数学史講義（第2回）：ユークリッド『原論』，論証学問の成立

林　知宏

人は証明したいとなったら，なんでも証明してしまう．が，
本当にむずかしいのは，何を証明したいかを知ることだ．[1]

1　はじめに

前回の数学史講義（[林 2007] 参照）では，数学史という学問に関する一般的な説明を行った．数学の歴史を考察する上での視点，取り組む姿勢を述べた．今回は数学にとって不可欠な論証（証明）の成立に焦点を定めたい．古代ギリシアの文化が栄えた時代，紀元前300年頃が対象となる時代である．ユークリッド（ギリシア名エウクレイデス，以下では慣例にしたがい，ユークリッドで通す）の名で知られる人物が，いくつかの数学書を残した．そのうちの一つは，通常『原論』（*Στοιχεῖα*（希），*Elementa*（羅），*Elements*（英））の名で知られる．人類の数理的研究は，この書物が最初ではない．さらに古い文明の遺跡の中にも，長さや面積計算の痕跡は見いだせる．経験的知識は，すでに一定量蓄積されていたと考えるのが自然である．だが測量のような日常的活動に即した場面で，数理的知識を応用することと『原論』が提示する内容は決定的に異なる要素がある．それは証明の有無である．

現在も数学は進展を続けている．研究対象も多岐にわたる．ただし，学問的主張としての正当性を示したいならば，必ず証明が伴う．他者に対して説得力を持つように議論を構成しなければならない．それが数学研究における絶対の必要条件である．だが，そもそも自己の主張の正しさをどのようにして伝えるのであろうか．ユークリッド『原論』は一定の形式，スタイルの具体例を提示した．そして後世において，長らく規範となった．定義・公準・公理が設定され，用語の意味や必要な前提を土台にした上で，個々の命題の提示とその成立の理由が述べられていく．次に提示される命題の中では，すでに証明済みの命題の主張は利用可能となる．その活用によって新たな主張の正当性がまた示される．この一連の作業を通じて，体系化された数学的知識の全体が組み立てられるのである．今では「当たり前」と考えられることを備えつける出発点となったのがユークリッド『原論』である．数学の歴史全体の中でも，とりわけ高い重要性を持っている．

---

[1][Alain 1958], p. 218，邦訳［アラン 2008］，14頁．本稿では引用の際に，邦訳を参考にしつつ訳文を変更することがある．

われわれは『原論』の証明のスタイルを受け継いでいる．その意味でユークリッドの影響圏にいる．だが，「当たり前」と考えてしまっているその論証の方法論は特殊ともいえる．そもそも何を証明し，何を証明なしに前提し，要請するのか．ユークリッドの選択にどれほどの必然性があったのか．ひとたび冷静に眺めていくと，われわれが慣れ親しんだ定理（例えば直角三角形における「ピュタゴラスの定理」）は異なる様相を見せる．定理が論証されていく様子は，思わず舌を巻く論理構成の巧妙さと，「なぜ」と考えさせられる要素とを両方備えているように感じる．以下ではユークリッドの人物像，『原論』のテキストについて紹介する．また各巻に記された個別の命題を具体的に検証することで，数学の学問的原点を確認していきたい．

実は，本稿を記すにあたり大きな出来事が起きた．日本において『エウクレイデス全集』（以下では『全集』と称する）が刊行され始めたのである（2008 年 3 月現在，第 1 巻のみ）．『原論』のみは各国語に翻訳されおり，すでに邦訳［中村他 1971］もある．中村幸四郎等による旧訳は，何よりギリシア語原典を読む労苦から解放してくれた．その点で功績大である．ただ今回の『全集』の訳者たちの志は高い．現在ユークリッドの名で知られる著作を『原論』だけでなく日本語に翻訳し，かつ詳細な解説を付けて紹介しようと試みている．今後『全集』の各巻が出版されることで，われわれのユークリッド像は刷新されるかもしれない．日本の数学史・科学史研究者たちの成果を味わいながら，われわれの議論を進めていくことにしよう．

2　ユークリッド（エウクレイデス）の人物像と『原論』のテキストについて

2.1　謎の人物ユークリッド

ユークリッドの人物像は，ほとんど何も知られていない．その著作『原論』の圧倒的な知名度に比べ，実に不思議である．他の文献の記述から，紀元前 300 年前後に生きていたと考えられている．これがほとんど唯一の了解事項である．したがって，ユークリッドがなぜ，またどのようにして『原論』を執筆したかまったく不明なままである．伝わる範囲では，ユークリッド以前に『原論』に記された内容に係わる数学的著作が存在したらしい．しかしそれらは失われている．『原論』は，紀元前 300 年以前に試行錯誤を重ね，成果を得てきた様々な研究の集大成と考えるのが穏当であろう．

実態が文献上裏づけられないユークリッドだが，その人物像に関して伝説は流布している．その源は，紀元後 5 世紀（ユークリッドよりも 700 年以上後の時代）の人，プロクロスが記した『ユークリッド『原論』第 1 巻への註釈』である．この著作に含まれる次の一節が「ユークリッド伝説」の普及に多大なる貢献をした．

> ユークリッドは『原論』を編纂し，エウドクソスの多くの定理を体系化し，
> またテアイテトスの多くの結果を完全なものにし，先行者たちが比較的粗雑

> に示していたことを反駁の余地のない証明的形式へと引き上げた．彼はプトレマイオス1世の時代に生きていた．というのもプトレマイオス1世の後に生きたアルキメデスがユークリッドに言及しているからである．またプトレマイオス王が，あるとき幾何学を学ぶのに『原論』よりも手っ取り早い道はないのかと尋ねたの対し，ユークリッドは「幾何学に王道はありません」と答えたと言われている．[2]

