余弦定理を見よう.

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第4回

高城彰吾

4.1 今回の問題意識

数学Iで扱う重要な公式の中に，正弦定理と余弦定理がある．これらについて教科書での証明は，次の意味で対照的である．正弦定理では三角形の高さあるいは円周角の定理といった，平面幾何のアイデアを用いるため，公式の図形的な意味が比較的把握しやすいのに対し，余弦定理（正確には第2余弦定理）については，座標を用いた代数計算の結果として得ている場合がほとんどである．なかには表面上は座標平面を用いず，縦と横の長さに分けている場合もあるが，考え方として本質的には座標と変わらない．また，教科書には採用されていない方法として，第1余弦定理から連立方程式を解くことで第2余弦定理を導くものも良く知られているが，やはり代数計算である．もちろん，高校数学一般において代数計算と図形的直観との間に優劣を認めるものではないが，生徒にとりこの2つが通常結びつき難く，公式のもつ図形的な意味がはっきり認識されないことも確かではないだろうか.

また他方，余弦定理は三平方の定理の拡張であると言われる．これは単に，余弦定理において $\cos 90^\circ = 0$ となる特別な場合が三平方の定理である，ということを指して言われているようだが，この2つの定理は成り立ちとしてどのように関係するのか，はっきりさせておくべきであろう．座標を用いた証明では，論理的な順序として余弦定理以前に，2点間の距離を与える三平方の定理を補題として仮定している点も意識しておく.

本稿では，余弦定理の平面幾何を用いた証明をいくつか紹介し，公式の図形的な意味を考察する．どの方法も三平方の定理を前提とするものではなく，三平方の定理を「証明ごと」拡張したものである．説明の簡潔さのために主に鋭角三角形の場合についてのみ記述するが，すべて鈍角三角形の場合にも同様に適用できる．また，直角三角形の場合には三平方の定理の証明となっていることは言うまでもない.

以下，慣例に従い $\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$ とおく.

4.2 等積移動を用いた証明

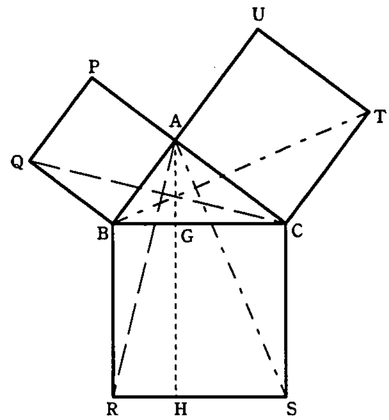

図 1

直角三角形の場合図 1 において,

長方形 BRHG = 正方形 BQPA, 長方形 CSHG = 正方形 CTUA

が成り立つことから, $a^2 = b^2 + c^2$ が導かれる.

この考え方をそのまま鋭角三角形に適用することで余弦定理が得られる. この証明法はわりあいと知られており, [1] などに見られる.

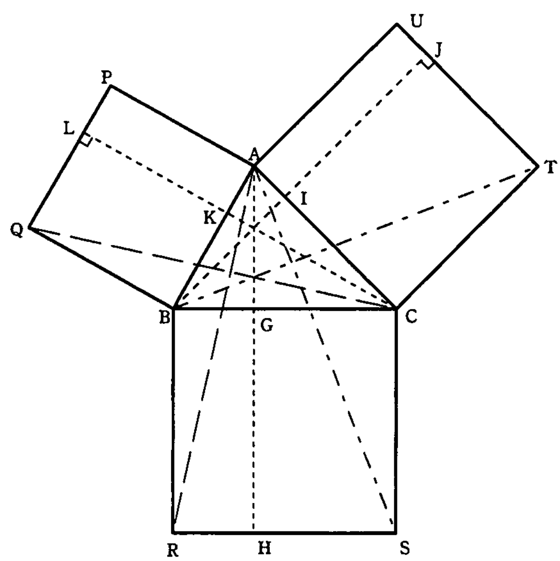

図 2

図 1 と同様に図 2 において,

長方形 BRHG = 長方形 BQLK, 長方形 CSHG = 長方形 CTJI

であり，

$$長方形\ \mathrm{APLK} = \mathrm{AP}\cdot\mathrm{AK} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{CAK} = cb\cos A$$

$$長方形\ \mathrm{AUJI} = \mathrm{AU}\cdot\mathrm{AI} = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAI} = bc\cos A$$

