

コンピュータによる図形環境における中学生の数学学習活動に関する研究 —LOGO, Cabri—geometryを用いて—

数学科 山本 泰 嗣

1. 研究目的

平成元年度に告示された新中学校指導要領において思考力の育成を一層重視するために図形分野で論証をより充実することに改訂された。ところが現行の指導要領下でも中学生にとっては演繹的証明（以下証明とする）は難しい課題の一つである。特に図形の証明が難しい理由は、正確な作図によって証明すべきことが図に表れてしまって証明の必然性を生徒が感じないこと、与えられた条件を保ったまま試行錯誤がしにくいこと、解法手順を探るだけでは証明はできないこと等が挙げられよう。

図形学習は論証がより強調されているが、探究課題としても十分に扱えるものでもある。正田が言うように図形学習では直観力・洞察力・想像力そして論理的思考力を養う必要がある。直感力・洞察力・想像力は図形を探究課題として扱うことで育成ができるだろう。そして、これからの力があって初めて図形を全体的に捉えることができ、論理的思考力によってそれを裏付けることができる。（正田1989）つまり、図形を様々な方法や方向から自由に探究することで図形の持つ概念を把握することになるし、図形の持つ要素を全体と関連づけながら洞察することが直観力・洞察力・想像力を育成することにつながると言えよう。

論理的思考力が必要となる証明を習得するためには、図形の探究をするときに試行錯誤などを通じて具体的な事柄を予測し発見していく帰納や類比の考え方が準備段階で育成す

ることが必要となる。これができるためには直観力や洞察力そして想像力も必要となる。だから、直観力や洞察力そして想像力を養うことは論理的思考力を必要とする証明への準備にもなるのである。

コンピュータを数学学習に利用する方法はいろいろある。そのひとつに、数学を学習する場をコンピュータによって与えるという利用法がある。このようなコンピュータによって提供される数学学習の場のひとつに「マイクロワールド」がある。LOGOの開発者であるS.Papertはマイクロワールドにおける生徒の学習活動は次のようになると述べている。『生徒が課題に関して直観的に考えたことをコンピュータに入力してやる。すると、コンピュータはそれを具体的に画面上に情報として表現する。それを生徒が読み取ること、自分の直観の曖昧だった点や正しかった点、あるいは間違っていた点を確認することができる。そこから得た情報を基にして洞察し類推することで、また新たな考えが浮かぶ。』（S.Papert 1989）この点から、マイクロワールドにおける学習は図形の探究学習に利用することができる考えた。

道具を使うことで人間は自分の能力が増大されたり、援助されているように見える（電卓を使うことで計算能力が増大したように見えること）。しかし、人間は電卓を使いこなすという新たな「課題」がもたらされる。例えば、計算という課題が電卓を使いこなすという課題に置き変わっているのである。（D.A. Norman 1990）

コンピュータを学習環境を与える道具として利用することでマイクロワールドが提供される。マイクロワールドでの学習活動はその環境に与えられた方法で学習しなければならない。ということは、従来の学習活動のような活動が別の活動に置き変わるはずである。

本研究の目的は二つある。第一に、マイクロワールドにおいて生徒が図形の性質探究学習をすることで、従来のコンピュータを使わない学習と比べて何が変わるのかを調べることである。第二に、性質の異なる二つのマイクロワールドにおける学習を比較することで、マイクロワールドの違いが生徒の図形の性質探究学習に与える影響を調べることである。これらの目的を実験的に研究することで、図形の探究学習の場としてのマイクロワールドが生徒の学習活動に対して与える影響を調べることができると思われる。

2. LOGOのマイクロワールドについて

LOGOの持つマイクロワールドはどのようなものか、またそれが図形の性質発見にどのような環境を与えるのかについて述べる。

2-1. 基本命令

LOGOはプログラムによってタートルを制御し、そのタートルが描いた軌跡によって作図を行う。LOGOは他の数学学習ソフト、特に図形学習ソフトとは趣を異にしているところがある。というのも、大抵の図形学習ソフトはあらかじめ「線分を引く」とか「角を二等分する」というようなコマンドがメニューの中に設けられており、その中から自分がやりたいことを選択するのであるが、LOGOの場合コマンドが存在するメニューというものがない。そのコマンド選択の代わりになっているのがプログラミングである。LOGOのマイクロワールドでは、タートル制御の基本命令が用意されている。これらは「プリミティブ」と呼ばれている。このプリミティブを用いてプログラミングをすることでタート

