星状関数についての一考察

千 葉 紀

(1) 基礎事項

初めに，いくつかの基本的な事項をまとめておく。

(1－1) f (z) が領域D内で正則，単葉ならば，$f'(z) \neq 0$である。

この性質に基づいて，これからは単葉関数として，すべて

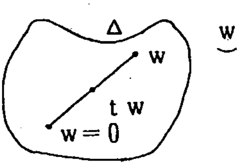
$$f'(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の形のものを取り扱っても一般性を失わない。

(DEF.) 領域Δをw平面上の点w＝0を含む領域とする。この領域Δが点w＝0に関する星状領域であるとは，

$$w \in \Delta \Rightarrow tw \in \Delta \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

が成り立つときをいう。



(1－2) 関数$w=f(z)=z+\Sigma a_n z^n$が $|z|<1$で正則，単葉とし，$|z|<1$が 点w＝0に関する星状領域Δに写像されたとすれば，

$|z|<r$ $(r<1)$ は点 $w=0$ に関する星状領域 Δ_r に写像される。

簡単に証明を述べておく。

(PROOF) 仮定から，$\Phi(z)=tf(z)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ は，z が $|z|<1$ 内を動くとき，Δ 内に含まれる。

いま，$w=f(z)$ の逆関数を，$z=F(w)$ とすると，$|F(w)|<1$ で

$$\Phi(z)=F(tf(z))$$

は $|z|<1$ で正則，かつ $\Phi(0)=F(0)=0$ である。

したがって，Schwartzの定理より

$$|\Phi(z)|\leqq|z| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで，$|z|<r$ が領域 Δ_r に写像されたとすれば，$w\in\Delta_r$ のとき，

$$|F(w)|<r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

いま，w_1 を Δ_r 内の任意の点とし，$w_1=f(z_1)$ とすると，$|z_1|<r$．

したがって，(1)から，$|\Phi(z_1)|=|F(tf(z_1))|=|F(tw_1)|<r$

(2)から　$tw_1\in\Delta_r$ となる。よって，領域 Δ_r は，点 $w=0$ に関する星状領域であることが証明された■

Darbouxの定理を利用して，次のことを示しておく。

(1－3)　$w=f(z)=z+\Sigma a_n z^n$ を $|z|<1$ で正則な関数とする。

このとき，$|z|<1$ が，点 $w=0$ に関する星状領域 Δ に単葉に写像されるための必要十分条件は，

$|z|<1$ において，

$$\mathrm{Re}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]<0$$

となることである。

(PROOF) $|z|=r$ (<1) の像を Γ_r とする。z が $|z|=r$ 上を一周する

とき，$|z|<r$の写像される領域Δ_rが星状であるとき，wはΓ_r上を正の方向に一周する。argwは常に増加する方向に変化するから，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg w>0$$

逆に，これが成立しているならば，星状領域であることも容易にわかる。

$z=re^{i\theta}$のとき，

$$z=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d\log f(z)}{d\log z}=\frac{d\log|f(z)|+i d\arg f(z)}{d\log r+i d\theta}$$

$|z|=r$の接線方向に微分すると，$d\log r=0$であるから，

$$z=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d\log|f(z)}{i d\theta}+\frac{d\log f(z)}{d\theta}$$

$$=\frac{d\arg f(z)}{d\theta}-i\frac{d\log|f(z)|}{d\theta}$$

よって，

$$\mathrm{Re}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=\frac{d\arg f(z)}{d\theta}>0$$

