直線の軌跡として得られる2次曲面

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第7回

高城彰吾

7.1 今回の状況

平成20（2008）年度の高等科3年生第3学期，βコース（理系選択）の授業の中で，1・2学期に扱った数学Bの空間ベクトルと数学Cの2次曲線の学習を元に，空間における平面や直線の方程式に加え，直線を移動した軌跡としての2次曲面の方程式を求める問題を扱った．2次曲面は，平面上における2次曲線の，空間への自然な発展概念であり，1つ高い次元から眺めることで2次曲線の理解を深めることのできる教材である．また大学の理工系学部への進学者にとって，大学で出会う多様体や多変数関数などへの，高校からの橋渡しの一助ともなりうるであろう．もちろん，現在の学習指導要領にも球面の方程式が含まれているが，円の他にも2次曲線を学んだことを踏まえれば，異なるタイプの曲面にも出会っておくほうが望ましい．とくに直線が移動して曲面が作られるという事実は，身の回りで目にする機会が間々あるにも関わらず普段意識せずにいるものであり，是非注目させておきたい．また，複素正則関数の実数部分である調和関数の具体例を与える双曲放物面は，先々にも重要性をもつ．

本稿では，実際に授業で行なったことがらに，時間の都合で割愛したものも追加して紹介する．

7.2 授業の概要

必要最低限の準備としては，直線の媒介変数表示さえあれば十分で，図形的な操作として直線の移動を考え，パラメータの消去という計算操作だけで曲面の方程式を導くことができるのであるが，空間図形の方程式とイメージに慣れるために，かつての学習指導要領で扱われていた「代数・幾何」の内容である直線や平面の方程式を紹介したのちに曲面に移行するという流れを取った．4時間の授業は次の構成である．

1時限目：空間ベクトルの復習と直線の媒介変数表示
2時限目：法線ベクトルと平面の方程式
3時限目：直線の方程式，平面と直線の関係
4時限目：円錐面［例題］，双曲線回転面（一葉双曲面）の方程式［問題3］

双曲線回転面の方程式を導く計算は，三角関数の合成など関連事項の応用問題としても意味があるが，もうあと 1 時間ほどあれば，平易な計算で到達できる双曲放物面［問題 2］を先に扱う方がよりスムーズであろう．

7.3 問　題

3 時限目までに空間における平面および直線のイメージをつかんだら，いよいよ直線の軌跡を考える．直線自体が媒介変数表示で表されるが，直線を移動するためにパラメータがもう 1 つ必要になる．これら 2 つのパラメータを消去することで軌跡の方程式が得られる．まず，原点を頂点とし z 軸を軸とする円錐面の方程式を求めよう．

［例題］　O を原点とし，平面 $z = 1$ に含まれる円周 $x^2 + y^2 = 1$，$z = 1$ 上の動点を P $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$ とする．θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で変化させたとき，直線 OP の描く図形の方程式を求めよ．

《解答》　原点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を方向ベクトルとする直線 OP を媒介変数 t を用いて表すと

$$x = t\cos\theta, \quad y = t\sin\theta, \quad z = t$$

である．媒介変数 t を消去すると

$$x = z\cos\theta, \quad y = z\sin\theta$$

となるが，さらに公式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて θ を消去すると

$$x^2 + y^2 = z^2$$

となり，方程式

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad （答）$$

を得る．

〈注意〉　この円錐面と yz 平面（$x = 0$）との交線（共有点の描く曲線）は，交わる 2 直線 $y = z, y = -z$ である．また，平面 $z = y + 2$ との交線を求めると，

$$x^2 + y^2 - (y + 2)^2 = 0$$
$$x^2 - 4y - 4 = 0$$

すなわち

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad z = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

となる．これは，平面 $z = y + 2$ 上の放物線を表す．

［問題 1］ xy 平面に含まれる双曲線 $x^2-y^2=-1$，$z=0$ 上の動点を $\mathrm{P}\left(\tan\theta, \dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right)$ とし，点 A を $(0, 0, 1)$ とする．θ を，$0 \leqq \theta < 2\pi, \theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化させたとき，直線 AP の描く図形の方程式を求めよ．

《答》 点 A を頂点とする円錐面 $x^2-y^2+(z-1)^2=0$（ただし頂点以外の平面 $z=1$ 上の点を除く）

以上は，円錐面と平面との交線が 2 次曲線であることの例になっている．

次に，ねじれの位置にある 2 直線の上をそれぞれ一定の速さで移動する 2 点 P, Q があったとき，直線 PQ の描く図形を求めよう．

［問題 2］ 原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_1}=(1,\ 1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を l_1，点 $(-1,\ 1,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_2}=(1,\ 1,\ 4)$ を方向ベクトルとする直線を l_2 とする．また，2 点 P, Q をそれぞれ l_1, l_2 上の動点とし，それぞれの座標を

$$\mathrm{P}\,(s, s, 0),\quad \mathrm{Q}\,(-1+s, 1+s, 4s),\quad \text{ただし } s \text{ は実数}$$

