一方で，歴史的考察の中で，近世の 17 世紀以降に発展した無限小解析学（微分積分学）へもゼノンのパラドックスが影響を及ぼしていると見る（「認識論的観念論の基礎づけにおいて決定的な役割を果たしている」とワイルは述べる）．そこでライプニッツの名が言及される．ライプニッツは「連続体の迷宮」から脱出しようと試みるために，時間や空

---

[105] [Weyl 1968], 2, S. 531f.

[106]［林 2018］，56f 頁参照．カントルが 1883 年論文で直接言及したのは，アリストテレス『形而上学』第 11 巻の議論である．それは，『自然学』第 3 巻で表明された（第 8 巻と同様に）実無限を否定する無限論の抄録であったことを想起されたい.

[107] ワイルはブラウワーについて，次のように述べる.

> 数学はブラウワーとともに最高度の直観的明晰さを獲得する．彼の教説は，数学において最後まで考え抜かれた観念論である．しかし数学者たちは，彼の高くそびえる理論の大部分が霧に消失してしまうのを痛みとともに見つめるのである（[Weyl 1968], 2, S. 533f.）.

間を「現象の秩序」と理解しようとしたこと紹介している．[108] 加えて，数学の発展において古代ギリシアのユークリッド『原論』に代表される（無理量を含んだ）量の理論（『原論』第 5 巻で展開される）についてふれ，直線（線分）によって表現される量に対して連続的な分割可能性を数学的理論として，ある種の厳密性を備えて整備したとする．[109] 17 世紀におけるニュートンやライプニッツの理論は基本的にはその『原論』の枠組を踏襲する．ニュートンは時間の流れという連続量を通じて，比の極限過程において無限小計算を導入する．またライプニッツは，もう少しあいまいな哲学的文脈において，無限小を実際に存在するものでなく，合理性を備え基礎づけられた有効な存在と捉える．いずれにせよ微分積分学が建設される場面では，実無限の観点は排除されているとワイルは総括している．[110] ここでワイルがライプニッツに言及することはとりわけ重要である．そして，この 1925 年論文以上に翌年刊行された著作『数学と自然科学の哲学』では，ライプニッツはさらにクロース・アップされることになる．ライプニッツは，記号表現によって数学的対象として存在論から解放し，議論の無矛盾性をもって合理性を確保するという認識論への転換を試みようとした先駆者である．[111] ワイルがライプニッツを引用することは，また第 5 章で「中間考察」としてあらためて深く考察するが，いずれにせよ，ブラウワーを現実的観点から一定程度遠ざけ，ヒルベルトの形式主義に何らかの正当性を与えるにあたって，そのライプニッツの議論が援用できるのではないか，数学にとって有益ではないかという見地に傾いていった可能性がある．

以上のような文脈を押さえた上で，1925 年論文の第 5 節「ヒルベルトの記号数学」を見ると興味深い記述に出会う．例えば，次のようなものである．[112]

---

[108] *Ibid*., S. 513.

[109] ユークリッド『原論』第 5 巻における量の理論（比例論）については，［ユークリッド 2008］，140-156 頁の斎藤憲による解説が参考になる．また本数学史講義第 2 回では，一つのケーススタディとして，『原論』第 5 巻命題 16 を取り上げたので参照のこと（［林 2008］，46f 頁）．

[110] [Weyl 1968], 2, S. 514f.

[111] ライプニッツは，無限小を *dx*，あるいはさらにその微分を *ddx* という記号で表現した．これらは決して 0 に確定した量ではない．$x : dx = dx : ddx$ といった比例関係によってユークリッド『原論』第 5 巻の枠組に収まるものとされる（1695 年論文，[Leibniz 1849-1863], 5, S. 325）．数学的対象として，実在性を確かに実感できるものというよりも，既成のパラダイムとして機能している『原論』第 5 巻の比例論にかなっているという事を根拠に，ある種の合理性を備えたとして，存在を認知しようとする．ライプニッツは無限小を「うまく基礎づけられた作り物」（fictions bien fondées）と考えるべきとする（ヴァリニョン宛書簡（1702 年 6 月 20 日付），[Leibniz 1849-1863], 4, S. 110）．すなわち，一定の合理性と数学的議論の中で無矛盾に議論が進行するという有効性を保持することを重んじる．こうした発想は，3 次方程式の解の公式（カルダーノの公式）を通じて，実数解が得られる場合にも虚数を通過しなければならないことに対して，そうした虚数が線分で表現できる量ではないにせよ，やはり一定の合理性を持った有用物として許容するのと類似している．同時代人たちにそうした考えがどれほど受け入れられたかは別にして，時代を飛び越えて，ヒルベルトの形式主義に通じるアイデアであったことは確かである．ライプニッツの無限小，虚数についての独特な捉え方については，［林 2003］，74-84，181-188 頁参照のこと．

〔数学，物理学のような〕理論の中では，「自らの影を越えよう」とし，与えられたものの素材を置き去りにし，超越的なものを表現しようとする意識が働く．しかし自明なことであるが，これは「記号」においてのみである．〔中略〕ここでわれわれに残されているのは，記号的構成だけである．

記号による内容構成に対して何らかの見解を持つことが，数学の基礎を論じる際に避けて通れないことをワイルは明示する．そうすると，ヒルベルトの数学の形式化とその形式化された公理的体系の無矛盾性の証明という目標が単なる「紙の上」に存在する試みとばかり言えない重要性を帯びてくる．さらに現実に起きている現象を解明する物理学と対比させて，ワイルは次のように述べて，1925 年論文を締めくくっている．[113]

もしヒルベルトが，単なる式のゲームを実行しているではないとすると，ブラウワー流の直観数学とは対照的な理論的なものを望むことになるだろう．ただ，そうした記号そのものが注意を向ける，信念によって支えられたあちら側の世界とはどこにあるのだろうか（Aber wo ist jenes vom Glauben getragene Jenseits, auf das sich ihre Symbole richten?）．もし私が数学と物理学とを完全に混合させてしまうのではなく，また数，関数，等々（あるいはヒルベルト流の記号）といった数学的概念が，エネルギー，重力，電子，等々のように，実在する世界の理論的構成と同じやり方で一般的に関わると想定するのでないのならば，私にはわからない．〔中略〕ただ，ブラウワー流のほかに, ヒルベルト流の道も追究しなければならない．というのも，われわれの中で, 単なる現象的立場からまったく理解できないというものではない，超越的なものを記号的に表現することへと向かう創造意欲が求める，理論的必要が生きているのは否定できないからである．

ワイルは，直観を伴って数学的対象が意味充実することを必要条件とするブラウワー（あるいはフッサール）の考え方を依然捨てていない．その一方で，記号表現による理論は，ある種の「信念」に基づいて肯定的に捉えられる．だからこそ形式化された体系の無矛盾性を担保にして，数学の理論構成を違う角度から保証しようという目論見にも一定の理解が示される．[114]　これがワイルの着地点だったのかもしれない．ヒルベルト, ブラウワー，またはその周辺の人たちの中では，互いが主張を譲らないまま，数学基礎礎論論争はなおも続いていく．だが，ワイルは数学者としての創造的活動と並行しながら，この論争に対

---

[112] [Weyl 1968], 2, S. 540f. ほぼ同一の記述が『数学と自然科学の哲学』の中にも見いだせる（[Weyl 1949], pp. 66, 邦訳［ワイル 1959］，73 頁）．
[113] [Weyl 1968], 2, S. 541f.
[114] [Tieszen 2005], p. 273.

