3 次方程式と 3 倍角の公式

〈連載企画〉**数学教師の空き時間 第 8 回**

髙城彰吾

8.1 今回の話題

3 次方程式の一般的な解法は「カルダノの方法」と呼ばれてよく知られており，多くの文献に掲載されている（例えば[1]）．ただし，この解法がジロラモ・カルダノ 1 人によるものではないことも，また知られている．とくに本質的な部分についてはシピオネ・デル・フェロとニコロ・フォンタナ（通称タルタリア）がそれぞれ独立に発見したものとされる．「カルダノの方法」では一般の 3 次方程式に未知数の置き換えを施し，2 次の項を含まない方程式に変換して考える．[2]によれば，この部分のみがカルダノに負うもので，これに続く解法の本質的部分はフェロおよびフォンタナによる．その本質的部分をカルダノはフォンタナに教えを請い，またフェロの残した資料からも知識を得，自らはそれをより一般化して，フォンタナの意に背いて公表した，というのが，16 世紀イタリアを舞台とした数学史上の 1 つの物語となっている．

他方，高等学校で扱う三角関数の単元において，加法定理の応用として 3 倍角の公式が導かれるが，この公式は三角関数の 3 次と 1 次の項を含み，2 次の項を含んでいない．ド・モアブルの定理により，複素数の 3 乗は偏角が 3 倍になるということも踏まえて，三角関数の授業中のある時ふと，3 次方程式のフェロおよびフォンタナの解法と 3 倍角の公式との間に何か関連があるのではないだろうか，と思い至り，本稿の考察の着想を得た．[1]には，ある条件を満たす 3 次方程式に限定して余弦の 3 倍角の公式を応用する記述がある．そこでは，余弦の絶対値は 1 以下であるという基本的性質によって，公式を適用する 3 次方程式を限定している．本稿では，この制約を取り除くために，異なる発想から出発することにしたい．厳密な意味で「代数的」な解法からはみ出すことは否めないが，その見地から，フェロおよびフォンタナの解法について 1 つの解釈を与えたいと考える．

8.2 次数低下 3 次方程式

x を未知数とする一般の 3 次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

において，未知数を $x=y-\dfrac{b}{3a}$ と置き換えることにより，2 次の項を含まない 3 次方程式

$$ay^3+my+n=0$$

を得る．この 2 次の項を含まない 3 次方程式は「次数低下 3 次方程式」とよばれる[2]．これを解くことができれば，得られた y の値から $x=y-\dfrac{b}{3a}$ として(1)の解を得る．最高次の係数を $a=1$ として一般性を失わないことは明らかであるから，次数低下 3 次方程式は

$$y^3+3py+q=0 \tag{2}$$

として考えれば十分である．一般の 3 次方程式を次数低下方程式に変形するこの考えは，カルダノによって与えられた．

なお次数を 1 つ下げて，同様のことを 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0 \tag{3}$$

に対して行うとすれば，$x=y-\dfrac{b}{2a}$ と置き換えることで 1 次の項を含まない 2 次方程式

$$ay^2+n=0$$

を得ることになる．これは数学 I において，(3)を平方完成した

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

によって解くことと同等であると捉えることができる．

8.3 フォンタナによる解法

次数低下 3 次方程式の解法は，フェロによって最初に与えられたが，数学における 16 世紀当時の社会情勢から，フェロはこれを公表しなかった．それを引き継いだフェロの弟子から数学の問題対決を申し込まれたフォンタナは，独自の努力によって次数低下 3 次方程式の解法を発見し，それがカルダノを通して公開された（詳しくは[2]などを参照）．その基本的なアイデアは，(2)に対して

$$y=u+v$$

という置き換えを行うことにより，2 つの未知数 u, v に関する連立方程式

$$u^3+v^3=-q, \quad uv=-p$$

を得，u^3, v^3 を 2 つの解とする 2 次方程式

$$t^2+qt-p^3=0$$

を解くことで

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}, \qquad v=\sqrt[3]{\frac{-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}$$

したがって

$$y=\sqrt[3]{\frac{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}$$

を得る，というものである．このとき u と v の 3 乗根は $uv=-p$ を満たす組み合わせに取るものとする．これが次数低下 3 次方程式(2)の解の公式である．

この解法では，最終的な解である y が実数でも途中の u, v が虚数である場合があり，数学者が虚数の存在をしぶしぶ認める方向に動かされた重要なきっかけの 1 つとなった．一方で，$y=u+v$ という巧みな置き換えによって解けることは確かにその通りであるが，なぜそのようにするのか，という根源的な疑問が残ることも事実ではないだろうか．

8.3 双曲線関数

数学Ⅲの発展的な教材の 1 つに，次の双曲線関数がある：

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \quad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad (e \text{ は自然対数の底})$$