であることから，

$$a^2 = (b^2 - cb\cos A) + (c^2 - bc\cos A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を得るというものである．公式の中の「$-2bc\cos A$」の意味が直観的に把握され，また三平方の定理が余弦定理の特別な場合であることが実感されるであろう．

4.3 相似比を用いた証明

簡潔な証明としてよく知られている次の方法も，余弦定理に拡張できる．

図 3 において，BC を底辺としたときの高さ AP が BC の k 倍であるとすると，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}ka^2$$

である．

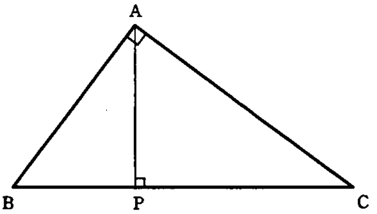

図 3

また，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PBA}$ でありその相似比は $a : b : c$ であるので，

$$\triangle\mathrm{PAC} = \frac{1}{2}kb^2,\ \triangle\mathrm{PBA} = \frac{1}{2}kc^2$$

これらから，$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}kb^2 + \frac{1}{2}kc^2$ すなわち $a^2 = b^2 + c^2$ が示される．

この証明法を若干工夫して鋭角三角形に適用すると，次のようになる．

A から BC に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\mathrm{AH} = k\mathrm{BC} = ka$$

である．また，BC 上に 2 点 P，Q を，

$$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{AQB}$$

となるようにとる．

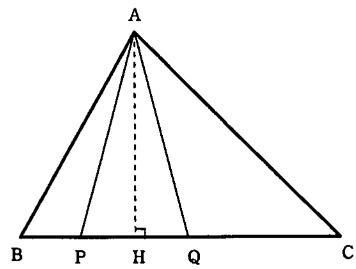

図 4

すると，$\triangle$ABC$\backsim\triangle$PAC$\backsim\triangle$QBA でありその相似比は $a:b:c$ であるので，

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}ka^2,\ \triangle \mathrm{PAC}=\frac{1}{2}kb^2,\ \triangle \mathrm{QBA}=\frac{1}{2}kc^2$$

である．また，

$$\mathrm{PA}=\mathrm{AB}\cdot\frac{b}{a}=\frac{bc}{a}\quad,\quad \mathrm{QA}=\mathrm{AC}\cdot\frac{c}{a}=\frac{bc}{a}$$

であるから，

$$\triangle \mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{PH}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{PA}\cos\angle \mathrm{APC}\cdot ka=\frac{bc}{a}\cos A\cdot ka=kbc\cos A$$

これらを

$$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{PAC}+\triangle \mathrm{QBA}-\triangle \mathrm{APQ}$$

に代入して，

$$\frac{1}{2}ka^2=\frac{1}{2}kb^2+\frac{1}{2}kc^2-kbc\cos A$$

すなわち

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

を得る．

この方法では，最後の項は 2 つの三角形の面積の重複を取り除く意味になる．

4.4.1 方べきの定理を用いた証明　その 1

B を中心として A を通る円を描く．図 5 は C が円の外部にある場合である．

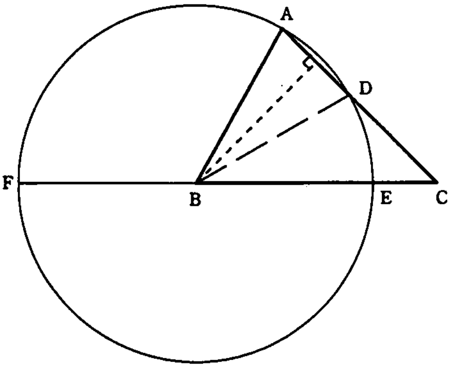

図5

方べきの定理により，

$$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CF} = \mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}$$

である．ここで，

$$\mathrm{CE} = a-c,\ \ \mathrm{CF} = a+c,\ \ \mathrm{CD} = \mathrm{CA}-\mathrm{AD} = b-2c\cos A$$