して，広く主張を理解しつつも穏当な見識を示したことになると言えるのではないだろうか．

ワイルが 1910 年代からたどった道のりをわれわれは確認してきた．ワイルは歴史的発展を振り返る中で，ライプニッツを見いだし，そこにシンパシーを寄せる．またワイルとライプニッツについては，第 5 章で，『数学と自然科学の哲学』の記述をベースに分析を試みる．ワイルの数学の基礎をめぐる論考の分析として，最後に第 2 次世界大戦後 1946 年の論文を取り上げよう．1931 年にゲーデルの不完全性定理の証明が公表され，数学界に一定のインパクトがもたらされた．またワイル自身がアメリカに渡り，活動の場をヨーロッパから隔てて一定の時間を経た時期の論文である．様々なことを客観化できる段階に至ったことをふまえて見ていこう．

論争の総括：1946 年論文「数学と論理」 ワイルの 1946 年論文は，論文集『バートランド・ラッセルの哲学』への書評として書かれたものである．数学の基礎をめぐる論争の一つの立場として，フレーゲ，ラッセル等の論理主義がある．数学の基礎を論理学に還元しようとする試みである．われわれは必ずしも十分な注意を払ってはこなかったが，本数学史講義第 13 回［林 2020］でヒルベルトが 1920 年前後の取り組みの中で，数学を論理算（Logik-Kalkül）に帰着させようとしたことをすでに見た．彼の論理主義への共鳴の表れである．その後，単純な論理学への還元から離れて「超数学」の構想へ移行した際にも，いくつかの公理設定において，推論の形式が不可欠のものとして組み入れられていた．[115] ワイルの書評は，この論理主義の代表的論者への評価に止まらず，この数学基礎論をめぐる様々な言説全体を俯瞰する論述となっている．集合論のパラドックスに対するヒルベルトの危機意識に端を発して，諸々の経過を経て，すでに 1940 年代半ばの段階では下火になった論争ではあるが，ワイル自身の立ち位置を明確にすることも含めて興味深い論考である．

この論文は，数学をカントル，デデキントによって進められた集合論，実数論への還元について述べることから始める．そして「ラッセル宇宙」と題された第 4 節ではラッセルの型理論（type theory）が紹介される．加えて, ワイル自身が 1918 年に刊行した『連続体』の中で特に強調した代入と反復の操作が数学の基礎において果たす役割の重要性が指摘される．実数のような基礎概念をどのように作り上げるかという観点に照らして，安易にその全体を把握できるものとせずに一つ一つ組み上げるためのプロセスを構築しようとする構成主義は，ワイルが一貫して重んじる立場である．ここにブラウワーへの共感の根拠もあったことはわれわれは確認済みである．

そうした中で，論文第 6 節は「ブラウワーの直観数学」と題されている．ブラウワーに対する冷静な評価ともに，なおそれに対するシンパシーをワイルが抱いていることを明ら

[115]［林 2020］，51-61 頁．

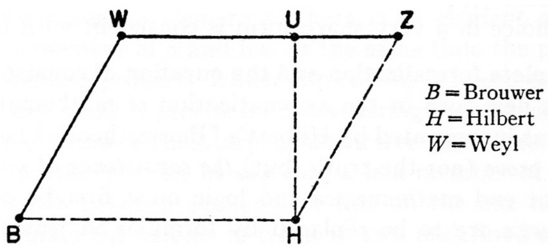

図 4：ワイルによる各陣営の位置づけ

かにしている．注（22）に掲げたように，ブラウワー流の数学基礎論への共感は，この時点においても一定程度保持されている．ワイルは，本質的に純粋な構成主義に対して，ラジカルで，より遠くまで進んだ段階が，ブラウワーの直観数学であったとする．そして次のように述べる．[116]

> ブラウワーは，私が疑う余地がないと考えるように，すべての自然数全体が持つ存在の性質に対する信念を支持する論拠などないということを明らかにしてくれた．そしてそれゆえに，「ある与えられた性質 γ を持つ数が存在するか，あるいはすべての数が性質 $\sim\gamma$〔性質 γ の否定〕を持つ数が存在するのか，そのどちらかである」という形式の中で，排中律は基盤となるものがないとした．〔中略〕ブラウワーはわれわれの目を開いてくれた．そしてあらゆる人間の具現可能性を超越した「絶対」への信仰によって育まれた古典数学が，いかに極端にまで，現実の意味，明証に基づいた真理を主張できる言明を越えてしまっているかをわれわれに見せてくれた．彼の観点と歴史の読み方によれば，古典論理学は有限集合とその部分集合の数学から抽象されたものだったのである．〔中略〕法則によって決定されるというよりも，ある数が他の諸々の数の後で，「自由に選択される」ような「生まれつつある状態の中の」（in statu nescendi）列，すなわち「選択列」の概念のおかげで，ブラウワーの実変数の扱いは，連続体の直観的性質と最も親密な調和をもたらす．

ブラウワーの持つポジティヴな面を示しつつも，現実の数学界でどのように受け入れたのか，最終的な評価を以下のように下している．[117]

> だが全体として，ブラウワーの数学は，われわれが慣れ親しんだ「実在する」数学に比べて簡単でなく，より限られた力しか持っていない．こうした理由から数学者たちの圧倒的大多数は，彼のラジカルな改革とともに進んで行くことにためらう

---

116 [Weyl 1968], 4, S. 275f.
117 *Ibid*., S. 276.

のである.