この引用を状況証拠として，『原論』以前の成果がユークリッドの手によって完成度を高めたらしいということを知るのである．また生没年が比較的確定しているアルキメデス（前287?–212年）よりも前の時代に生存していただろうと推測もしている．[3] そして何より，プトレマイオス王に述べたとされる「幾何学に王道なし」という科白がユークリッドの名と不可分に結びつけられている．

無論，これらはプロクロスに端を発するエピソードに過ぎない．ただこれらを反証する材料も持ち合わせていない，そこで，これはこれとして受け入れているというのが実状である．むしろ重要なのは，人物像は知られていないユークリッドが，その著作の内容によって影響力を持ち，伝えられていたということである．次項に述べるように，ユークリッドの手によると考えられる著作は，『原論』以外にも多くある．だが『原論』の存在は飛び抜けている．ヨーロッパにおいて，中世のアラビア語圏において，さらには近世以降の各国で多くの読者を獲得したからである．そこで人物像についてはこれ以上深入りせずに，ユークリッドの他の著作や『原論』テキストの伝承について概観しよう．

2.2 ユークリッドの著作，『原論』のテキストについて

2.2.1 ユークリッドの著作について

ユークリッドの著作は『原論』にとどまらない．文献学的研究により，彼の手によるものと考えられている著作は10余りある．だがユークリッドの自筆原稿は一切見つかっていない．ギリシア語原典が伝わるもの（6作品：『原論』，『デドメナ』，『ファイノメナ』，『オプティカ』，『カタプトリカ』，『カノーンの分割』），中世におけるアラビア語訳のみが伝わるもの（『図形分割論』のみ），加えてギリシアの他の著作の中で言及されているがテキスト自体は失われたもの（4作品：『誤謬推理論』，『曲面軌跡論』，『円錐曲線論』，『ポリスマタ』）がある．他にもユークリッドの名が与えられている著作もあるが，偽作であると推定されている．失われた著作の中でも『円錐曲線論』は，ユークリッドよりも少し

---

[2][Proclus 1992], pp. 56 f. ［全集 2008］，11頁にも同じ箇所を含んだ引用がある．

[3]アルキメデスによるユークリッドへの言及は，『球と円柱について』という著作の中に見ることができる（［アルキメデス 1981］，315頁）．ただしこれも後世における挿入と考えられている．同書における佐藤徹の注（318f頁）参照．

後の時代（紀元前200年頃）の人，アポロニオスの『円錐曲線論』に言及がある.[4] アポロニオスの著作も後世（特に17世紀ヨーロッパ）に多大な影響を与えたのだが，ユークリッドとの関連は興味を引き起こす．ギリシア語原典が残る6著作のうち，『カトプトリカ』，『カノーンの分割』以外はアラビア語訳が残っている．また『ファイノメナ』以外はラテン語訳が存在し，ヨーロッパ近世へ伝承されていった．それらを多くの人々が研究，あるいは学習したことがわかる.[5]

『原論』は次章で見るように，平面幾何学，立体幾何学，様々な量に関する理論（比例論），数論などを含む．『デドメナ』（＝与えられたもの）は平面幾何における「解析の方法」（＝問題が解けたと仮定して，逆向きに論理を遡及し，前提事項までたどりつく議論．必要な条件や作図などを発見する方法）を説く.[6]『ファイノメナ』，『オプティカ』，『カタプトリカ』，『カノーンの分割』の内容は，現在の学問分野として天文学，光学，屈折光学，音楽論を分類されよう．広い意味での数理学の著作である．こうしてユークリッドは，古代ギリシアにおける数学的知識に多方面にわたって精通していた人物であったことが想像できる．

2.2.2 『原論』のテキスト

ユークリッドの学問的貢献は『原論』のみから下されるべきでない．ただわれわれは，論証学問として数学がいかに形を整えたのかという点に最大の関心がある．したがって『原論』以外に話題を拡げることは避ける．『原論』はすでに述べたように，ギリシア語原典，中世におけるアラビア語訳，ラテン語訳（アラビア語訳からの反訳，ギリシア語原典からの訳）がすべて揃っている．2000年以上の前に記された著作にもかかわらず，世代から世代へと，また地域もヨーロッパだけに限定されず伝承されていった．これは一つの書物として，聖書と並んで特別の役割を果たしてきた証拠であろう．

ユークリッドは『原論』を当時の媒体であったパピルスに記したと考えられる．現在残存する最古の（図版つき）『原論』は，紀元後3世紀から4世紀のものである．時代が下ると，媒体は羊皮紙に変わる．中世を通じて紙よりもそちらに記されていたようである．最初の印刷本は1482年に刊行された（「カンパヌス版」と呼ばれるラテン語訳本）．ギリシア語原典の最初の刊本は1533年に出版されている．

現在，われわれがギリシア語原典として通常参照するのは，デンマークの古典学者ハイベア（とメンゲ）による版である（[Euclid 1883–1916]，図1参照）．[Euclid 1883–1916] は，『原論』のみならずユークリッドの著作全体を収録する．左頁にギリシア語，右側頁

---

[4][Apollonius 1891–1893], pp. 4f.

[5][全集 2008]，26頁にはユークリッドの著作一覧表がある．『全集』の訳業は，『原論』以外のギリシア語原典が残る六つの著作をすべて対象としている．さらに長らくユークリッドの著作と考えられ，ギリシア語テキストが残る音楽論『ハルモニア論入門』も訳出されるようである．

[6]数学の論証に関する重要な概念である解析と総合については，以下の5.3項で論じる．

α'.