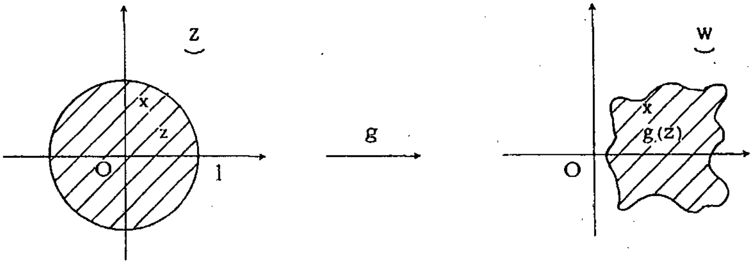
rは任意であるから，（1－3）は証明された■

これに基づいて，新しい関数

$$g(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

について調べてみる。g（z）はもちろん，$|z|<1$で正則であることは容易にわかる。

f（z）が$|z|<1$で正則，単葉ならば，$|z|<1$は g（z）により，右半平面の部分領域に写像される。



単位円板$|z_3|<1$を右半平面$\mathrm{Re}\, z_2>0$に写像する一次変換は

$$z_2=\frac{1+z_3}{1-z_3}$$

で表される。これをz_3について解いて，$\mathrm{R_e}\, z_2>0$

から$|z_3|<1$への一次変換

$$z_3=\frac{1-z_2}{1+z_2}\underset{\mathrm{def}}{=}\Phi(z_2)$$

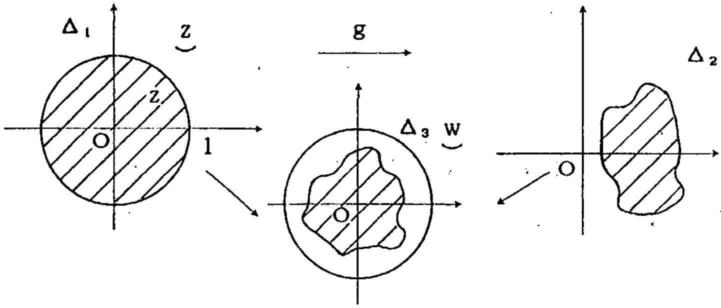
が得られる。

Δ_1：$|z|<1$の$g(z)$による像をΔ_2とし，ΦによるΔ_2の像をΔ_3とする。このとき，

$$\Phi(z)=\frac{1-g(z)}{1+g(z)}$$ したがって

$$g(z)=\frac{1+\Phi(z)}{1-\Phi(z)}$$

ここで，$\Phi(z)$は$|z|<1$で正則で，かつ$g(0)=1$から$\Phi(0)=0$である。



そこで，以下このΦ（z）をw（z）とし，f（z）を領域$|z|<1$を有限な面積をもつ領域に写像する星状関数とし，その係数について，w（z）に関連して調べていくことにする。

（2）星状関数の係数評価についての考察

（2－1）　$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$　は$|z|<1$で星状であるとし，

$|z|<1$が面積がΔの領域に写像されるとする。そのとき，

$$|a_n| \leqq \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

（PROOF）

〔1〕で述べたことから，

$$\frac{z f'(z)}{f(z)}=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

$$w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n z^n$$

$$|w(z)|<1 \quad (|z|<1)$$

とおくことにする。このとき，

$$zf'(z)(1-w(z))=f(z)(1+w(z))$$

つまり，

$$(zf'(z)+f(z))w(z)=zf'(z)-f(z)$$

である。巾級数にすると，

$$\{2z+\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)a_kz^k\}\sum_{k=2}^{\infty}w_kz^k=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_kz^k \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

ここで，両辺の z^n の係数を比較して，

$$2w_{n-1}+3a_2w_{n-2}+\cdots\cdots\cdots+na_{n-1}w_1=(n-1)a_n$$

$$(n\geqq 2)$$

つまり，a_n は $a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}$ のみに依存している。

そこで，$n\geqq 2$ のとき

$$左辺=\{2z+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)a_kz^k\}w(z)+\{\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)a_kz^k\}w(z)$$

$$右辺=\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)a_kz^k$$

と変形して，更に

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)a_kz^k-\{\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)a_kz^k\}w(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k$$

とすると，

$$\{2z+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)a_kz^k\}w(z)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(k+1)a_kz^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_kz^k \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

と書くことができる。

ここで，一般に　$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n \quad (|z|<R)$

のとき，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|d_n|^2r^{2n}\ (r<R)$$

であるから，右辺＝h（z）とおくと，

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2\ |a_k|^2\ r^{2k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}|b_k|^2\ r^{2k}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\{2z+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)\ a_kz^k\}\ w(z)\ |^2 d\theta$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|2z+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)\ a_kz^k|^2\ d\theta$$

$$=4+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2|a_k|^2\ r^{2k}$$

整理して，

$$\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)^2|a_k|^2\ r^{2k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2\ r^{2k}$$

$$<4+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2\ |a_k|^2\ r^{2k}$$

が成り立つ。

ここで，$r\to1$として，

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2\ |a_k|^2\leqq4+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2\ |a_k|$$

書きかえて，

$$(n-1)^2|a_n|^2\leqq4+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2|a_k|^2-\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)^2|a_k|^2$$

$$=4+\sum_{k=2}^{n-1}k\ |a_k|^2$$

よって,

$$(n-1)^2 |a_n|^2 \leqq 4 \left(1+\sum_{k=2}^{n-1} k\,|a_k|^2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

次に, $|z|<1$ の f による像の面積 Δ は, 等式

$$\Delta=\int_0^1 \int_0^2 |f'(re^{i\theta})|^2\, r\, drd\theta$$

で与えられる。ここで,

$$f'(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1}$$

であるから,

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta=2\pi\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-2}\right)$$

