ヘロンの公式と角の2等分線

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第1回

髙城彰吾

はじめに

数学の教師をやっていると，日常の授業や生徒の質問の中に，ふと一考することが間々ある．多くの場合，それは学問的発見につながるものでもないが，一段深い考察が求められ，授業の工夫のきっかけになったりあるいはより進んだ内容へのステップであったりする．そういった，ともすると見過ごしがちな材料について忙しい合間の教員室で考えたこと，気づいたこと，調べたことなどを報告し合う場として，この企画を始めようと思う．教員個々の着眼点や問題意識の違いが表現されていくことを望みたい．

1.1 今回の話題

数学I三角比の分野から，次の公式の解釈について述べたい：

ヘロンの公式
三角形ABCにおいて，3辺の長さを $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおく．このとき，三角形ABCの面積 S は，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

で与えられる．

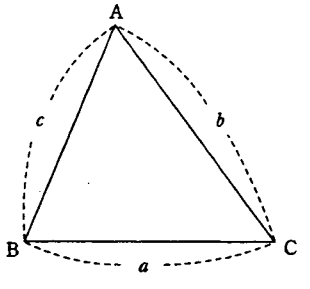

図1

純粋に平面幾何としての証明も知られている．例えば［1, pp. 82–85］を参照されたい．また［2, pp. 210–211］には，三平方の定理の応用として導く方法が挙げられているが，それと同等な，三角比を用いた次の証明から本稿を始める（cf. [3, p. 348]）：

［証明］

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$であるので，$\sin A$を求める．

余弦定理により，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$であるので，

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\cos^2 A\\ &= 1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\\ &= -\frac{a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2}{4b^2c^2}\\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}\\ &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}\end{aligned}$$

従って，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$となり，(1) を得る．

（証明終）

授業で説明する場合，この証明の式の運び，つまり 4 次式の因数分解は易しい計算ではないだろうから，次のように段階的に因数分解を進めると良い：

余弦定理により，

$$\begin{aligned}1+\cos A &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}1-\cos A &= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}\end{aligned}\tag{3}$$

$$\therefore \sin^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

と導くのである．

この公式に限らず，こういった証明を解説した後で，生徒から「この公式って何なのですか」といった素朴な質問（?）を受けることがある．日頃から試験の答案などに，どちらかといえばしっかりした考えを書いている生徒の場合が多く，質問の意味を量りかねてしばし考え込んでしまう．半分の可能性は，使い方や便利さが判らないというものである．がこれは，例題に応用するうちに解消されるし，生徒も自分で解決できる場合が多い．もう半分は，どこか腑に落ちない，事実を理解できてもなんとなくすっきりしないという，感覚的問題だ．こちらは，理解してこその質問なので答え方が難しい．多くの場合，既に知っている事柄との関係に不安を感じているようである．こんな時，その公式の成り立ち，あるいは教師なりの解釈といったものを，教師自身の言葉で話すことは大事である．もちろん，証明そのものは1つの解釈になっているが，他にもその公式が意味するものをなるべく多くの方法で説明したい．そうすることで質問の答えに近づくことができ，単に別証明を与える，という意味合いに留まらないものがあるように，筆者には感じられるのである．

さて，ここからが本論である．ヘロンの公式に先の証明の他に解釈を与える場合，上に示した段階的な因数分解は単なる便法でもないようだ．(2)，(3) から想起されるのは，半角の公式である．どうやら $\angle A$ の2等分線に何か意味がありそうに思われる．2倍角・半角は教科書では数学 II の内容だが，三角比の範囲に限れば，高1にとっても難しくない．

1.2 三角比の2倍角・半角の公式

0～90° の角に対する2倍角と 0～180° の角に対する半角の公式は，図2からすぐに読み取れる．二等辺三角形 APQ の面積を求める式から $\sin\theta$ の2倍角，余弦定理の式から $\cos\theta$ の2倍角と $\angle$A の半角の公式が得られる．

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,\ \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta.$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2},\ \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}.$$