とするとき，直線 PQ の描く図形の方程式を求めよ．

《解答》 方向ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-1,\ 1,\ 4s)$ をとり，媒介変数 t を用いると，直線 PQ は

$$(x, y, z)=(s, s, 0)+t\,(-1,\ 1,\ 4s)$$

すなわち

$$x=s-t,\quad y=s+t,\quad z=4st$$

と表される．

$$x+y=2s,\quad x-y=-2t,\quad z=-2s\,(-2t)$$

であるから

$$z=-(x+y)(x-y)$$

となり，求める図形の方程式

$$x^2-y^2+z=0 \quad \text{（答）}$$

を得る．この図形は双曲放物面と呼ばれ，yz 平面に平行な平面 $x=k$ との交線は放物線 $z=y^2-k^2$ であり，その頂点を zx 平面上の放物線 $z=-x^2$ に沿って放物線を移動した軌

跡に一致する．また，xy 平面に平行な平面 $z=k$との交線は双曲線 $x^2-y^2=-k$ となる．

〈参考〉 実 2 変数関数 $f(x,y)$ に，ラプラス作用素（Laplacian）$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を施したものが恒等的に $\Delta f(x,y)\equiv 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を 2 変数の調和関数という．上の双曲放物面は関数 $z=-x^2+y^2$ のグラフと見られるが，この関数は調和関数の基本的な例となっている．2 変数調和関数は複素 1 変数正則関数の実数部分となるが，上の関数は正則関数 $w=-(x+iy)^2$ の実数部分（ただし i は虚数単位）である．そのときの虚数部分は $-2xy$ であるが，この関数のグラフ $2xy+z=0$ も双曲放物面である．これは上の曲面 $x^2-y^2+z=0$ を z 軸の周りの回転変換

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

によって $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものに一致する．

［**問題 3**］ 2 平面 $z=\pm 1$ のそれぞれに含まれる 2 つの円周

$$x^2+y^2=1,\ z=-1 \quad \text{および} \quad x^2+y^2=1,\ z=1$$

の上を動く 2 つの動点 P, Q の座標を

$$\mathrm{P}\,(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1),\quad \mathrm{Q}\,(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 1)$$

とする．ここで，

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta,\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

であるから，P, Q はそれぞれ z 軸を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ ずれた状態で円周上を回転する．θ を $0\leq\theta<2\pi$ の範囲で変化させたとき，直線 OP の描く図形の方程式を求めよ．

《**解答**》 三角関数の合成を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(-\sin\theta-\cos\theta,\ \cos\theta-\sin\theta,\ 2)\\&=-\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ -\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

であるから，直線 PQ の方向ベクトルとして

$$\vec{d}=\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ -\sqrt{2}\right)$$

をとり，媒介変数 t を用いて直線 PQ を表すと

$$(x, y, z) = (\cos\theta, \sin\theta, -1) + t\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2}\right)$$

すなわち

$$x = \cos\theta + t\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\quad y = \sin\theta + t\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\quad z = -1-\sqrt{2}\,t$$

となる．これから t を消去することで直線 PQ の方程式

$$x = \cos\theta - \frac{z+1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\quad y = \sin\theta - \frac{z+1}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

が得られる．この 2 式をそれぞれ 2 乗したもの

$$x^2 = \cos^2\theta - \sqrt{2}\,(z+1)\cos\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(z+1)^2}{2}\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y^2 = \sin^2\theta - \sqrt{2}\,(z+1)\sin\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(z+1)^2}{2}\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

を加え合わせるが，このとき

$$\cos\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\theta-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であることに注意すると

$$x^2 + y^2 = 1-(z+1) + \frac{(z+1)^2}{2} = \frac{z^2+1}{2}$$

となり，求める図形の方程式

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1 \quad \text{（答）}$$

を得る．この曲面と xz 平面あるいは yz 平面との交線は双曲線であり，xy 平面に平行な平面 $z = k$ との交線は円であることから，双曲線を z 軸の周りに 1 回転して得られる回転体であることが分かる．これは双曲線回転面と呼ばれ，一葉双曲面の特別な場合である．

7.4 まとめ

身の回りを探せば，双曲線回転面を側面とする籐の椅子や吹き抜け天井の双曲放物面による装飾などを見つけることができる．一般に直線の合併集合である曲面を線織面という．2 次曲面は空集合や 1 点となるものを除いて 11 種類あり，楕円錐面・各種の柱面・平行

或いは交わる2平面を除くと，本来の2次曲面は5種類であることが知られている．そのうちで線織面であるものは，双曲放物面と一葉双曲面である[1]．本稿で扱ったものはその特別なものであり，空間図形を不得手とする生徒にも計算のみに依って平面上の2次曲線との関連が見て取りやすいものである一方，類似のものとして一般の曲面を想起させるには十分であろう．大学での勉強への準備として活用しうるものと考える．

参考文献

[1]　斎藤正彦,「基礎数学1　線型代数入門」, 東京大学出版会（1981）, pp. 158–165