したがって,

$$\Delta=2\pi\int_0^1 \left(1+\sum_{k=2}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-2}\right) r\,dr$$

$$=\pi\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|^2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(4)から不等式

$$(n-1)^2 |a_k|^2 \leqq 4\cdot\frac{\Delta}{\pi}$$

が成り立つ。ゆえに, 不等式

$$|a_n| \leqq \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \quad (n=2,\ 3\cdots\cdots)$$

が証明された■

(3) (2－1) についての考察

(2－1) で得られた係数評価が最高のものであるかという問題について考えてみたい。

3．1°） $F=\{f \mid f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_k z^n$， f は $|z|<1$ を面積がΔとなる領域に写像する星状関数$\}$

とする。

いま，

$$A_n(\Delta)=\sup|a_n|$$

（この sup はFに含まれるすべての f について考えているものとする）とおくと，(2－1) から

$$A_n(\Delta) \leqq \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \quad (n=2,\ 3\cdots\cdots)$$

が成り立つ。そこで問題点は，この評価が最高のものであるかどうかということである。この問題点については，

$$A_n(\Delta) \geqq \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{n}} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となるようなΔが存在することを示して，(2－1) の評価がほとんど最高のものであることを述べる。

いま，関数 $f(z)=z+\dfrac{z^n}{n}$ $(n \geqq 2)$ を考えてみる。

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\frac{(n-1)z^n}{nz+z^n}$$

$$\left|\frac{(n-1)z^n}{nz+z^n}\right|<\frac{n-1}{n-1}=1 \qquad (|z|<1)$$

から，$\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$

となり，f は $|z|<1$ で単葉，かつ星状な関数であることがわかる。

(5)によって

$$\Delta=\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)，すなわち，\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}=1+\frac{1}{n}$$

また，

$$|a_n|=\frac{1}{n}=\frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\cdot\frac{1}{n}\;\frac{n-1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}$$

$$=\left(\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\cdot\frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}$$

$$\min_{n\geqq 2}\left(\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=\frac{2-1}{2\cdot 2}\sqrt{\frac{2}{2+1}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

このことから，

$$A_n(\Delta)=\sup|a_n|\geqq\frac{1}{2\sqrt{6}}\;\frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\cdots(1)$$

つまり，面積が $\Delta=\pi\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ になるような領域に $|z|<1$ を写像る星状関数について，(1)が成り立つ（面積を固定）。

3．2°）関数を一つ固定して考えたとき，（2－1）により，

$$a_n=0\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to\infty)$$

が言える。この評価が最高のものであるような例をつくってみよう。

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

が有界かつ無限個の n について　$a_n>\dfrac{1}{n}$ となる星状関数をつくってみることにする。

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \neq 4^n) \\ 1 & (n = 4^n) \end{cases}$$

とすると，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ は収束する。そこで，

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

とおく。

ここで，

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = h(z) \text{ かつ，}$$

$$\log f(1) = \int_0^1 \frac{h(z)-1}{z} dz$$

を解くと，

$$\int_{f(1)}^{f} \frac{df}{f} = \int_1^z \frac{h(z)-1+1}{z} dz \text{ から，}$$

$$\log f(z) - \log f(1) = \int_1^z \frac{h(z)-1}{z} dz + \log z$$

よって，

$$f(z) = z f(1) \exp \int_1^z \frac{h(z)-1}{z} dz$$

$$= z \exp \int_1^z \frac{h(z)-1}{z} dz$$

$|h(z)| > 0 \quad (|z| < 1)$ から，$f(z)$ は $|z| < 1$ で単葉，かつ星状である。また，$\sum \frac{b_n}{n} < \infty$ から

$f(z)$ は $|z| < 1$ で有界である。

$$f(z)=z\left\{1+\Sigma\frac{b_n}{n}z^n+\frac{1}{2!}\left(\Sigma\frac{b_n}{n}z^n\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$ とおくと，

$$a_n=\frac{b_{n-1}}{n-1}+\alpha\geqq\frac{b_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{n-1},\quad(n=4^m+1)$$

この例と，（２－１）から，

$$a_n\equiv o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to\infty)$$

以上，星状関数について（２－１）を中心に考察してきた。条件を部分的に修正することによって，凸関数について次のことが成り立つことが証明できる。すなわち，

f（z）を｜z｜＜１で単葉で，｜z｜＜１を有界な凸領域に写像する関数とするとき，

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to\infty)$$

参考文献

Complex Analysis　Third Edition Lars V. Ahlfors (Mc Graw-Hill)

複素解析　高橋礼司（数学講座８　筑摩書房）

近代函数論　岩沢健吉（岩波書店）