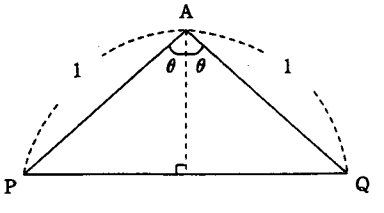

図2

1.3 等積二等辺三角形による解釈

2倍角・半角の公式を念頭に置くと，(2)，(3) により

$$\sqrt{s(s-a)} = \sqrt{bc\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$$

$$\sqrt{(s-b)(s-c)} = \sqrt{bc\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}$$

である．(cf. [4, p. 160 定理12])

図3のように，∠A を頂角とし，△ABC と等面積の二等辺三角形 AB'C' を考えると，相等しい2辺の長さは b, c の相乗平均：

$$AB' = AC' = \sqrt{bc}$$

であるから，B'C' の中点を M として[†]

$$AM = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{s(s-a)}$$

$$B'C' = 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2} = 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

であることにより，次を得る．

解釈 2

∠A を頂角とし，三角形 ABC と面積が等しい二等辺三角形 AB'C' は底辺が B'C' = $2\sqrt{(s-b)(s-c)}$，高さが $AM = \sqrt{s(s-a)}$．

従って，その面積は

$$S = \frac{1}{2}AM\cdot B'C' = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

である．

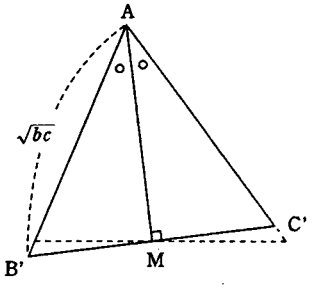

図3

[†]M は B'C' の中点であり，BC 上には一般にない．この節および次節の結果と，相加平均・相乗平均の関係により $AM \geq AD$ である．

1.4 調和点列による解釈

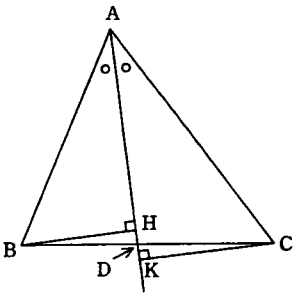

図4

変形せず，三角形ABC上で考える立場では，図4のように∠Aの2等分線ADに点B，Cから垂線BH，CKを下ろすことにする．このとき，点AはHKを$c:b$の比に外分し，またBD : CD = $c:b$により点Dは同じHKを$c:b$の比に内分している．こういう場合，ADはHKを調和に分ける，あるいは4点 A，D ; H，Kは調和点列をなすという．このとき3つの数AH，AD，AKが調和数列をなし，ADはAHとAKの調和平均，即ち逆数の相加平均の逆数となる［5, p. 443］．ここで，

$$AH = c\cos\frac{A}{2} = c\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$
$$= c\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{s(s-a)}$$

であり，同様に$AK = \sqrt{\frac{b}{c}}\sqrt{s(s-a)}$であることから，その調和平均として，

$$AD = \frac{2}{\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{b}}}\sqrt{s(s-a)}$$
$$= \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}$$

を得る．このADを△ABD，△ACDの共通の底辺と考えると，それらの高さBH，CKの和は，

$$BH+CK = (c+b)\sin\frac{A}{2} = (c+b)\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$= \frac{b+c}{\sqrt{bc}}\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

である．

以上まとめて，

解釈 3

∠A の 2 等分線 AD に点 B，C から下ろした垂線を BH，CK とすると，

$$AD = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}$$

$$BH+CK = \frac{b+c}{\sqrt{bc}}\sqrt{(s-b)(s-c)}\,.$$

従って面積は，

$$S = \frac{1}{2}AD(BH+CK) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

である．

参考文献

[1] 野崎昭弘・何森 仁・伊藤潤一・小澤健一，図形・空間の意味がわかる，ベレ出版（2003）
[2] 笹部貞市郎，幾何学辞典第二版，聖文社（1976）
[3] 笹部貞市郎，三角法辞典，聖文社（1964）
[4] 笹部貞市郎編，定理公式証明辞典，聖文社（1970）
[5] 小原實晃，アポロニウスの円と調和点列 サブファイル，話題源数学 上巻 p. 443，東京法令出版（1989）