Ὅροι.

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ-

1. Hero def. 2. Ammonius in categ. p. 43. 66. Psellus p. 34. cfr. Philoponus in phys. fol. 6ʳ. Martianus Capella VI, 708. Boetius p. 374, 1. 2. Sextus Emp. p. 466, 27. 470, 24. 704, 28. Hero def. 3. Philoponus in phys. fol. 6ʳ. Ammonius in cat. p. 66. Martianus Capella VI, 708. Boetius p. 374, 2. 3. Boetius p. 374, 3. 4. Hero def. 5. Sextus Emp. p. 716, 28. 717, 10. Philoponus in anal. II fol. 4ᵛ, fol. 15. Psellus p. 34. Boetius p. 374, 5. 5. Hero def. 9. Boetius p. 374, 6. 6. Boetius p. 374, 7. 7. Hero def. 11. Psellus p. 35. Boetius p. 374, 7. 8. Hero def. 16. Psellus p. 35. cfr. Sextus Emp. p. 718, 12. Boetius p. 374, 10. Martianus Capella VI, 710.

I.

Definitiones.

I. Punctum est, cuius pars nulla est.

II. Linea autem sine latitudine longitudo.

III. Lineae autem extrema puncta.

IV. Recta linea est, quaecunque ex aequo punctis in ea sitis iacet.

V. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem solum habet.

VI. Superficiei autem extrema lineae sunt.

VII. Plana superficies est, quaecunque ex aequo rectis in ea sitis iacet.

VIII. Planus autem angulus est duabus lineis in plano se tangentibus nec in eadem recta positis alterius lineae ad alteram inclinatio.

IX. Ubi uero lineae angulum continentes rectae sunt, rectilineus adpellatur angulus.

X. Ubi uero recta super rectam lineam erecta

9. Hero def. 17. Boetius p. 374, 12. 10. Hero def. 19. Ammonius in categ. p. 58. Simplicius in Aristot. de coelo fol. 181ᵛ. Philoponus in phys. i IIII, in anal. II fol. 28ᵛ, p. 65. Psellus p. 36. Martianus Capella VI, 710. Boetius p. 374, 14.

Numeros definitionum om. PFBb. 1. οὐδέν F, Psellus, Ammonius p. 66. 6. ἔχει μόνον B. 11. δέ] supra comp. scriptum b. ἐπιπέδῳ] ἐπίπεδος π. 13. Ante πρός ras. unius litterae PF. 14. δέ] δ' B. τὴν γωνίαν περιέχουσαι Proclus; τὴν εἰρημένην γωνίαν P. 15. ἡ γωνία καλεῖται Proclus.

1*

図1　ユークリッド『原論』ギリシア語原典（第1巻冒頭部）

にそのラテン語訳が載せられている.[7] 邦訳も旧訳［中村他 1971］, 新訳『全集』ともにハイベアの版を底本としている. さらに英訳［Heath 1925］, 仏訳［Vitrac 1990–2001］も同様である.

ハイベアは, 多くの諸本のうち19世紀初頭にペイラールが発見した（1808年）写本（通常P写本と称される）を重視した. P写本以外の『原論』のテキストは, すべて紀元後4世紀の人, テオンの校訂本の系統であることがわかっている. ハイベアは, テオン系統以外のP写本がより原型に近いと判断したのだった. ハイベアの校訂は精緻を極め, ユークリッドの研究に必須のものとなった. したがってハイベアの選択が, ある意味で「権威」を帯びることになった. だが, ハイベア版がユークリッド自身の, 紀元前300年頃に記した作品そのものと考えることには当然留保が必要である. そもそもテオン版もP写本も伝承の一つの形態に過ぎないはずである. それをテオンの手が入っていないことを根拠に真正度が高いと判断するのには無理がある. 冷静に考えるならば自然にそう判断できるだろう. ただ文献学的な見地からハイベア版を見直す作業は, ようやく1990年代半ば以降行われるようになった. ［Knorr 1996］, ［Rommevaux *et al.* 2001］はその代表的論考である. 特に中世におけるアラビア語訳（あるいは12, 13世紀にそのアラビア語訳か

[7][Euclid 1969–1977]は, スタマティスが[Euclid 1883–1916]から『原論』のみを取りだし, かつラテン語訳も省いて再編した版である.

らラテン語へ反訳された諸本）の価値が再評価されている．従来，アラビア語圏にユークリッドのテキストが伝わった際，訳者によって独自のフィルターがかけられたと考えられてきた．いわば真正度が落ちると判断され続けてきたのである．だが様々な観点から，ヨーロッパ内で伝わった諸本よりも原形をとどめている要素があるのではないか，という見方が生じてきている．

『原論』のオリジナルがどのような姿をしていたか．文献学的問題は今後も議論が続いていくだろう．ここでは，古代の著作に接することはいくつかのハードルを踏まえた上でのことだということを確認しておきたい．われわれに残されたものを手がかりに過去へアプローチすること．そこに多くの研究が蓄積されているのである．

3　ユークリッド『原論』全 13 巻の内容概観

前項のハイベア版によれば，『原論』は全 13 巻からなる．全体を概観するために，一通り内容を列挙すると次のようになる．

・第 1 巻～第 4 巻：比例論を用いない平面幾何，
・第 5 巻～第 6 巻：比例論と比例論の平面幾何への応用，
・第 7 巻～第 9 巻：数論，
・第 10 巻：無理量論，
・第 11 巻～第 13 巻：立体幾何．

