半空間で定義された調和関数の（理想）境界値

高城　彰吾

1．n次元Euclid空間R^n上のSchwartzの分布（distribution）$T\in D'(R^n)$が，「上半空間」$R_+^{n+1}=R^n\times(0,+\infty)$で定義された調和関数$T(x,y)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$y>0$のある種の境界値である事はLiu［1］に述べられている：

R_+^{n+1}のPoisson核を$P_y(x)$とする。即ち

$$P_y(x)=\frac{1}{\omega_n}\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

ここでω_nはR^{n+1}における単位球面の面積の½であり，ガンマ関数により

$$\omega_n=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

と表わされる。また$|x|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$である。$T\in D'(R^n)$に対し，その台（support)がコンパクトの場合，

$$T(x,y)=\langle T^{(t)},P_y(x-t)\rangle$$

とおき，TのPoisson積分とよぶ。Tの台がコンパクトでない場合は，1の分解を用いて台のコンパクトな分布の局所有限和$T=\sum_{\lambda=1}^{\infty}T_\lambda$に分解する。各$T_\lambda$に対し適当な半径で中心が原点の閉球において$T_\lambda(x,y)$を調和な多項式$H_\lambda(x,y)$で近似することにより，級数$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\{T_\lambda(x,y)-H_\lambda(x,y)\}$が$R^{n+1}-\mathrm{supp}T$に於いて広義一様収束するようにできる。この和を

$T(x, y)$とおく。各$y>0$に対して，$T(x, y)$を$R_x{}^n$上の分布と考えて$y \to +0$とすると$D'(R^n)$において$T(x, y)$はTに収束する。その意味でTは$T(x, y)$の境界値と考えられる、というものである。

例1　デルタ関数（Dirac 測度）$\delta(x)$のPoisson 積分は$P_y(x)$である。

例2　$n=2$とする。x_1軸上の区間$[a, b]$上の線分要素をσとおく。そのPoisson 積分は簡単な置換積分によって求められる。

$$\sigma(x_1, x_2, y) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{y}{\{(x_1-t)^2+x_2{}^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{y}{x_2{}^2+y^2}\left\{\frac{x_1-a}{\sqrt{(x_1-a)^2+x_2{}^2+y^2}} - \frac{x_1-b}{\sqrt{(x_1-b)^2+x_2{}^2+y^2}}\right\}$$

例3　例2において$a \to -\infty$，$b \to +\infty$とすると，$\sigma(x_1, x_2, y)$は広義一様収束し，極限はx_1軸上の1次元Lebesgue測度のPoisson 積分である。これは$n=1$のときの$\delta(x)$のPoisson 積分と一致する。

より一般に上半空間で定義された調和関数の（理想）境界値の空間を構成したい。当然それは$D'(R^n)$を含む。

2．上半空間R_+^{n+1}で定義された調和関数のなす線型空間を$H(R_+^{n+1})$と書く。その元$h(x, y)$，$x \in R^n$，$y>0$のうちで，$h(x, 0)=0$として$y \geqq 0$まで連続に延長される関数の全体を$H_0(R_+^{n+1})$と書く。部分線型空間$H_0(R_+^{n+1})$による$H(R_+^{n+1})$の商空間を$BH(R^n)$で表わす：

$$BH(R^n) = H(R_+^{n+1}) / H_0(R_+^{n+1}).$$

$h(x, y) \in H(R_+^{n+1})$を含む同値類を$R_x{}^n$上の対象と考え，$f(x) = [h(x, y)]$で表わす。$h(x, y)$を$f(x)$の1つの定義関数といい，

$f(x)$はh(x, y)によって定義されるという。すぐ後に述べる様にこれはh(x, y)の$x=0$における理想化された境界値である。

$f(x)$の偏導関数は，その定義関数の偏導関数によって定義される。明らかにこの定義は定義関数のとり方に依存しない。

分布Tを，前出の$T(x, y)$の属する同値類$[T(x, y)]$と同一視する事により，微分演算を含めて線型空間$D'(R^n)$は$BH(R^n)$に埋め込まれる。