単にワイル個人の感想ではなく，数学者のコミュニティにおける反応を根拠に示している点が興味深い．時の経過を経た上で，ブラウワーへの思いを語るワイルの心境は複雑である．ただ，ワイルも人の子，周りの空気と無縁ではいられない．やはり極端は切りそがれ，穏当なところに落としどころを見いださざるを得ないのである．

では，一方の雄ヒルベルトの陣営はどのように論を発展させていったのであろうか．数学的議論を安全に展開できる公理系の設定に関して取り組みがあったことを述べる．ツェルメロの選択公理の導入に加え，フランクル，フォン・ノイマン，ベルナイス等が関わったことが記されている．加えて，ゲーデルが 1940 年に示した「連続体仮説の無矛盾性」のことも明記される．[118] ゲーデルに関してはまた稿を改めて論じることにしたい．ヒルベルトを論じた第 8 節は，「完全な形式化と無矛盾性の問題．悲観的結論」と題されている．

ヒルベルトは，1922 年以来「証明論」（Beweistheorie）を唱え，数学全般の無矛盾性を証明しようとした．そのために数学（および論理）を記号を用いて，数学の基礎となる部分を完全に形式化しなければならなかった．その際，数学の証明は何らか式の意味に仮託されるのではなく，一定のルールに従って理解可能な先行する事柄から導かれる式の列と捉える．こうして式自体は一端意味，すなわち数学的内容をはぎ取られる．ワイルによれば，こうした（フッサールの意味充実とは対極にある）ヒルベルトの試みは，成功裏に遂行されるものと数学者たちに当初受け止められたという．ワイル自身は最初反発する気持ちが強く，ブラウワーへの思想的接近へとつながった．ここではより客観的に評価しようとしている．だが，1931 年ゲーデルにより不完全性定理の証明が与えられた．その第 2 の主定理は，ヒルベルトの企図を否定するものだった．[119] ゲーデルの 1931 年論文はワイルを含めて，まさしく「ぞっとさせる一撃」（a terrific blow）となった．

ワイルは，この論文で数学基礎論論争の代表的な言説を，図 4 のように図式化する．ここで B はブラウワー，W はワイル自身，H はヒルベルトである．また，Z はツェルメロの選択公理を含んだ公理的体系，U は「ラッセルユニヴァース」，すなわち論理学に数学の基礎を還元してしまおうとする立場を表現する．図の左に寄るほど，構成主義的傾向があり，右に寄ると公理的体系の強化を試みる姿勢がある．さらに，下になるほど，基礎理論への相対的深さがあるとする．ワイル自身の立ち位置は，ブラウワーとヒルベルトへの

---

[118] ゲーデルが 1940 年に発表した論文のタイトルは，「選択公理の無矛盾性と集合論の公理を伴った一般化された連続体仮説の無矛盾性について」（The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generized Continuum Hypothesis with the Axiom of Set Theory）である（[Gödel 1986-1990], 2, pp. 33-101）．連続体問題については，カントルの問題提起から，ゲーデル，コーエンに至る「解決」までの道のりについて本数学史講義第 12 回［林 2018］，63 頁注（58）で簡単にふれた．

[119] ゲーデルの 1931 年論文とその後のヒルベルトの反応については，［林 2020］，67-72 頁参照．

複雑な感情を背景にしていることを読み取れる．同時に徹底して追究しようとした二人の論者への敬意も感じられるだろう．[120]

ゲーデルについてはまた別の機会に詳しく論じたい．とりあえず，このワイルの 1946 年論文において，ゲーデルに対する評価を短くまとめておこう．ゲーデルは，ヒルベルトの形式化における記号，式．式の列をある算術的な命題へと変換する手法をとる．その上で，ゲーデルはこの変換したある命題が，形式主義の下で証明可能でも，証明不可能でもないとことを示した．ワイルはこれは二つのことを意味するとする．[121]

1）公理的体系の無矛盾性の証明を与える証明の推論の中に．形式化する際に「写し」とり切れないような議論が含まれている．
2）無矛盾性の厳密な有限主義的な証明への望みは，完全にあきらめざるを得ない．

1）は言い換えとして，数学的帰納の手続きは完全に形式化されなかったとも述べている．ヒルベルトの当初の目標は完全な形では実現不可能であると断定される．

ヒルベルトの第 2 回 ICM における問題提起（1900 年）より約半世紀，ワイルは数学上の事柄だけでなく，多くのことを経験した．2 度の世界大戦があった．その中でナチスが台頭し，故国や多くの成果を生んだスイスの地を捨てざるを得なくなった．アメリカへの亡命とワイル自身の境遇は大きく変化した．数学の基礎をめぐる言説についてざまざまな曲折を経て，ワイルはどのような結論に至ったのであろうか．この論文の最終部は以下の通りである．ワイルのたどり着いた境地を示していて興味深い．[122]

> こうした〔数学の基礎をめぐる様々な言説の積み重なった〕歴史から，おそらく一つのことが明らかになるではないか．すなわち，われわれは（論理および）数学の究極の基礎について，今までにもまして不確かなままである．今日の世界におけるすべての人々，すべての物事同様，われわれは「危機」にある．われわれはすでに 50 年近く取り組んできた．ただ外面的には，日常の仕事を妨げてはいないように見える．しかし，告白すると，私の数学研究生活にかなり実際上の影響が及んでいる．私は，比較的「安全」と考える分野に興味を向けるようにしており，研究作業を追究する上で情熱や意思決定の一定の損失になっている．

ワイルは 1949 年に刊行される『数学と自然科学の哲学』英語版では, 独語版になかった「付録」を加え，その筆頭にゲーデルの成果をふまえた「数学の構造」と題する小論を掲載し

[120] [Weyl 1968], 4, S. 277f.
[121] *Ibid*., S. 279.
[122] *Ibid*.