われわれにとって論証というと，幾何学の問題（特に平面幾何）が密接に結びついている．初等・中等教育の場面でそう刷り込まれている．しかし『原論』の内容は幾何学に限定されない．後半は数や量の理論も登場する．ユークリッドの同時代人が保有していた数学的知識の中心事項が網羅されていると考えてよいだろう．個々の巻について少し細かく内容を記す．第 1 巻～第 4 巻の内容は以下の通りである．

・第 1 巻：定義・公理・公準，基本作図（線分の二等分，角の二等分，垂線，他），基本定理（三角形の合同，「ピュタゴラスの定理」，平行線に関する定理，他），
・第 2 巻：線分上に作られる正方形と長方形の関係，
・第 3 巻：円論，
・第 4 巻：正多角形と内接・外接図形．

これらの諸命題は平面幾何学に係わる．ただし比例の議論は含まれない．したがって図形の相似を論じることはない．また第 2 巻の特定の命題に対して，代数的内容（われわれの記号法で表現すると $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$）を表したと解釈する説（「幾何学的代数」）

が普及したことがある．これは数学史研究における重要な視点を含むので，また後で検討する（6.2 項参照）．次に第 5 巻～第 6 巻の内容は以下の通りである．

- 第 5 巻：比と比例の定義，比例に関する基本定理，
- 第 6 巻：三角形の相似条件，比例中項の作図，「面積あてはめ」，

第 5 巻の比の議論は独特である．記号代数を持ち，比の値と分数を容易に同一視するわれわれからすると理解しづらい面を持つ．それをふまえつつ，第 6 巻でようやく図形の相似が論じられる．合同の方は，第 1 巻で三角形の合同条件を含め早々に現れる．図形の基本性質である相似の議論が後回しにされること自体，特殊である．後世の研究者の中には，こうした点をふまえ『原論』の内容構成を「より自然な」流れに作り替えたいと考える人物もいた．続く第 7 巻～第 9 巻の内容は以下の通りである．

- 第 7 巻：数の諸概念の定義，数の比例論，数に関する基本定理，
- 第 8 巻：等比数列論，
- 第 9 巻：等比数列論（続き），数の基本定理，
- 第 10 巻：無理量論．

第 7 巻では，「数」に関する定義と諸命題とが並ぶ．第 5 巻で扱われた「量」の問題と数が区別されていること自体，われわれには違和感が伴う．特に第 7 巻命題 11 以降，第 8 巻にかけて，第 5 巻と同じ内容を持つ命題が再び列挙されるのを見ると不思議に感じる．だが，この数と量をはっきりと分けて論じることが，ギリシア数学の重要な特徴である (6.4 項参照)．第 10 巻の内容は「非共測量」（＝無理量）論である．[8] 一つの巻の中に，115 もの命題が組み込まれており，『原論』中最大の分量を誇る．現代的記号で $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ と表される無理量を含む理論が展開されている．[9] 第 11 巻～第 13 巻の内容は，第 10 巻の無理量論をふまえて以下のように展開する．

- 第 11 巻：立体幾何（「三垂線の定理」，平行六面体の体積，他），
- 第 12 巻：「取り尽くし法」による立体図形の計量（「円錐の体積公式」を含む），
- 第 13 巻：正多面体論（正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体）．

---

[8] 従来，「通約不可能量」という呼び名が定着していた．『全集』第 1 巻では「非共測量」としている．［斎藤 1997］，27–30 頁にその用語を採用する理由が説明されているので参照のこと．

[9] 『原論』のフランス語訳［Vitrac 1990–2001］は全 4 巻からなるが，その第 3 巻をすべて『原論』第 10 巻の翻訳と註釈・解説にあてている．

第 12 巻では，面積・体積の基本公式が与えられている．円の面積が直径の 2 乗に比例すること（命題 1），「円錐の体積公式」（＝同じ底面，等しい高さを持つ円柱の体積の 3 分の 1）（命題 10）などが登場する．現代の微分積分学からすると，それらの結果を導くのには極限移行が伴う．だが古代ギリシアの数学の中に「極限」概念や，それに相当する記号表現はない．むしろ無限に係わる議論が，独特の論理展開（「取り尽くし法」）によって回避されている．第 13 巻で正多面体の辺の長さが論じられる際，第 10 巻の議論を利用している．以上が『原論』全 13 巻の概観である．そこで，『原論』にとって最も本質的である第 1 巻の論証構造について分析しよう．

4 『原論』第 1 巻における基本設定

4.1 定義，公準，共通概念（公理）の意義

数学の証明は，主張したい事柄の正当性を示すためにある．ただ無から論拠を与えることはできない．そこで通常，使用する用語・概念の命名（定義），さらにはいくつかの前提事項（公準・公理）を立てる．ユークリッド『原論』における論証のスタイルは，一つのモデルとして長らく機能してきた．『原論』の構成とは別の組み立て方もあり得るだろう．実際，後世の者たちは様々な改良を工夫してきた．だが『原論』の構成が原点にあってのことである．以下で見るように全 13 巻の多くの命題を証明していく出発点として，『原論』第 1 巻はきわめて巧妙に作られている．

まず第 1 巻の冒頭には，全部で 23 の定義が置かれる．代表的なものを列挙する．[10]

・点とは部分のないものである（定義 1）．
・また，線とは幅のない長さである（定義 2）．
・平面角とは，平面上の互いに交わる二つの線で 1 直線をなすように置かれていないものの，互いの線に対する傾きである（定義 8）．
・また，角を囲む線が直線のとき，角は直線角と呼ばれる（定義 9）．
・円とは，一つの線によって囲まれる平面図形で，[その線は周と呼ばれる．] その線に対して，図形の内部に置かれた 1 点から［円周に向かって］落ちる線が互いに等しいものである（定義 15）．
・また，この点は円の中心と呼ばれる（定義 16）．