これらに対して三角関数と類似の公式：

$$\begin{aligned}
\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha &= 1\\
\sinh(\alpha+\beta) &= \sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta\\
\cosh(\alpha+\beta) &= \cosh\alpha\cosh\beta+\sinh\alpha\sinh\beta\\
\sinh 2\alpha &= 2\sinh\alpha\cosh\alpha\\
\cosh 2\alpha &= \cosh^2\alpha+\sinh^2\alpha = 2\cosh^2\alpha-1 = 1+2\sinh^2\alpha
\end{aligned}$$

などが成り立つので，3 倍角の公式：

$$\begin{aligned}
\sinh 3\alpha &= 4\sinh^3\alpha+3\sinh\alpha\\
\cosh 3\alpha &= 4\cosh^3\alpha-3\cosh\alpha
\end{aligned} \tag{4}$$

が成立する．また，これらの関数の逆関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1}w &= \log\left(w+\sqrt{w^2+1}\right)\\
\cosh^{-1}w &= \log\left(w\pm\sqrt{w^2-1}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる（log は自然対数）．

双曲線正弦関数 $w = \sinh z$ は実変数関数と見た場合の値域が実数全体であり，複素変数の場合の値域は複素数全体であり，任意の 3 次方程式において未知数をこれに置き換えることができる．

8.4　3 倍角の公式を応用する

(2)の定数項を移項した次数低下 3 次方程式

$$y^3 + 3py = -q \tag{6}$$

の左辺と 3 倍角の公式(4)

$$\sinh 3\alpha = 4\sinh^3\alpha + 3\sinh\alpha$$

の右辺とを対比すると，2 次の項が含まれず 3 次と 1 次の項からなっていることが分かる．係数が異なっているが，これは未知数の変換によって次のように調整できる．(6)において

$$y = 2\sqrt{p}\,w \tag{7}$$

とおけば，$y^3 = 8p\sqrt{p}\,w^3$ であるから，方程式は

$$8p\sqrt{p}\,w^3 + 6p\sqrt{p}\,w = -q$$

すなわち

$$4w^3 + 3w = -\frac{q}{2p\sqrt{p}} \tag{8}$$

したがって，さらに定数項を $r = -\dfrac{q}{2p\sqrt{p}}$ とおき，未知数の変換

$$w = \sinh z \tag{9}$$

を行うと，

$$4\sinh^3 z + 3\sinh z = r$$

3 倍角の公式により

$$\sinh 3z = r$$

を得る．これを解くと

$$z = \frac{1}{3}\sinh^{-1} r$$

(5)により

$$z=\frac{1}{3}\log\left(r+\sqrt{r^2+1}\right)=\log\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}$$

$$\begin{aligned}y&=2\sqrt{p}\,w=2\sqrt{p}\sinh z=\sqrt{p}\,(e^z-e^{-z})\\&=\sqrt{p}\left(\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}}\right)\end{aligned}$$

ここで $r=-\dfrac{q}{2p\sqrt{p}}$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2p\sqrt{p}}+\sqrt{\frac{4p^3+q^2}{4p^3}}}=\sqrt[3]{\frac{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}{2p\sqrt{p}}}\\&=\frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt[3]{\frac{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}\qquad(\pm\text{は}\,p\,\text{の正負による})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}}&=\sqrt{p}\sqrt[3]{\frac{2}{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}}=\sqrt{p}\sqrt[3]{\frac{2\left(-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}\right)}{(-q)^2-(4p^3+q^2)}}\\&=\sqrt{p}\sqrt[3]{\frac{-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}}{-2p^3}}=-\frac{1}{\sqrt{p}}\sqrt[3]{\frac{-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{p}\left(\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+1}}}\right)\\&=\sqrt[3]{\frac{-q\pm\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q\mp\sqrt{4p^3+q^2}}{2}}\end{aligned}$$

となり，フォンタナの解の公式が得られる．

8.5 u と v の意味

上で紹介した双曲線正接関数を用いた解法は，細かな計算が多く迂遠な印象を持たれるかもしれない．しかしその立場から見ると，フォンタナの解法で u と v となっているものの実体が，それぞれ

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

における 2 つの要素

$$u\longleftrightarrow\frac{e^z}{2},\qquad v\longleftrightarrow-\frac{e^{-z}}{2}$$

と対応していることが読み取れる．「カルダノの方法」の本質をなしている次数低下 3 次方程式の解法は，フェロとフォンタナのそれぞれの天賦の才と努力によって発見されたものであったが，それは決してたまたまうまく行く方法などではなく，適切な背景の中に置くことにより．明確な実体によって投影されたものであることがはっきりと見えて来るのである．

参考文献

[1] 髙木貞治,「代数学講義 改訂新版」, 共立出版（1965）, §33, 34

[2] W. ダンハム,「数学の知性」, 現代数学社（1998）, 第六章

[3] 宮腰　忠,「高校数学+ α 」, 共立出版（2004）, pp. 66–68