た．ブラウワーへの熱は静まり，ヒルベルトへの共感を取り戻すも，最終的には数学の基礎への懐疑の念は深まるばかりだったろう．[123]　あらためて本稿の冒頭に掲げたエピグラムに立ちかえろう．ワイルは数学者として輝かしい実績を誇る．同時に，単にその成果に満足するだけでなく，自らが取り組む数学の「意味」を探りたいという欲求を強く持っていた．それは早くからフッサール哲学を始めとする他分野への素養を深めていったこととも関連する．一分野への研究の深さを獲得することだけでも容易ではないが，そこに横への広がりを兼ね備えた稀有の人だった．そして進行する数学基礎論をめぐる議論に関して「対岸の出来事」と距離を置くことなく，自ら積極的にコミットして貢献しようと模索した．論争の中で特定の立場への強い共感を表すことにも躊躇はなかった．ただ，この真の知識人に確たる最終的解答が与えられた訳ではない．ここに人間の知へのあくなき欲求と絶えざる格闘と獲得する成果とのアンバランスを見ることができるだろう．本数学史講義番外編［林 2019］で見たように，古代からの懐疑主義に対するパスカルとモンテーニュの議論を想起することもあり得るかもしれない．一方で，多くの数学者たちは 20 世紀後半へと時が流れるにつれて，数学基礎論という一専門領域の研究に関わる人と自らを区別して，各自の専攻分野の諸問題解決に向けて日常の研究に没頭している．そこにワイルの問いはおそらく存在しないであろう．そうした状況に特に私自身はあえてコメントをしない．ただ私は，ワイルの取り組みに対して強く，深く共鳴と敬意を抱く．そして，今後とも彼が提示した知的問いかけの痕跡を追い，自らの問いを掲げ続けていくだろう．

謝辞　本稿を故佐々木力教授（1947 年 3 月 7 日 –2020 年 12 月 4 日）に捧げたい．佐々木教授は，筆者の数学史研究の導き手であり，博士論文の主査も務めて頂いた．いま様々な思い出がよみがえる．ご冥福を祈るとともに，学恩を受けたことに心から感謝を申し上げたい．

（未完，次号に続く）

5　（中間考察）ワイルとライプニッツ

6　ゲーデルの不完全性定理

---

[123]『数学と自然科学の哲学』英語版付録 A「数学の構造」の冒頭部分でワイルは次のように述べる（[Weyl 1949], p. 219, 邦訳［ワイル 1959］，247 頁）．

> 数学の究極の基礎，および数学の究極の意味は，開かれた問題のままである．われわれはどの方向にそれが解答を見いだすのか知らないし，なおそもそも客観的な答えが期待できるのかどうかもわからない．

本文冒頭に掲げたエピグラムとほぼ同一の懐疑の念が示されている．晩年のワイルが抱く変わらぬ心情であったのだろう．

文献

1 次文献（翻訳も含む）

[Brouwer 1975] *L. E. J. Brouwer Collected Works , 1, Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Heyting(Amsterdam, Oxford: North Holland Publishing Company, 1975).

[Brouwer 1981] *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, edited by D. van Dalen (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1981).

[Cantor 1915] Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, translated by Philip E. B. Jourdain(1915_1)(New York: Dover Publications Inc., 1955)(rep.).

[Cantor 1932] *Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, herausgegeben von Ernst Zermelo(1932_1)(Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980)(rep.).

[Cantor 1991] *Georg Cantor Briefe*, herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson(Berlin etc.: Springer- Verlag, 1991).

[Courant and Hilbert 1968] Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der mathematischen Physik*, 1(3. Auflage)(1924_1, 1930_2), 2(2. Auflage)(1937_1)(Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1968).

[Dedekind 1930-1932] *Richard Dedekind Gesammelte mathematische Werke*, herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, und Öystein Ore(1930-1932_1)(Bronx: Chelsea Publishing Company, 1969)(rep.).

[Descartes 1996] *Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery(1897 -1913_1) (Paris: J. Vrin, 1996).

[Dirichlet 1889-1897] *G. Lejeune Dirichlet's Werke*, herausgegeben auf Verlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker und L. Fuchs(1889-97_1)(Bronx: Chelsea Publihshing Company, 1969)(rep.)

[Ewald 1996] *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 1, 2, edited by William Ewald(Oxford: Clarendon Press, 1996).

[Fourier 1822] Fourier, Joseph, *Théorie analytique de la chaleur* (1822_1)(Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1988)(rep.).

[Gödel 1986-1990] *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 1-2, edited by Solomon Fefferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort(Oxford etc.: Oxford University Press, 1986-1990).

[Hilbert 1900] Hilbert, David, "Über den Zahlbegriff," *Jarhresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **8** (1900), S. 180-184.

[Hilbert 1926] Hilbert, David, "Über das Unendliche," *Mathematische Annalen*, **95** (1926), S. 161-190.

[Hilbert 1928] Hilbert, David, "Die Grundlagen der Mathematik," *Abhandlungen aus dem mathmatischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), S. 65-85.

[Hilbert 1930] Hilbert, David, "Probleme der Grundlegung der Mathematik," *Mathematische*

Annalen, **102** (1930), S. 1-9.

[Hilbert 1970] *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, Zweite Auflage, Band 1-3 (1932, 1933, 1935_1) (Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1970).

[Hilbert 1998] Hilbert, David, *The Theory of Algebraic Number Fields*, Translated from the German by Iain T. Adamson with an Introduction by Franz Lemmermeyer and Norbert Schappacher (Berlin, Heiderberg and New York: Springer- Verlag, 1998).

[Hilbert 2004] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, edited by Michael Hallett and Urlich Majer (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2004).

[Hilbert 2009] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics 1915-1927*, edited by Tilman Sauer and Urlich Majer (Dordrecht, Heidelberg, London, and New York: Springer- Verlag, 2009).

[Hilbert 2013] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*, edited by William Ewald and Wilfried Sieg (Heidelberg, New York, Dordrecht and London: Springer, 2013).

[Hilbert 2015] Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie* (*Festschrift 1899*), herausgegeben von Klaus Vorkert (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2015).

[Hilbert and Bernays 1968-1970] Hilbert, David and Bernays, Paul, *Grundlagen der Mathematik*, Zweute Auflage, 1 (1934_1), 2 (1939_1) (Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968-1970).

[Husserl 1992] *Edmund Huusserl Gessammelte Schriften*, herausgegeben von Elisabeth Ströker (Hamburg: Felix Meiner verlag, 1992).

[Klein, 1926-1927] Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927_1) (New York: Chelsea Publishing Company, 1967) (rep.).

[Kant 1998] Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, nach der ersten und zweiten Originalausgabe, herausgegeben von Jens Timmermann (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1998).

[Kodaira 1975] *Kunihiko Kodaira Collected Works*, Vol. 1-3 (Tokyo, Princeton: Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1975).

[Kronecker 1895-1930] *Leopold Kronocker's Werke*, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel (1895-19301) (New York: Chelsea Publishing Company, 1968) (rep.)

[Kronecker 2001] "'Sur le concept de nombre en mathématique': Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891)," Retranscrit et commenté par Jaqueline Boniface et Norbert Schappacher, *Revue d'histoire des mathématiques*, **7** (2001), pp. 207-275.

[Leibniz 1923-] *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, herausgegeben von Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Berlin: Akademie Verlag, 1923-).

[Leibniz 1849-1863] *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von Carl Immanuel Gerhardt (1849-1863_1) (Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971) (rep.).