---

[10]本稿の以下において，ユークリッド『原論』から引用する際，特に引用箇所に言及しない．定義・公準・公理，各命題，含まれている巻数や番号を明記することで代わりとする．ただし主だった写本にはこうした番号はないようである．あくまでも後世の編者が便宜的に付したものである．すでに本文中にも記したようにギリシア語原典は，[Euclid 1883–1916] あるいは，[Euclid 1969–1977] を，邦訳は [全集 2008]，または[中村他 1971] を典拠とする．なお [ ] で囲まれた部分は，ハイベアが後世における挿入と考えた部分を，〔 〕は邦訳者，または引用者による補足を示す．

・平行線とは，任意の 2 直線で，同じ平面内にあって，限りなくどちらの側に延長されても，どちら側でも互いに交わらないものである（定義 23）.

まず最初に指摘しておかなければならないのは，無定義語の存在である．議論が説得力を持つためには，可能な限り論理の展開に「穴」が無いように工夫するだろう．だがその一方で，定義において何らかの用語を別の言葉で説明しようとしても，すべてを完全に説明し尽くすことはできない．この言語上の限界に遭遇する．したがって「何を説明し，何を無定義のまま委ねるか」という選択が必要となる．『原論』では何の説明もなく，上の定義 1，2 が始まる．この中に「部分」，「幅」，「長さ」といった無定義語が現れる．これらの意味を与えるために別の言葉を持ち出すならば，その別の言葉を説明するための別の言葉がさらに求められる．こうした無限循環に陥らずにすむための設定がなされるのである．当然，ユークリッドの判断に異議を唱えることは可能だろう．ただこれはこれでやはり非常に巧妙，かつ現実的選択であるように見える．つまり同時代人の読者を想定し，暗黙の了解が存在すると判断できるものについて定義を省くことが可能としたのではないか．

定義 8，9 で注目すべきは，角を形成する線が直線だけでないことである．直線の場合，定義 9 でわざわざ「直線角」とことわっている点が興味深い．なお，「平面」は定義 7 に現れるが，「傾き」は無定義である．定義 15，16 の円の場合も無定義語が存在する．定義 14 で「図形」が定義される．しかし「平面図形」とは何か．この定義 15 以前に何も述べていない．「内部」とは何か．これも同様である．第 3 巻で円に関する様々な性質が論じられるが，その場での議論に支障がなければよいのである．だが，先の角の定義とあわせ，第 3 巻命題 16 で円の接線と円周とによって囲まれる「角」が問題とされると議論を呼びさますことになった．その接線と円周によって囲まれる角の大きさをどのように特定するか．0 とみなすのか，そうでないのか．そうした問題が 17 世紀に至るまでとり上げられることになる（「接触角問題」）．定義 23 の平行線については，直後の公準 5 と組にしてやはり議論を呼ぶことになる．実に長い期間の末（19 世紀以降），新たな前提事項に基づいた幾何学（非ユークリッド幾何学）が構築される．この定義 23 はそうした余地をはらんでいる．

次に読者への要請として，公準（5 個，『全集』では，まさしく「要請」という訳語を用いている），公理（9 個，『全集』では「共通概念（公理）」と呼んでいる）が設定される．前者は，主に作図に係わる（2 点間に直線を引く（公準 1），直線を延長する（公準 2），与えられた中心と半径を持つ円を描く（公準 3），直角は互いに等しい（公準 4））．とりわけ著名なものは，次の第 5 公準である．

> そして，もし 2 直線に落ちる直線が，〔和が〕2 直角より小さい同じ側の内角を作るならば，2 直線が延長されるとき，〔内角の和が〕2 直角よりも小さい側で，それらが出会うこと．

他の四つの要請と比しても，この公準 5 は特殊に見える．そもそもこれは前提とされるべきことなのだろうか．他の前提事項から導くことができる，すなわち証明可能な事項なのではないか（いわゆる「第 5 公準問題」)．『原論』が伝承される過程の中で多くの人々がその問題を検討した．しかし，証明は見いだされなかった．問題は想像以上に根が深く，異なる角度，論点からの反省が必要だったのである．すなわち，ユークリッド『原論』の体系を絶対視せず，あくまでも可能な体系の一つと相対化する視点の獲得が必要だった．無論，それは早急になされることではなく，ボヤイやロバチェフスキーが非ユークリッド幾何学をうち立てるまで 2000 年以上の歳月が流れることになる．

作図に係わる議論に対する要請に続いて，量に関して前提したい事項が並ぶ．「公理」である．全部で 9 個設定されているが，ハイベアはそのうち，4 から 6 までと 9 を後世の挿入と考えている．これはプロクロスの先掲書の中にある説明を踏襲しているようである．残った 5 個は以下の通りである．

- 同じものに等しいものは互いに等しい（公理 1).
- そして，もし等しいものに等しいものがつけ加えられたならば，全体は等しい（公理 2).
- そして等しいものから等しいものが取り去られたならば，残されたものは等しい（公理 3).
- そして，互いの上に重なり合うものは互いに等しい（公理 7).
- そして，全体は部分よりも大きい（公理 8).