であるから，

$$(a-c)(a+c) = b(b-2c\cos A)$$

が成り立ち，すなわち

$$a^2-c^2 = b^2-2bc\cos A$$

が得られる．

Cが円の内部にある場合は図6のようになり，ACの延長と円周との交点をDとする．

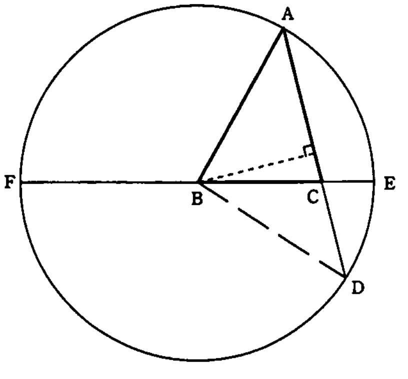

図6

この場合は $\mathrm{CE} = c-a$，$\mathrm{CD} = 2c\cos A-b$ となるが，同様に示される．

4.4.2 方べきの定理を用いた証明　その2

　これは，4.3の証明と本質的に同等である．
図7のように，辺ACにAで接してBを通る円と辺ABにAで接してCを通る円を描く．

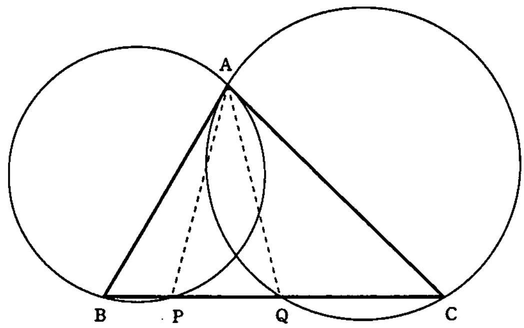

図7

　すると，方べきの定理により，

$$AB^2 = BQ \cdot BC,\ AC^2 = CP \cdot BC$$

であるから，

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= (BQ+CP)\cdot BC \\ &= (BC+PQ)\cdot BC \\ &= BC^2+PQ\cdot BC \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，接弦定理により

$$\angle BAQ = \angle ACQ,\ \angle CAP = \angle ABP$$

であることから，

$$\triangle ABC \backsim \triangle QBA \backsim \triangle PAC \cdots\cdots ②$$

$$\angle A\ (=\angle BAC) = \angle BQA = \angle APC$$

であり，△APQはAP＝AQの二等辺三角形である．
従って，

$$PQ = AP\cos A + AQ\cos A$$

$$PQ\cdot BC = (AP\cdot BC + AQ\cdot BC)\cos A \cdots\cdots ③$$

さらに，②における対応する辺の比

$$AP : AC = AB : BC,\ AQ : AB = AC : BC$$

によって，

$$AP\cdot BC = AQ\cdot BC = AB\cdot AC \cdots\cdots ④$$

①，③，④により

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

が得られる．

4.5 ［問題］トレミーの定理を用いた証明

外接円を描き，AB//CD となるように円周上に点 D をとる．台形 ABDC にトレミーの定理を適用すると，AD·BC = AB·CD＋AC·BD であるが，これから余弦定理を導かれたい．

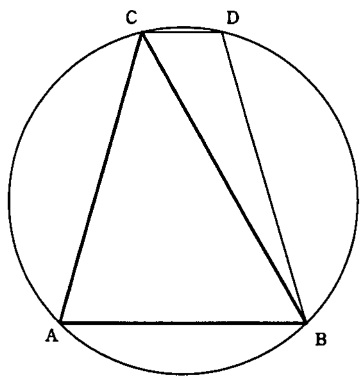

図 8

4.6 おわりに

歴史を踏まえる立場からは，平面幾何に三角比を利用することは議論の対象かもしれない．上に挙げた事がらはそれとは逆に，平面幾何を用いて三角比の理解を深めるもので，高校に平面図形の単元がある現在の学習指導要領においては，興味ある教材になりうると思われる．

参考文献

数学教育学研究会編，新版 数学教育の理論と実際 pp. 199–200, 聖文新社（2003）