[Leibniz 1875-1890] *G. W. Leibniz Die philosophischen Schiriften* herausgegeben von Carl

Immanuel Gerhardt (1875-1890$_1$) (Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1996) (rep.).

[Leibniz 2004] Leibniz, G. W., *Discours de métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, Édition établie, présentée et annotée par Michel Fichant (Gallimard, 2004).

[Poincaré 1902] Poincaré, Henri, "Hilbert, Les Fondements de la Géométrie, " *Bulletin des sciences mathématiques*, **26** (1902), pp. 249-272.

[Poincaré 1905-1906] Poincaré, Henri, "Les mathématiques et la logique," *Revue de métaphysique et de morale*, **13** (1905), pp. 815-835, **14** (1906), pp. 17-34, *14* (1906), pp. 294-317.

[Riemann 1990] Riemann, Bernhard, *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftliche Nachlass und Nachtrage*, neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan (Berlin etc.: Springer Verlag, Leibzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft,1990).

[Russell 1903] Russell, Bertrand, *Principles of Mathematics* (1903$_1$) (London and New York: Routledge, 2010).

[van Heijenoort 1967] *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, edited by Jean van Heijenoort (Cambridge, London: Harvard University Press, 1967).

[Weyl 1913] Weyl, Hermann, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913$_1$, 1923$_2$, 1955$_3$) (Stuttgart, Leibzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1997).

[Weyl 1918] Weyl, Hermann, *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis* (*und andere Monographien*) (1918$_1$, 1932$_2$) (Providence: AMS Chelsea Publishing, 2006) (rep.).

[Weyl 1923] Weyl, Hermann, *Raum·Zeit·Materie: Vorlesungen über allgemeine Ralativitätstheorie* (1918$_1$) (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1923$_5$).

[Weyl 1931] Weyl, Hermann, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated by H. P. Robertson (1931$_1$) (Mineola: Dover Publishing, Inc., 2018).

[Weyl 1940] Weyl, Hermann, *Algebraic Theory of Numbers* (1940$_1$) (Princton: Princeton University Press, 1998).

[Weyl 1946] Weyl, Hermann, *The Classical Groups: Thier Invariants and Representations* (1939$_1$, 1946$_2$) (Princeton: Princeton University Press, 1997).

[Weyl 1949] Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926$_1$, 1949$_2$) (Princeton: Princeton University Press, 2009).

[Weyl 1952] Weyl, Hermann, *Symmetry* (1952$_1$) (Princeton: Princeton Univeristy Press, 2016).

[Weyl 1968] *Hermann Weyl Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von K. Chandrsekharan (Berlin, Heidelberg, New York: Springer- Verlag, 1968).

[Weyl 1987] Weyl, Hermann, *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Translated by Stephen Pollard and Thomas Bole (1987$_1$) (New York: Dover Publications, Inc., 1994).

[Weyl 1994] Weyl, Hermann, *Le continu et autres écrits*, Notes introductives et traduction par Jean Largeault (Paris: J. Vrin, 1994).

[Weyl 2009] Weyl, Hermann, *Mind and Nature: Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics*, Edited and with an Introduction by Peter Pesic (Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2009).

[Weyl 2012] Weyl, Hermann, *Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics, and Philosophy*, Translated and Edited with an Introduction and Notes by Peter Pesic (Mineola: Dover Publications, Inc., 2012).

[Zermelo 1904] Zermelo, Ernst, "Beweis, daßjede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)," *Mathematische Annalen*. **59** (1904), S. 514-516.

[Zermelo 1908] Zermelo, Ernst, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1," *Mathematische Annalen*. **65** (1908), S. 261-281.

[Zermelo 2010] *Ernst Zermelo Collected Works*, Volume 1 edited by Heinz- Dieter Ebbinghaus and Akihiro Kanamori (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2010).

［アリストテレス 1968］『アリストテレス全集』12，『形而上学』出隆訳（岩波書店，1968 年）.

［アリストテレス 2017］『アリストテレス全集』4『，自然学』内山勝利訳･解説（岩波書店，2017 年）.［カッシーラー 1989-1997］カッシーラー，エルンスト『シンボル形式の哲学』（一）～（四），木田

元・生松敬三・村岡晋一訳（岩波文庫，1999-1997 年）.

［カッシーラー 2017］カッシーラー，エルンスト『実体概念と関数概念：認識批判の基本的諸問題の研究』（1979 年 1），山本義隆訳（みすず書房，2017 年）.

［カント 2011］カント，イマニュエル『純粋理性批判』，熊野純彦訳（作品社，2011 年）.

［カントル 1979］G. Cantor『現代数学の系譜　8　カントル　超限集合論』功力金二郎・村田全訳・解説（共立出版，1979 年）.

［クライン 1995］Klein, Felix,『クライン：19 世紀の数学』，彌永昌吉監修，足立恒雄・浪川幸彦監訳，石井省吾・渡辺弘訳（共立出版，1995 年）.

［クーラン，ヒルベルト 1959-1962］R. クーラン＝ D. ヒルベルト『数理物理学の方法』1-4，齋藤利弥監訳，丸山滋弥・銀林浩・麻嶋格次郎・筒井孝胤訳（東京図書，1959-1962 年）.

［クーラント，ヒルベルト 2013-2019］R. クーラント, D. ヒルベルト『数理物理学の方法』上，下，藤田宏・高見穎郎・石村直之訳（丸善出版，2013-2019 年）.

［ゲーデル 1997］ロドリゲス - コンスエグラ，フランシスコ編『ゲーデル未完哲学論考』好田順治訳（青土社，1997 年）.

［ゲーデル 2006］ゲーデル，クルト『不完全性定理』林晋・八杉満利子訳・解説（岩波文庫，2006 年）.

［ディリクレ，デデキント 1970］P. G. L. Dirichlet, J. W. R. Dedekind『現代数学の系譜　5　ディリクレ，デデキント『整数論講義』酒井孝一訳・解説（共立出版，1970 年）.

［デカルト 2010］デカルト，ルネ『方法序説』山田弘明訳（ちくま学芸文庫，2010 年）.

［デデキント 1961］デーデキント『数について：連続性と数の本質』河野伊三郎訳（岩波文庫，1961 年）.