これらを見て，「問題なし」と感じるならば，すでにユークリッドの世界の中に自然に入り込んでいる証拠だろう．後世の数学研究者の中には（例えば，ライプニッツは)，公理 8 を不自然と考え，これを証明対象にするよう設定の組み替えを試みた．確かに，無限集合の包含関係を考えるならば，この公理 8 を安易に前提することはできない．だが，それはギリシア数学の範疇にない問題設定である．以上のような基本設定が『原論』全体を貫いている．これら以外にも証明する対象に応じて，必要となった時点で新たなものを追加すればよいという判断があったのだろう．実際，定義は（第 8， 9，12，13 巻を除いて）各巻の冒頭に追加される．だが，議論の前提事項として要請される事柄は，第 1 巻冒頭の公準 5 個，公理 5 個（ 9 個）のみである．それらだけを用いて第 1 巻命題 1 から第 13 巻末尾命題 18 まで証明が積み重ねられる．ユークリッドが全巻をどのように見通していたか不明だが，とにかく「これだけあれば十分」と選別したことが驚きである．この点に関して，『原論』には成立事情も含めて，何の説明もない．すぐ後の時代のアルキメデス，アポロニオスの著書が，先行する研究に対して説明を与えていることと異なる．だがとにかく「驚異の体系」がここに誕生したのである．なぜこれらが設定されたのか．何が契機なのか．ユークリッド自身が何も語らないので，推測する以外に方法はない．だが『原論』

の基本設定について，その由来は論証学問成立の出発点として興味を引く．それに関する議論を次に紹介しよう．

4.2 基本設定の由来について

第1巻のみならず『原論』のいくつかの巻では，それぞれ冒頭に定義が置かれている．論じる対象を定めるために必要な設定として容易に了解できる．問題は，第1巻の定義に続いて公準，公理といった読者に対する要請が設定されていることである．加えて読者に提示された要請の一つ一つは，なぜユークリッドがそれを挿入したのか首を傾げたくなるものもある．導入にあたり，何も語られていないので，現代の研究者たちはこうした前提事項がどのようなコンテクストにおいて定められたかを推測しようとした．

代表的な論者は，サボーである（[サボー 1978]に代表される）．彼は，ギリシア語本来の意味をもとに定義・公準・公理の意味を確定しようとした．特に「ディアレクティケ」（対話法，弁証法）との関連を強調した上で，論証的数学の起源がエレア学派にあると主張したのだった．エレア学派には，「ゼノンのパラドックス」で知られるゼノンが属する．彼らは常識と思われる事柄を覆す逆説を提起したらしい．すなわち『原論』の基本設定の内容は，プラトンやアリストテレスより以前の紀元前5世紀にさかのぼって発生していたと考える．サボーによれば，公準（*αἰτήματα*）に相当する語は，「要請する」という意味を持つ動詞から派生している．さらに公理（共通概念）（*κοιναὶ ἔννοιαι*）の方も，英語の axiom の語源である（*ἀξιώματα*）が他のギリシア語文献では多く使用されており，こちらも「要請されたこと」を意味している．特に公準1，2，3のように円や直線が描けるということをわざわざ述べていたり，また公理8に「全体は部分よりも大きい」としたことは，エレア派が運動を否定したこと（ゼノンの名とともに知られる「アキレスは亀に追いつかない」，「飛んでいる矢は飛んでいない」などのパラドックスが知られる）や，（やはりゼノンに由来するとされるパラドックス）「半分の時間がその2倍に等しい」を意識しているのではないか．われわれの目には不要とも見えることを事前に要請したのは，エレア学派のソフィストたちが提起したように，誰にとっても共通理解が得られると安易に判断できない事柄もある．それに対抗しようと試みたからであるとサボーは主張する．議論の説得力を確保するために，想定される論難をあらかじめ封じておこうというのである．[11]

これに対して，ミューラーは，プラトン，アリストテレスのテキスト分析から，サボー批判を展開した．[Mueller 1991]によれば，プラトンの著作の中で定義を立てることが行われるようになり，またアリストテレスの著作の中で公準，公理（共通概念）の提示が行われるようになったという．ユークリッドにわずかに先行するアリストテレスの文献の中に，ユークリッドに結びつく記述スタイルが定まりつつあったとする．したがって『原論』

---

[11] ゼノンのパラドックスは，アリストレス『自然学』第6巻の中に紹介され，後世に知られるようになった．[アリストテレス 1968]，228-231，258-261頁参照．またサボーの説は，[サボー 1978]，338-343，361頁参照．

第 1 巻の基本設定は，プラトン，アリストテレスをふまえた上で，まさにユークリッド自身が作り上げたと考えるのが自然とミューラーは主張する．よってサボーとは異なり，『原論』における論証の方法論に関して，起源をあまり古い時代にまでさかのぼらせるべきでないとした．[12] サボー，ミューラーの意見は両立可能である．ただ近年の研究者たちは，ミューラーの説に説得力を感じて，サボーの説からは離れているようである．