例4　例2に挙げたσの偏導関数$(\partial/\partial x_1)\sigma$を計算すると，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma(x_1, x_2, y)\right]$$

$$= \left[P_y(x_1 - a, x_2) - P_y(x_1 - b, x_2)\right]$$

$$= \delta(x_1 - a, x_2) - \delta(x_1 - b, x_2)$$

という予期されそうな結果を得る。

$f(x) = [h(x, y)]$とするとき，パラメータ$u>0$に対して$h_u(x) = h(x, u)$を$BH(R^n)$の元と考えると，これは(x, y)の調和関数$h(x, u+y)$によって定義される。$u \to +0$のとき，(x, y)に関し広義一様に$h(x, u+y) \to h(x, y)$であり，即ち$h_u(x)$の定義関数は$f(x)$の定義関数に収束する。仮に定義関数の列の広義一様収束によって収束を考えれば，その意味で$f(x)$は$h_u(x) = h(x, u)$の$u \to +0$のときの極限，従って$h(x, y)$の$y=0$における境界値と考えられる。この稿では以後$f(x)$を$h(x, y)$によって定義されるR^n上の境界値とよぶ。

Rx^nの開集合Gの各点において$h(x, y)$の（ふつうの）境界値が存在し，0であるとする。このようなGのうち最大のもの（すべての合併）のRx^nに関

する補集合を$f(x)=[h(x,y)]$の台(support)と呼び$\mathrm{supp}\, f$と書く。歪対称，即ち新たに$y<0$に対しては値を$-h(x,-y)$と定義することにより，$h(x,y)$は$R^{n+1}-\mathrm{supp}\, f$まで調和関数として延長される事に注意する。

可算無限個の境界値$f_\lambda(x)$，$\lambda=1,2,3\cdots$の台が局所有限 —— R^nのコンパクト集合は高々有限個の$\mathrm{supp}\, f_\lambda$と交わる —— のとき，これらの和$\sum_{\lambda=1}^{\infty} f_\lambda(x)$を考える事ができる。実際各$f_\lambda(x)$の定義関数$h_\lambda(x,y)$を，級数$\sum_{\lambda=1}^{\infty} h_\lambda(x,y)$が$R_+^{n+1}$において広義一様収束するようにとればよい。それは$h_\lambda(x,y)$を延長したものを$H_0(R_+^{n+1})$に属する多項式で近似することにより容易である。

例5 $\{a_\lambda\}$を$a_\lambda>0$，$a_\lambda\downarrow 0$である数列とし，$c_\lambda=(a_\lambda,0\cdots,0)$として$R^n$の点列$\{c_\lambda\}$を考える。$P_y(x-c_\lambda)$は$R^{n+1}-c_\lambda$で調和，$(|x|^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty$のとき0に収束する。$R^{n+1}$において原点Oを中心とする単位球面$\Sigma_1$に関する$P_y(x-c_\lambda)$のKelvin 変換を$v_\lambda(x,y)$とおくと，これは原点が除去可能特異点であるため，$c_\lambda^*$（$c_\lambda$の$\Sigma_1$に関する反転）を除いて調和である。$|c_\lambda^*|\to\infty$ $(\lambda\to\infty)$であることから，調和な多項式$H_\lambda(x,y)$を適当にとって，級数$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\{v_\lambda(x,y)-H_\lambda(x,y)\}$が$R^{n+1}-\{c_\lambda^*\mid\lambda=1,2,3,\cdots\}$において広義一様収束するようにできる。$H_\lambda(x,y)$の$\Sigma_1$に関するKelvin 変換を$H_\lambda^*(x,y)$とおくと，これは原点を除いて調和であり，しかも級数$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\{P_y(x-c_\lambda)-H_\lambda^*(x,y)\}$は$R^{n+1}-\{c_\lambda\mid\lambda=1,2,3,\cdots\}$において広義一様収束し，調和である。この

調和関数によって定義される境界値は，R^n の「右半分」$\{x \mid x_1 > 0\}$ においてΣ$_{\lambda=1}^{\infty}\delta(x-c_\lambda)$ に一致すると考えられる。

例6　D_λ をxに関する任意の定係数微分作用素とする。例5の$P_y(x-c_\lambda)$ のかわりに$D_\lambda P_y(x-c_\lambda)$ を用いて，同様の方法で境界値が考えられる。