［デデキント 2013］デデキント，リヒャルト『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳・解説（ちくま学芸文庫，2013 年）.
［ヒルベルト 1972］D. Hilibert『現代数学の系譜　4　ヒルベルト　数学の問題：ヒルベルトの問題　増補版』一松信訳・解説（共立出版，1972 年）.
［ヒルベルト 2005］D. ヒルベルト『幾何学基礎論』中村幸四郎訳（1969 年 1）（ちくま学芸文庫，2005 年）.
［ヒルベルト，クライン 1970］D. Hilbert, F.Klein『現代数学の系譜　7　ヒルベルト　幾何学の基礎，クライン　エルランゲン・プログラム』寺阪英孝・大西正男訳・解説（共立出版，1970 年）.
［ヒルベルト，ベルナイス 1993］D.　ヒルベルト , P.　ベルナイス『数学の基礎』吉田夏彦・渕野昌訳（シュプリンガー・フェアラーク東京，1993 年）（[Hilbert and Bernays 1968-1970] の抄訳）.
［フッサール 1965］フッサール，エドムント，『現象学の理念』立松弘孝訳（みすず書房，1965 年）.
［フッサール 1968-1976］フッサール，エドムント，『論理学研究』1-4，立松弘孝・松井良和・赤松宏訳（みすず書房，1968-1976 年）.
［フッサール 1979-1984］フッサール，エトムント，『イデーン』1-1，1-2，渡辺二郎訳（みすず書房，1979-1984 年）.
［フレーゲ 2000］『フレーゲ著作集　3　算術の基本法則』野本和幸編（勁草書房，2000 年）.
［フレーゲ 2001］『フレーゲ著作集　2　算術の基礎』野本和幸・土屋俊編（勁草書房，2001 年）.
［ポアンカレ　1953］ポアンカレ，アンリ『科学と方法』吉田洋一訳（1926 年 1）（岩波文庫，1953 年）.
［ボルツァーノ 1978］ボルツァーノ, B.『無限の逆説』藤田伊吉訳（みすず書房，1978 年）.
［ユークリッド 2008］斎藤憲・三浦伸夫訳・解説，『エウクレイデス全集』第 1 巻，『原論』1-6（東京大学出版会，2008 年）.
［ライプニッツ 1989］『ライプニッツ著作集』9，『後期哲学』西谷裕作・米山優・佐々木能章訳（工作舎，1989 年）.
［ライプニッツ　1997］『ライプニッツ著作集』2，『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁・斎藤憲・安藤正人・倉田隆訳（工作舎，1997 年）.
［ライプニッツ　1999］『ライプニッツ著作集』3，『数学・自然学』原亨吉・横山雅彦・三浦伸夫・馬場郁・倉田隆・西敬尚・長島秀男訳（工作舎，1999 年）.
［リーマン 2004］リーマン，ベルンハルト『リーマン論文集』足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳（朝倉書店，2004 年）.
［リーマン 2013］リーマン，ベルンハルト『幾何学の基礎をなす仮説について』菅原正巳訳（1970 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2013 年）.
［ワイル 1959］ワイル，ヘルマン『数学と自然科学の哲学』菅原正夫・下村寅太郎・森繁雄訳（岩波書店，1959 年）（［Weyl 1949］の邦訳）.

［ワイル 1970］ヴァイル，ヘルマン『シンメトリー』遠山啓訳（紀伊國屋書店，1970 年）．
［ワイル 1974］ワイル，ヘルマン『リーマン面』田村二郎訳（岩波書店，1974 年）（［Weyl 1913］，初版の邦訳）．
［ワイル 2007］ワイル，ヘルマン『時間･空間･物質』上，下，内山龍雄訳（1973 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2007 年）（［Weyl 1923］の邦訳）．
［ワイル 2012］ワイル，H.，『古典群：不変式と表現』蟹江幸博訳（2004 年 $_1$）（丸善出版，2012 年）（［Weyl 1946］の邦訳）．
［ワイル 2014］ワイル，ヘルマン，『精神と自然：ワイル講演録』ピーター・ヘジック編，岡村浩訳（ちくま学芸文庫，2014 年）（［Weyl 2009］の邦訳）．
［ワイル 2016］ヴァイル，ヘルマン『連続体：解析学の基礎についての批判的研究』田中尚夫・渕野昌訳・注釈・解説（日本評論社，2016 年）（［Weyl 1918］の邦訳）．

2 次文献

[Belna 1996] Belna, Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege: théories, conceptions et philosophie* (Paris: J. Vrin, 1996).
[Blumenthal 1935] Blumenthal, Otto, "Lenbensgeschichte," in [Hilbert 1970], Band 3, S. 388-429.
[Boniface 2004] Boniface, Jacqueline, *Hilbert et la notion d'existence en mathématique* (Paris: J. Vrin, 2004)
[Cavaillès 1994] Cavaillès, Jean, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, présentation par Bruno Huisman (Paris: Hermann, 1994).
[Cleary 1995] Cleary, John J., *Aristotle and Mathematics: Aporetic Method in Cosmogy and Metaphysics* (Leiden, New York, Köln: E. J. Brill, 1995).
[Corry 2004]Corry, Leo, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Second Edition (1996_1) (Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004).
[Dauben 1979] Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Princeton: Princeton University Press, 1979).
[Dawson, Jr. 1997] Dawson, Jr., John, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel* (Wellesley: A K Peters, 1997).
[Dugac 1976] Dugac, Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: J. Vrin, 1976).
[Dreben and Kanamori 1997] Dreben, Burton and Kanamori, Akihiro, "Hilbert and Set Theory," *Synthese*, 110 (1997), pp. 77-125.
[Ebbinghaus 2007] Ebbnighaus, Heinz- Dieter, *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work* (Berlin, Heidelberg: Springer- Verlag, 2007).
[Edwards 1979] Edwards, Jr., Charles Henry, *The Historical Development of the Calculus* (New York etc.: Springer- Verlag, 1979).
[Feferman 1998] Feferman, Solomon, *In the Light of Logic* (New York, Oxford: Oxford University

Press, 1998).

[Ferreirós 2007] Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Second Revised Edition (Basel: Birkhäuser Verlag, 2007).

[Ferreirós and Gray 2006] Ferreirós, José, and Gray, Jeremy J., *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy* (Oxford: Oxford University Press, 2006).

[Frei und Stammbach 1992] Frei, Günter und Stammbach, Urs, *Hermann Weyl und die Mathmetik an der ETH Zürich 1913-1930* (Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992).

[George and Vellman 2002] George, Alexander and Vellman, Daniel J., *Philosophies of Mathematics* (Malden, Oxford: Blackwell Publisihers, 2002).

[Grabiner 1981] Grabiner, Judith V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus* (1981_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2005).

[Gray 1989] Gray, Jeremy, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic* (Oxford: Clarendon Press, 1989).

[Gray 2013] Gray, Jeremy, *Henri Poincaré: A Scientific Biography* (Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2013).