ルに様々な動作をさせて作図する。言い換えれば、タートルを制御する命令を作ることで、マイクロワールド内での活動ができるようになるのである。

2-2. インタプリタ型言語

プログラミング環境として LOGO は BASIC と同じインタプリタ型の言語である。インタプリタ型というのは FORTRAN, Pascal, C などのコンパイラ型のコンピュータ言語と環境が違う。コンパイラ型は、プログラムを実行する際に一度にそのプログラム全体を機械語に変換してから実行するような言語のことである。これに対してインタプリタ型言語は、実行の際にプログラムの一行ごとを機械語に変換しながら一行ごとに実行し、そして一行ごとに表示する。従って、インタプリタ型の言語はコンパイラ型言語よりプログラムの実行速度は遅いが、プログラムのバグ（エラー）がどこに存在しているのかを見つけやすい。LOGOがインタプリタ型であることは、コンピュータ言語に対して詳しくない生徒でもプログラミングに親しみやすさが生まれると同時に、LOGOの特徴でもある「対話しながらのプログラミング」を可能にしている。プログラムの実行が一行ごとであるので、実行結果を見ながら平行してプログラミングをすることが可能である。ということは、自分の思考を表現したプログラムを実行して、その結果がどうなるのかというフィードバックが即座に得られることになる。これは、試行錯誤を繰り返しながら学習を進められるという点において、コンパイラ型の言語よりも優れているといえるだろう。

2-3. 構造化

LOGOは手続きの構造化が可能である。手続きの構造化とは次のようなことである。頻繁に使うようなある作業を表したプログラムを一つの手続き（関数）として宣言することで、その手続き名（関数名）を書くだけで手続き内のプログラムの処理ができるように

図過程を一段階ずつ見せてくれるのである。これは、自分が立てた方針を変更するときに、どの段階までは今までの方針を使っていけるのかを確認したり、自分の活動から予想される結果と実行結果がどこで食い違いを生じているのかを見たりするときに用いられる。このような機能は、従来の紙と鉛筆の作図では不可能なことであった。(というより、それに集中していることはできなかった。)自分の活動をもう一度見るということは、自分で立てた方針を再考するときや仮説を検討するとき、自分の問題解決のアプローチを再考するときなどに強力な手段になりうる。

3-3. 図形の連続的変形

Cabriはマウスを使って操作することは述べたが、Cabriにおいてマウスがもっとも活躍するのが作図した図形を変形させられるということである。マウスを操作して描いた図の頂点をあたかも持って引っ張るがごとく、リアルタイムに変形させることができるのである。これは、作図した図のみに縛られて考えが発展しなくなるということも防げるし、図を変形することで自分が描いた図以外の場合も調べることができる。つまり、図形が動的に表現されることで、図形を動的に把握することを可能にするのである。作図した図に縛られて学習活動が滞ってしまう(Yerushalmy, Chazan 1990)と新たな問題解決への方策や方針の変更ができなくなってしまうたり、特殊な図のときにのみ成立する事柄を一般的な図形でも成立するように考えてしまったりする。ところが、図形を動かして動的に捉えられるということは、何が不変要素で何が可変要素なのかを実際に目で見て捉えることができる。このことは簡便な作図機能とあいまって常に一般的な場合を意識することができるようになる。