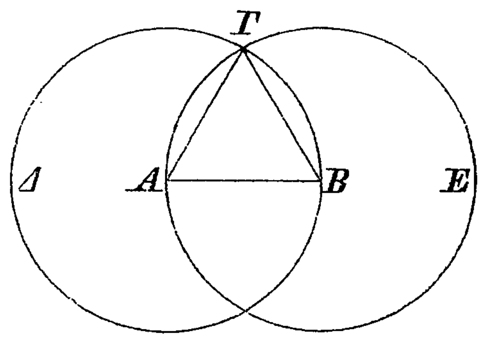

図 2　『原論』第 1 巻命題 1

『原論』第 1 巻の公準，公理は独特である．これらが何を意図して設定されたか．各巻からの事例を見る際に，証明の中でどのように活かされるかを確認することにしよう．『原論』は，自己の議論に説得力を持たせるための工夫，論証のモデルを提示した．実際，第 1 巻からの議論はきわめて綿密に構成される．ところが要請もされなければ，証明もされない「暗黙の了解事項」も存在する．実は，第 1 巻の第 1 命題からそうした事態に遭遇する．この命題 1 は，「与えられた有限直線の上に等辺三角形〔正三角形〕を作図すること」がテーマである．[13] このとき図 2 に示されるように，それぞれ中心 A, B，半径 AB の円 $A\Gamma E$, $\Gamma\Delta B$ を描く（これは公準 3 により保証される）．ただし二つの円が描かれるときに，交点 Γ が存在することは暗黙の了解とされ，図の中にあらかじめその点が設定されている．[14] 無定義語だけでなく，論証の中でそうした事柄のあることを厳密性に欠くと見る向きもあろう．他方，巧妙に構成されていると考える者もあるだろう．すなわち，添えられた図が議論の補いをすることを意図していたとも了解できる．[15] ユークリッドは厳密な議論の構成に関して，配慮を欠いていたのか．それとも十分承知の上で現実的に処置を行ったのか．われわれには断定できない．ただ『原論』の読者の中には，問題点を見抜いた者もいたはずである．後の時代の研究者たちにとって，『原論』を書き換え，独自の論証を企てることは自然な欲求となっただろう．

---

[12] とりわけ［Mueller 1991］, pp. 90f 参照．

[13]『原論』には，「線分」という用語は登場しない．「有限直線」，または単に「直線」と呼ぶ．本稿では，誤解が生じないと考える場合には，「線分」という語を用いるときもある．

[14] 図に関して，［Euclid 1883-1916］，［Euclid 1969-1977］に添えられたものを参照する．両者は，基本的に同じ図になっている．ただ『原論』テキストの図について，多少の注意を要する．近年研究者たちは様々な写本に添えられている図を比較検討し，ハイベア版の編集方針に疑問を抱くようになっている．すなわちハイベア版は，図版の校訂にまで目が行き届いていないというのである．図を正確に再現するかわりに，より一般的な図に差し替えてしまってしまい，校訂版原典として不十分であると研究者たちは考え始めている．とはいえ，研究者たちの中に何らかの合意が形成されている段階でもないようである（［全集 2008］，63-69 頁参照）．いずれにせよ，少し専門的な領域に属する話題である．本稿では，とりあえずハイベア版の図を参照することにする．

[15] ギリシア数学における図の役割について，［Netz 1999］は説得力ある議論を展開している．

5　証明の基本形式

5.1　プロクロスによる命題の内容分類

前項で見た第 1 巻の定義・公準・公理の設定により，諸命題の証明が開始される．ここで提示される証明が，一定の形式を備えていることを確認しよう．先に 2.1 項で言及したプロクロスによる分類が参考になる．[16] まずそもそも命題は，定理と問題に分類される．ある性質の成立を示すのが，定理である．また，条件を満たす図形や数を得る操作を示すのが，問題である．前項の第 1 巻命題 1 は後者に属する．その上で，最も整っている場合，命題は以下の 6 個の内容に分類可能である．

1) 「言明（プロタシス）」(*πρότασις*)：命題の内容を一般的に述べる，
2) 「提示（エクテシス）」(*ἔκθεσις*)：言明の内容をより具体的に示すために命題の対象となる図形を与える，
3) 「特定（ディオリスモス）」(*διορισμός*)：提示の内容に沿って言明を言い直す，
4) 「設定（カタスケウエー）」(*κατασκευή*)：証明に必要な作図，あるいは操作を示す，
5) 「証明（アポデイクシス）」(*ἀπόδειξις*)：定理の成立を証明する，または直前の設定で得られたものが求めるものであること示す，
6) 「結論（シュンペラスマ）」(*συμπέρασμα*)：最初の言明を繰り返す．

命題の末尾には，定理の場合，「これが証明されるべきことであった」(ラテン語で quod erat demonstrandum，いわゆる「q.e.d」の原語）と記される．または問題の場合，「これが作図されるべきことであった」(ラテン語で quod erat faciendum，「q.e.f」と略される）と書かれている．以上の 6 段階の具体例として第 1 巻命題 1 の場合を見よう．

前項にも引き合いに出した第 1 巻命題 1 は，次のように記述内容が分類できる（再度図 2 を参照）．

1) 言明：与えられた有限直線の上に等辺三角形〔正三角形〕を作図すること．
2) 提示：与えられた有限直線を AB としよう．
3) 特定：そこで，直線 AB の上に等辺三角形を作図せねばならない．
4) 設定：まず中心を A とし，また距離 AB をもって，円 $B\Gamma\Delta$ が描かれたとしよう（公準 3）．一方，まず中心を B とし，また距離 BA をもって，円 $A\Gamma E$ が描かれたとしよう（公準 3）．そして円が互いに切る点 Γ から点 A, B へと直線 $\Gamma A, \Gamma B$ が結ばれたとしよう（公準 1）．

[16] [Proclus 1992], pp. 159–165. 用語は『全集』第 1 巻の訳語にしたがう．

5) 証明：すると点 A は円 $\Gamma\Delta B$ の中心であるから，$A\Gamma$ は AB に等しい（定義 15，16）．一方，点 B は円 ΓAE の中心であるから，$B\Gamma$ は BA に等しい（定義 15，16）．また ΓA も AB に等しいことが証明された．ゆえに ΓA, ΓB の各々は AB に等しい．また同じものに等しいものは互いにも等しい（公理 1）．ゆえに ΓA も ΓB に等しい．ゆえに 3 直線 ΓA, AB, $B\Gamma$ は互いに等しい．ゆえに三角形 $AB\Gamma$ は等辺であり（定義 20），与えられた有限直線の上に作図されている．