[Hallett 1984] Hallett, Michael, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size* (Oxford: Clarendon Press, 1984).

[Hawkins 2000] Hawkins, Thomas, *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics 1869-1926* (New York etc.: Springer-Verlag, 2000).

[Heck 2011] Heck, Richard G., *Frege's Theorem* (Oxford: Clarendon Press, 2011).

[Heck 2012] Heck, Richard G., *Reading Frege's Grundgesetze* (Oxford: Clarendon Press, 2012).

[Jech 1973] Jech, Thomas J., *The Axiom of Choice* (1973_1) (Mineola: Dover Publications Inc., 2008) (rep.).

[Jech 2003] Jech, Thomas, *Set Theory The Third Millennium Edition, Revised and Expanded* (Berlin, Heidelberg New York etc.: Springer, 2003).

[Kanamori 1996] Kanamori, Akihiro, "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **2** (1996), pp. 1-71.

[Kanamori 2004] Kanamori, Akihiro, "Zermelo and Set Theory," *The Bulletin of Symbolic Logic*, **10** (2004), pp. 487-553.

[Kanamori 2009] Kanamori, Akihiro, *The Higher Infinite, Second Edition* (Berlin, Heidelberg: Springer, 2009).

[Kitcher 1976] Kitcher, Philip, "Hilbert's Epistemology," *Philosophy of Science*, 43 (1976), pp. 99-115.

[Largeault 1993] Largeault, Jean, *Intuition et intutionisme* (Paris: J. Vrin, 1993).

[Lauria 2004] Lauria, Philippe, *Cantor et le transfini: mathématique et ontologie* (Paris: L'Harmattan, 2004).

[Mancosu 1998] Mancosu, Paolo, *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s* (New York, Oxford: Oxford University Press, 1998).

[Mancosu 2010] Mancosu, Paolo, *The Adventure of Reason: Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900-1940* (New York, Oxford: Oxford University Press, 2010).

[Mclarty 2006] Mclarty, Colin, "Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to the Rise of the Functors," in [Ferreirós and Gray 2006], pp. 187-208.

[Moore 1982] Moore, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (1982_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

[Moore 2002] Moore, Gregory H., "Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolution of Hilbert's Thought," *Historia Mathematica*, **29** (2002), pp. 40-64.

[Raatikainen 2003] Raatikainen, Panu, "Hilbert's Program Revisited," *Synthese*, **137** (2003), pp. 157-177.

[Reid 1970] Reid, Constance, *Hilbert* (1970_1) (New York: Springer- Verlag, 1996).

[Reid 1976] Reid, Constance, *Courant* (1976_1) (New York: Springer- Verlag, 1996).

[Segre 1994] Segre, Michael, "Peano's Axioms in Their Historical Context," *Archive for History of Exact Sciences*, **22** (1994), pp. 201-342.

[Scholz 2001] *Hermann Weyl's Raum- Zeit- Materie and a General Introduction to His Scientific Work* (Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001).

[Sieg 2013] Sieg, Wilfried, *Hilbert's Programs and Beyond* (New York etc. : Oxford University Press, 2013).

[Sieg and Schlimm 2013] Sieg, Wilfried and Schlimm, Dirk, 'Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms," in [Sieg 2013], pp. 35-72.

[Sigurdsson 1991] Sigurdsson, Skuli, "Hermann Weyl, Mathematics and Physics, 1900-1927," A Thesis to the Department of History of Science, Harvard University, 1991.

[Sinaceur 1999] Sinaceur, Houriya, *Corps et modèles: Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle* (Paris: J. Vrin, 1999).

[Takeuchi 2013] Takeuchi, Gaishi, *Proof Theory Second Edition* (1987_1) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2013).

[Tieszen 1989] Tieszen, Richard, *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge* (Dordrecht, London, Boston: Kluwer Academic Press, 1989).

[Tieszen 2005] Tieszen, Richard, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2005).

[Tieszen 2011] Tieszen, Richard, *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press, 2011).

[van Dalen 2013] van Dalen, Kirk, *L. E. J. Brouwer Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life* (London etc.: Springer- Verlag, 2013).

[Wang 1987] Wang, Hao, *Reflexions on Kurt Gödel* (Cambridge, London: A Bradford Books, The MIT Press, 1987).

[Wang 1996] Wang, Hao, *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (Canbridge, London: The

MIT Press, 1996).
［新井 2021］新井敏康『数学基礎論　増補版』（2011 年 $_1$）（東京大学出版会，2021 年）.
［飯田 1995］飯田隆編『リーディングス　数学の哲学：ゲーデル以後』（勁草書房，1995 年）.
［井関・近藤 1977］井関清志・近藤基吉『現代数学：成立と課題』（日本評論社，1977 年）.
［伊東・原・村田 1975］伊東俊太郎・原亨吉・村田全『数学史』（筑摩書房，1975 年）.
［伊東・原・村田 1975］彌永昌吉『数の体系』（上），（下）（岩波新書，1972 年，1978 年）.
［カスー＝ノゲス 2020］カスー＝ノゲス，ピエール『ゲーデルの悪霊たち：論理学と狂気』新谷昌宏訳（みすず書房，2020 年）
［菊池 2014］菊池誠『不完全性定理』（共立出版，2014 年）.
［キューネン 2008］キューネン，ケネス『集合論：独立性証明への案内』藤田博司訳（日本評論社，2008 年）.
［楠 1973］楠幸男『函数論：リーマン面と等角写像』（1973 年 1）（朝倉書店，2011 年）.
［倉橋 2021］倉橋太志「不完全性定理の数学的発展」，『数学』，**73-1**（2021 年 1 月），60-87 頁.
［小平他 1985］小平邦彦他『特集　ワイル生誕 100 年』（『数学セミナー』1985 年 9 月号）（日本評論社，1985 年）.
［小平 2000］小平邦彦『怠け数学者の記』（1986 年 $_1$）（岩波現代文庫，2000 年）.
［小平 2003］小平邦彦『解析入門』1，2（岩波書店，2003 年）.
［小林・大島 2005］小林俊行・大島利雄『リー群と表現論』（岩波書店，2005 年）.
［小松 2009］小松勇作『無理数と極限』（1967 年 $_1$）（共立出版，2009 年）.
［近藤 1994］『近藤洋逸数学史著作集』第 1 巻『幾何学思想史』佐々木力編集（日本評論社，1994 年）.
［齋藤 2002］齋藤正彦『数学の基礎：集合・数・位相』（東京大学出版会，2002 年）.
［佐々木 1995］佐々木力『科学革命の歴史構造』（上），（下）（1985 年 $_1$）（講談社学術文庫，1995 年）.
［佐々木 2001］佐々木力『二十世紀数学思想』（みすず書房，2001 年）.
［佐々木 2020］佐々木力『数学的真理の迷宮：懐疑主義との格闘』（北海道大学出版会，2020 年）.
［志賀 1988］志賀浩二『集合への 30 講』（朝倉書店，1988 年）.
［志賀 2013］志賀浩二『数学という学問：概念を探る 3』（ちくま学芸文庫，2013 年）.
［下村 1988］『下村寅太郎著作集』1，『数理哲学・科学史の哲学』（みすず書房，1988 年），『科学史の哲学』（1941 年 $_1$，2012 年 $_2$）所収，143-329 頁，『無限論の形成と構造』（1944 年 $_1$，1979 年 $_2$）所収，333-450 頁.
［杉浦 1980-1985］杉浦光夫『解析入門』1，2（東京大学出版会，1980，1985 年）.
［杉浦 1997］杉浦光夫編『ヒルベルト　23 の問題』（日本評論社，1997 年）.
［杉浦 2000］杉浦光夫『リー群論』（共立出版，2000 年）.
［杉浦 2018］杉浦光夫『杉浦光夫数学史論説集』，笠原乾吉・長岡一昭・亀井哲治郎編（日本評論社，2018 年）.