3-4. 測定機能

Cabriは辺の長さや角度を測定し表示することができる。これは、紙と鉛筆による作図

では普通行わない活動であった。なぜなら、従来は辺の長さや角度を求めることが目的となっていたからである。ところが、Cabriのマイクロワールドでは辺の長さや角度を測定して、それを既知の情報として図形の性質を探索することができるのである。LOGOの場合、辺の長さ(タートルの前進する距離)を最初に規程して作図を行うのであるが、Cabriは描いた図に対して辺の長さを測定できる。上述の変形機能と同時に用いることで、描いた図をより特殊な形(ex.平行四辺形から正方形)へ変化させたりして、不変である性質を調べたりできる。従来は与えられていなかったこのような数値データは生徒の試行錯誤活動時に有効な情報となる。

3-5. まとめ

マウスによるコマンド選択形式での作図は、作図という活動を非常に簡便なものにする。作図するときの感覚はコンパスと定規を使って描くのと同じ様な感覚である。しかし、描いた図を変形できるということは、容易にいろいろな場合を調べることができるし、描いた図形を動かすことで何が変化するのか、何が変化しないのかを実際に目でみて確かめることができるようになる。また、3-2で例を上げたように、プロフィール機能を用いて自分の作図手順を確かめて仮説の変更や問題解決の方針の変更等ができる。つまり、方針や仮説の検証が図を通して生徒に情報が伝わるのである。以上のことから、Cabriは従来と同じような作図感覚で作図しながら、描いた図を動的に捉えた作図の順序を見たりすることで、今までは得ることのできなかった情報(図形の持つ不変要素など)を図から生徒に与えることを可能にする図形環境を提供すると言えよう。

4. 実験結果と分析

研究目的を達成するために、星型多角形の頂角の和を求める問題を用いて茨城県の公立

中学校2年生9人を被験者にして実験を行った。

星型多角形の頂角を求める問題は非常に興味深い。作図によって課題内容を具体的に把握しやすいし、明確で単純な規則を持っている。そして証明の導入として用いられることが多い問題である。しかし、星型は図形の捉え方や頂角の求め方が多様にあるので、性質探究課題としても用いることができる。本研究ではこの点から実験に使用することにした。

実験問題は次のように設定した。

問題1. 星型5角形を描いてください。そのときの頂角の和は何度になりますか。

問題2. 星型7角形を描いてください。そのときの頂角の和は何度になりますか。

問題3. その他の星型多角形を描いてみて、気づいたことをすべて書き出してください。どんな細かなことでも結構です。

星型多角形の問題は次のようなプロセスで解決される。

[作図] → [問題解決活動] → [発見事項]

また、本実験を通して目的に沿って

- ・一般化
- ・証明の必要性

について考える。そこで次の5つの点を観察分析項目として設けた。

- ・作図の仕方
- ・問題解決活動
- ・発見事項
- ・一般化
- ・証明の必要性

思考プロセスの質的な面を見るために、分析にあたっては紙と鉛筆（以下PPとする）、LOGO、Cabriの各処偶において見られた実験結果（解答用紙、VTR）並びにインタビューのプロトコルを参考にして解釈を加える方法

を取った。

以下に、観察項目別の結果と分析を挙げる。

なおインタビューにおいて、

I：インタビュアー

P(PP), L(LOGO), C(Cabri)：各処偶の生徒（被験者）を示す。

4-1. 作図の仕方

作図を発展させるときの図の見方が変わった。

| | |
|-------|----------------------------------------------------------|
| PP | 星型5角形の作図によって、それ以降の星型の作図のイメージを把握する。 |
| LOGO | 星型5角形の作図の手続きの変数部分を変更することで、それ以降の星型多角形の作図を行う。 |
| Cabri | 星型5角形の作図によって、それ以降の星型作図のイメージを把握する。描いた図を動かしてイメージどおりかを考察する。 |

星型5角形を作図するときには、どの処偶でも生徒が自分で持ったイメージから描いたので、差異はみられなかった。しかし、星型7角形を描くときには各処偶によって図の見方が変わった。次に生徒の代表的な考え方をインタビューから抜粋する。