3．合成積（convolution)について調べる。2つの境界値 $f(x)=[h_1(x,y)]$，$g(x)=[h_2(x,y)]$ に対しその合成積 $f*g(x)$ を考えたい。如何に定義するかと同時に，$f(x)$，$g(x)$ にどのような条件が要請されるかもあわせて考えていく。

2つの分布S，$T \in D'(R^n)$ に対してその合成積が次の様に定義される事は良く知られている：テスト関数$\varphi \in D(R^n)$ に対し2n変数の関数 $\varphi(s+t)$，$s \in R^n$，$t \in R^n$ を考え，これを用いて

$$\langle S*T,\ \varphi\rangle = \langle T^{(t)},\ \langle S^{(s)},\ \varphi(s+t)\rangle\rangle.$$

S，Tの一方の台がコンパクトならこの定義は意味をもつが，ここでは簡単のためいずれも台がコンパクトと仮定する。S＊Tを境界値と考えるとき，その定義関数としてのPoisson 積分は，

$$\begin{aligned}(S*T)(x,\ y) &= < S*T^{(t)},\ P_y(x-t) > \\ &= < T^{(t)},\ < S^{(s)},\ P_y(x-s-t) >> \\ &= < T^{(t)},\ S(x-t,\ y) > \cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

であり，$z \to +0$ のとき$D'(R^n)$ において $T(t,\ z) \to T^{(t)}$ であるから形式的に①は

$$< T(t,z),\ S(x-t,y) > = \int_{R^n} S(x-t,y)T(t,z)dt$$

において $z \to +0$ とした極限と考えられる。

この示唆により，2つの境界値 $f(x)$，$g(x)$ に対し

$$I(x,y,z) = \int_{R^n} h_1(x-t,y)\,h_2(t,z)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。$z \to +0$ のとき $I(x,y,z)$ がある調和関数に収束すれば，その関数によって定義される境界値を合成積 $f * g(x)$ と定義することになる。

積分②を考えるために，定義関数 $h_i(x,y)$, $i=1,2$ に次の条件（＊）を要請する：

定数 $M>0$ が存在して，$|x|$ が十分大きいとき

$$|h_1(x,y)| \leq M|x|^{-n-1}|y|, \quad |h_2(x,y)| \leq M|y| \qquad (*)$$

すなわち $f(x)$，$g(x)$ にはこの条件を満たす定義関数が存在するものと仮定する。台がコンパクトな境界値にはこのような定義関数が存在することが証明できる。

さて，z を固定したとき，$I(x,y,z)$ は R^{n+1}_+ において (x,y) の局所可積分関数であり，また平均値の原理が成り立つ事もすぐわかるので，$I(x,y,z)$ は (x,y) の調和関数である。一方，y を固定したとき $I(x,y,z)$ が (x,z) の調和関数であることも同様にしてわかる。この事から偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} I(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} I(x,y,z)$$

が成り立つ。これを解くと

$$I(x,y,z) = q_1(x,y+z) + q_2(x,y-z)$$

ここで $q_1(x,w)$，$q_2(x,w)$ は解析的関数で，定義域はそれぞれ R^{n+1}_+ と R^{n+1} である。$z \to +0$ のとき

$$I(x,y,z) \longrightarrow q_1(x,y) + q_2(x,y)$$

であり，これは広義一様収束であるから極限は (x,y) の調和関数である。

そこで

$$f * g(x) = [q_1(x,y) + q_2(x,y)]$$

と定義する。

同様に $y \to +0$ のとき広義一様に

$$I(x,y,z) \to q_1(x,z) + q_2(x,-z)$$

であるが，この極限もやはり $f * g$ (x)の定義関数である。実際，

$$\{q_1(x,y) + q_2(x,-y)\} - \{q_1(x,y) + q_2(x,y)\}$$

$$= q_2(x,-y) - q_2(x,y)$$

$$\to q_2(x_0, 0) - q_2(x_0, 0) \qquad ((x,y) \to (x_0, 0))$$

$$= 0$$

である。条件（＊）を満たす定数関数が複数ある場合，そのとり方に依らない事は容易にわかる。

References

[1] Liu, S. "Distributions in $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ as boundary values of harmonic functions," Sci. Sin. Ser. A Vol.27 No.9(1984),897-904.

[2] Stein, E.M. & Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.