［鈴木 2013］鈴木俊洋『数学の現象学：数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学』（法政大学出版局，2013 年）.
［砂田他 2019］砂田利一他『ヒルベルト：現代数学の礎の源を探る』（『数理科学』2019 年 9 月号）（現代数学社，2019 年）.
［赤 2014］赤攝也『集合論入門』（1957 年 $_1$）（ちくま学芸文庫，2014 年）.
［関口他 2016］関口次郎他『特集　ワイル：現代の数学と物理に与えた影響を探る』（『数理科学』2016 年 10 月号）（サイエンス社，2016 年）.
［高木 1971］高木貞治『初等整数論講義』第 2 版（1931 年 $_1$）（共立出版，1971 年）.
［高木 1995］高木貞治『近世数学史談』（1931 年 $_1$，1942 年 $_2$）（岩波文庫，1995 年）.
［高木 2010］高木貞治『定本　解析概論』（1938 年 $_1$）（岩波書店，2010 年）.
［竹内 1980］竹内外史『直観主義的集合論』（紀伊國屋書店，1980 年）.
［竹内・八杉 1988］竹内外史・八杉満利子『証明論入門』（1956 年 $_1$，1974 年 $_2$，1988 年 $_3$）（共立出版，2011 年）.
［田中 2006-2007］田中一之編『ゲーデルと 20 世紀の論理学』全 4 巻（1『ゲーデルの 20 世紀』，2『完全性定理とモデル理論』，3『不完全性定理と算術の体系』，4『集合論とプラとニズム』）（東京大学出版会，2006-2007 年）.
［田中 2012］田中一之『原点解題　ゲーデルに挑む：証明不可能なことの証明』（東京大学出版会，2012 年）.
［田中 2019］田中一之『数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ』（裳華房，2019 年）.
［田中　2005］田中尚夫『選択公理と数学：発生と論争，そして確立への道』（増訂版）（遊星社，2005 年）.
［谷山　1994］『谷山豊全集［増補版］』，谷山豊全集（増補版）編集委員会（佐竹一郎・清水達雄・杉浦光夫・山崎圭次郎）編（日本評論社，1994 年）
［ドーソン Jr　2006］ドーソン Jr，ジョン・W『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』村上祐子・塩谷賢訳（新曜社，2006 年）.
［中村 2021］中村大介『数理と哲学：カヴァイエスとエピステモロジーの系譜』（青土社，2021 年）.
［長岡 2018］長岡亮介「ゲオルク・カントルと彼の集合論」，『数学文化』，**29**（2018 年），13-25 頁.
［野本 2012］野本和幸『フレーゲ哲学の全貌：論理主義と意味論の原型』（勁草書房，2012 年）.
［野本 2019］野本和幸『数論・論理・意味論　その原型と展開：知の巨人たちの軌跡をたどる』（東京大学出版会，2019 年）.
［林 2001］林知宏「無限小量をめぐる論争と基礎づけの問題，ライプニッツ，ヴァリニョン，ヘルマン」，『数学史の研究』（京都大学数理解析研究所講究録 1195，2001 年）所収，14-37 頁.
［林 2003］林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』（東京大学出版会，2003 年）.

［林 2008］林知宏「数学史講義（第 2 回）: ユークリッド『原論』，論証学問の成立」，『学習院高等科紀要』，**6**（2008 年），23-52 頁.

［林 2009］林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」，酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』（世界思想社，2009 年）所収，37-56 頁.

［林 2011］林知宏「数学史講義（第 5 回）: 17 世紀における記号代数と方程式論」，『学習院高等科紀要』，**9**（2011 年），11-38 頁.

［林 2016］林知宏「数学史講義（第 10 回）: アイザック・ニュートンの数学 5」，『学習院高等科紀要』，**14**（2016 年），57-110 頁.

［林 2017］林知宏「数学史講義（第 11 回）: 数学の基礎をめぐって 1：集合と数の理論（デデキント）」，『学習院高等科紀要』，**15**（2017 年），39-82 頁.

［林 2018］林知宏「数学史講義（第 12 回）：数学の基礎をめぐって 2；カントルの無限集合論」，『学習院高等科紀要』，**16**（2018 年），37-75 頁.

［林 2019］林知宏「数学史講義（番外編）：パスカルとモンテーニュ」，『学習院高等科紀要』，**17**（2019 年），27-75 頁.

［林 2020］林知宏「数学史講義（第 13 回）：数学の基礎をめぐって　3；現代数学基礎論論争（その 1）: ヒルベルトの形式主義」，『学習院高等科紀要』，**18**（2020 年），25-80 頁.

［原 2013］原亨吉『近世の数学：無限概念をめぐって』（1975 年 [1]）（ちくま学芸文庫，2013 年）.

［渕野 2018］渕野昌「カントルの精神の継承：無限集合の数学 / 超数学理論としての集合論のその後の発展と，その「数学」へのインパクト」，『数学文化』，**29**（2018 年），26-41 頁.

［前原 1977］前原昭二『数学基礎論入門』（朝倉書店，1977 年）.

［リード 2010］リード，C.『ヒルベルト：現代数学の巨峰』彌永健一訳（1972 年 [1]）（岩波現代文庫，2010 年）.