P：〔星型〕5角形はこうだから、〔星型〕7角形はこんなふうになると思った。

（図1参照）〈中略〉

なんか「とげとげ」してる感じだったから。

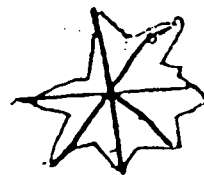


図1 PP処偶の生徒の星型のイメージ

.....
 L：星型5角形はこのプログラムで描けたから、辺の数と角度の部分を変えればいんだと思って。

C：（星型7角形の作図のとき）〔星型〕5角形の図を見て、中に〔凸型〕5角形があって、その辺を伸ばしたら星型になっていることに気づいたから。

この後Cabri処遇の生徒は、図を動かすことで星型7角形であると確信した。

PPの場合、星型5角形を描いたときに、持ったイメージをよりどころにして類推を働かせ作図している。出来上がった図に関して正しいかどうかを判断する材料としては、そのイメージと照らし合わせることで確認している。だから作図に失敗することもあった。

LOGOの場合は星型5角形のプログラムを作るのに何度も試行錯誤して非常に時間を費やす。ところが、プログラムが完成すると、それ以降の星型を描くには図やイメージをよりどころにはしない。星型5角形を描くプログラムの辺数、角度の部分を幾つにするかというように、プログラムの解析をしてそれ以降の星型を描こうとする。

Cabriの場合はPPと同じように星型5角形を描いたときのイメージをよりどころにして作図する。そして、正しい作図ができたかどうかは、描いた図形を動かしてイメージと照らし合わせて判断する。（図2～4参照）

生徒の作図過程を見てみるとコンピュータを利用してマイクロワールドで学習する方が、PP環境に比べて試行錯誤活動が頻繁に

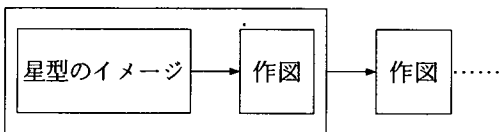


図2 PP環境における星型の作図過程

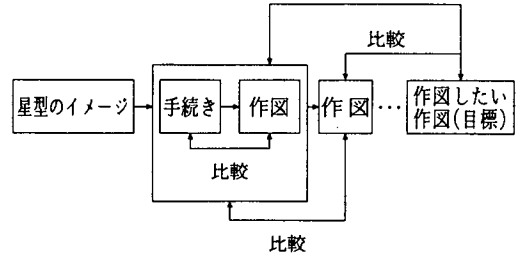


図3 LOGO環境における星型の作図過程

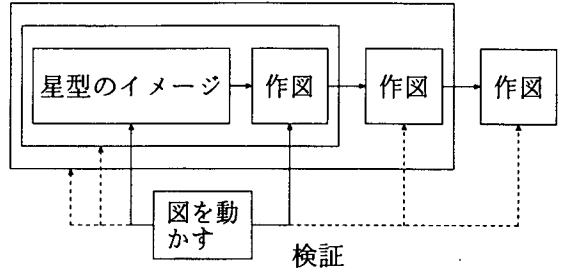


図4 Cabri環境における星型の作図過程

行われていると言えよう。マイクロワールドにおける学習では、生徒の仮説検証を実際の作業を通して見るのがPP環境よりも簡便だからだろう。

4-2. 問題解決活動

図形を多角的に捉えて各環境に応じて多様なアプローチを生み出す。

| | |
|-------|---------------------------------------|
| PP | 角度を数値として分かっている多角形に分解する。 |
| LOGO | プログラミングの試行錯誤。 |
| Cabri | 角度測定コマンドで角度を表示して見当をつけてから、多角形に分解して考える。 |

PPは角度に関して数値データがないので、角度の大きさが既知の図形に分解して考えることで、星型の頂角の和を求める。

LOGOは星型の図を描けるプログラムを作るのにいろいろと試行錯誤する。例えば角度を表す部分に適当な数値を代入して、それを10度ずつ増やしたりして出来上がった図で確認する。図が完成するとプログラムから頂

角の和を求める。

Cabriは角度測定コマンドで各頂角の大きさを表示させていただいた見当をつける。現象が分かったところで、多角形に分解して現象を裏付けるものを見つけ出して頂角のを求める。

角度を数値データとして知ることが可能か、描いた図を動かせるかなどのマイクロワールドの持つ特徴によって、問題解決に多様なアプローチを生み出していると言えよう。

4-3. 発見事項

| | |
|-------|-------------------------------------------------------------|
| PP | 図形構成要素（辺数・頂点数）と頂角の和を関連づけた公式を導く。 |
| LOGO | 図形構成要素（辺数・頂点数）と頂角の和を関連づけた公式を導く。 辺の数とタートルの回転角を関連づけた公式を導く。 |
| Cabri | 図形構成要素（辺数・頂点数）と頂角の和を関連づけた公式を導く。 |

PP, Cabriはともに辺や頂点の数と頂角の和を関連づけた公式が成立しそうだということを見出した。

LOGOはPP, Cabriでも発見した公式以外に、タートルの回転角と辺の数とを関連づけた公式も発見している生徒がいた。

4-4. 一般化

求めた結果が一般的に成立する根拠として、格々の環境に応じた活動を通して考える。

| | |
|-------|---------------------------------|
| PP | 一般的な多角形に分解することから。 |
| LOGO | 星型が描けるように作ったプログラムから。 |
| Cabri | 作図した図形を動かして、それから一般的な多角形に分解したから。 |

星型5角形について「あなたが描いた形以外の星型5角形でも、あなたの求めた答になりますか？」という質問をしたところ、どの処遇でも一般的な多角形に分解できるという答で、差異がみられなかった。しかし、星型7角形については上記のような差がみられた。次に生徒の代表的な考え方をインタビューから抜粋する。

.....
P：先ほどの星型5角形の場合と同じように、特別な場合の図形のときにしか成立しないような条件は使わなかったからです。

.....
L：角度をちょっと変えたりして「描いて」いるうちに、角度の和が、540度にさえなればいいんじゃないかということに気づいて。

〈中略〉

私の方法だと角度の和を求めるときに辺の長さは全然関係なかったですし、1つの角の大きさに意味があるのではなく、7つの角の和さえ540度になればよいことが分かりました。

.....
C：角度を表示させながら図形を動かしてみると、辺の長さが変わっても「頂角の和は」どうやら180度になるらしいことが分かったから。

I：でも、さっきは「それだけでは心配だ」って言ってたよね。

C：はい。それから一般的な場合を考えるために分解したんです。

.....
PPは星型5角形のとおりと同じように、一般的な多角形に分解できるからという理由だった。LOGOはプログラミングの過程で、星型の頂角の和は辺の長さに依存しないことに気づきそれを多様な例で確かめた。そして星型の頂角の和は辺（頂点）の数によることを確信した。

Cabriは角度測定コマンドを使いながら、作図した図形を動かすことで多様な形の星型

を調べたことになり、そこから星型の頂角の和が一般的に成立することを確信した。それを裏付けるためにPP同様多角形への分解を考えた。

ここでも試行錯誤活動が頻繁に行われている。マイクロワールドにおける学習では、マイクロワールドにおける学習活動を通じて得た知識を基にして試行錯誤が進められている。この知識とは、例えば「頂角の和が辺の長さに依存しない」ことをLOGOではプログラミングを通して把握したし、Cabriでは図形を動かすことで把握したということである。

LOGOのマイクロワールドで生徒は、プログラミングを通じて図形の持つ一般性を探究し、かつ理由づけまで考えていると言えよう。これはLOGOのマイクロワールドで仮説・検証・発見・理由づけを行うことが可能だと思われる。一方、Cabriのマイクロワールドで生徒は、インタビューから分かる通り仮説・検証・発見が行われているが、理由づけはマイクロワールドでは行われていない。これはCabriのマイクロワールドが仮説・検証・発見を行うことが可能だと思われる。

4-5. 証明の必要性

どの環境においても証明の必要性は意識されたが、根拠が異なる。

| | |
|-------|----------------------------------------|
| PP | 証明は必要なし。一般的な図形で説明可能。特殊な図形から一般的な図形で考えた。 |
| LOGO | 証明は必要なし。プログラムは一般的なことを考えないと作れないから。 |
| Cabri | 証明は必要。多種類の図形を見ることはできるが、その理由は示されていないから。 |

PPでは問題1～3を通して求めた結果は、

すべて一般的な図形で説明がつくし、どんなときも成立する条件(ex.三角形の内角の和は180度)を理由としている。

LOGOはプログラミングは常に一般的な条件を考えないと作れないからという理由であった。特に、星型多角形の頂角は辺の長さに依らないことをプログラミングの試行錯誤から分かった生徒は、プログラムは一般的な星型についてその性質を説明していると述べている。

Cabriは作図した図形を動かすことで多種類の星型を見せてくれるが、その理由は教えてくれないという答があった。

LOGOでは星型を描けるプログラムが完成するまでに、星型が描けない状態のプログラムを作っている。自分が描きたい図形と、それがなぜ描けないのかをプログラムを比較分析することで、自然に星型の性質の探究活動が行われるように思われる。とすると、希望どおりの図が完成して、星型を描くプログラム(手続き)が分かった時点で、星型の性質も把握できたのではないだろうか。一方、PPやCabriでは図を描くことはLOGOよりも簡単にできる。だから、図を完成させてから性質の探究活動が始まる。特にCabeiの場合は、図を動かせたり角度を表示させたりできるので、生徒の活動方針や知識をマイクロワールドで試す機会がPPよりも多く与えられると言えよう。

5. 結論

マイクロワールドにおいて自由に生徒が学習活動を行うことで従来とは違う図形の捉え方や問題の解決方法をとる。そこでは各々の環境とは異なる学習活動を生み出している。つまり、マイクロワールドにおける図形の性質探究学習は、従来の紙と鉛筆による学習とは違った扱い方を生徒がするようになる。そのうえマイクロワールドでは自由な探究活動を行いやすいために、試行錯誤活動がコンビ

ュータを利用しない場合に比べて頻繁になる。このとき仮説検証や発見、並びに一般化が生徒の経験を通して行われる。そして、証明の必要性を自分の学習活動を通じて自然に意識することができるようになる。これは図形の性質探究学習の場として、マイクロワールドが寄与することができると言える。

性質の異なるマイクロワールドにおける学習は異なる思考を生み出す。コンピュータを利用して学習するとしても、使うソフトによって、言い換えれば提供されるマイクロワールドの違いによって生徒の思考も違ったものになる。

マイクロワールドの活動が生徒の能力のどの部分を育成するのに適しているか、マイクロワールドにおける学習活動に向いている問題の検討、授業にどのように導入するか等が研究課題として残っている。

6. 主要参考文献

- J. T. Fey, 1989, Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems: Educational Studies in Mathematics Vol. 20, pp. 237-272
- M. G. Kantowski, 1987 "Using the Computer to Teach Geometry": Developments Around the World, NCTM, pp. 587-603
- D. A. Norman, 1990, "Cognitive Artifacts": Cognitive Theory and Design in Human-Computer Interaction, draft
- A. H. Schoenfeld, 1988, "Uses of Computers in Mathematics Instruction": Computers and Mathematics-The Use of Computers in Undergraduate Instruction-, pp1-11
- M. Yerushalmy & D. Chazan, 1990, "Overcoming Visual Obstacles with the Aid of the Supposer": Educational Studies in Mathematics, Education Development Center, pp. 199-219
- S. Papert 著, 奥村貴世子訳, 1982, 「マインドストーム」, 未来社
- 飯島康之 1990, 「星型多角形の内角の和の問題における「証明と論駁」について」, 愛知教育大学教科教育センター研究報告 Vol. 14, pp. 69-82
- 清水克彦, 1991, 「道具は問題の解決プロセスをどう変えるか—コンピュータ・ソフトを事例としたその分析の観点の提出—」, draft
- 清水克彦, 1991, 「数学的問題解決と道具の相互作用に関する研究—幾何ソフト Cabri-geometry を事例として—」, 日数教協論文発表会論文集, 1991
- 正田實編, 1989 「図形の直観的な見方や考え方の指導」, 明治図書
- 正田 實, 大野勝寛編, 1989, 「改訂中学校学習指導要領の展開 数学科編」