6) 結論：[ゆえに，与えられた有限直線の上に等辺三角形が作図されている．] これがなされるべきことであった．

点を指し示す順番が，同じ命題の中でも一定していない．ただこれは，『原論』の記述一般に見られる現象である．設定の中では，与えられた中心と半径で円を描くこと（公準 3），点から点へと直線を引くこと（公準 1）が活用されている．また証明の中では，「同じものに等しいものは互いに等しい」（公理 1）が効いている．加えて円に関する定義 15，16 と定義 20「また三辺形のうち，まず等辺三角形とは三つの等しい辺を持つものであり，…」が論証において顔を出すことに注意しておこう．[17]

『原論』の記述スタイルは，以上のような一定の形式に沿っている．ただユークリッド自身がそれを作りだしたかどうかは断定できない．後世の写本作成者たち，註釈者たち（例えばプロクロス）が，『原論』の内容理解を容易にするために形を整えていった可能性もあるからである．アルキメデスの著作は，『球と円柱について』第 1 巻命題 23 や命題 28 のように言明（プロタシス）に相当する部分を欠き，提示（エクテシス）から始まるものもある．[18] 内容の 6 分類は，古代ギリシアの数学的著作に共通するものであったとは断言できない面がある．プロクロスの分類は，後世の読者が『原論』の内容に入りやすくするための補助として参考にすれば十分であろう．

5.2 帰謬法による証明

『原論』は，数学を学問として成立させるための決定的条件，すなわち論証の形式を一つの完成段階に高めたことで数学史上に名を留めている．さらに主張の正しさを示すために，説得力を備えた独特の論法を生み出している．それは「帰謬法」による証明である．[19] すなわち次のような論の進め方によって，主張したい内容に正当性を与えようとする．

---

[17]『全集』は，利用した定義・公準（要請）・公理（共通概念）を，すべて用いた各々の場所に明記してあるので参考になる．

[18][アルキメデス 1981]，397，416 頁．

[19]通常，高等学校の教科書では「背理法」という名称が用いられている．内容をより的確に示すには，「帰謬法」（＝誤り，矛盾に帰する方法）の方がふさわしい．ラテン語訳 ‘reductio ad absurdum’ も考えに入れると，そちらの方が自然な邦訳である．そこで本稿では「帰謬法」の名称で通す．

1)　証明したい命題 P がある，
2)　$\neg P$（P の否定命題）を考え，矛盾を導く，
3)　よって $\neg\neg P$（P の否定の否定命題），すなわち P が真であることを主張する．

実際，この論法を作り出したことによって，「無限」が係わる内容を処理する有効な方法となっている．例えば，第3巻命題16，第12巻命題10が典型例である（6.3，6.5項参照）．特に古代ギリシアの数学的著作では，無限大にせよ無限小にせよ，明確な概念も操作を表現するための記号も存在しない．そうした事柄を明示的に扱うことを避ける工夫がなされる（無限に関連してパラドックスを提唱したエレア学派の影響は，こうした部分にこそ残っている）．証明済みの事項から結論へ，まっすぐに進んでいく論法以外に，あえて結論の否定から始める．「ひとひねり」した論法を用いて，議論困難な場合に対処するわけである．

無論，無限が入り込まない内容でも活用される．帰謬法の論法による証明は，第1巻の中に限っても命題6，14，19，25，26，27，29，39，40に見ることできる．論証学問において欠くことのできない特徴的方法といえよう．この帰謬法は，まさしく古代ギリシア人が数学世界に残した重要な遺産である．

一例を見よう．第1巻命題6は，二等辺三角形の底角が等しいとき「等しい角に向かい合う辺も互いに等しくなる」ことを主張する．証明は次のように提示される．図3で，三角形を $AB\Gamma$ とし，その底角 $AB\Gamma$ と $A\Gamma B$ が等しいする．このとき，

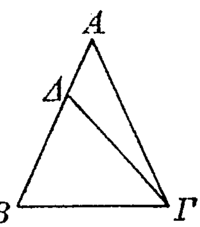

図3　『原論』第1巻命題6

> もし AB が $A\Gamma$ に等しくないならば，それらの一方が大きい．AB が大きい方であるとし，大きい AB から小さい $A\Gamma$ に等しい ΔB が取り去られたとし，$\Delta\Gamma$ が結ばれたとしよう．
>
> すると ΔB は $A\Gamma$ に等しく，また $B\Gamma$ は共通であるから，そこで2直線 ΔB，$B\Gamma$ は2直線 $A\Gamma$，ΓB に各々等しく，角 $\Delta B\Gamma$ は角 $A\Gamma B$ に等しい．ゆえに底辺 $\Delta\Gamma$ は底辺 $A\Gamma$ に等しく，三角形 $\Delta B\Gamma$ は三角形 $A\Gamma B$ に等しくなる．すなわち，小さいものが大きいものに〔等しい〕．これは不合理である．ゆえに AB が $A\Gamma$ に等しくないことはない．ゆえに等しい．（下線引用者）

この証明の中で，大きい線分 AB から小さい線分 $A\Gamma$ を取り去ることは，第1巻命題3で示されている．また，2角夾辺の合同条件（命題4）も利用されている．[20] その上で引用

[20]『原論』では，「合同」という概念は提示されない．代わりに，「辺…が等しく，角…が等しく，三角形…〔の面積〕が等しい」のように述べられる．

箇所の下線部にあるように，帰謬法の典型的論法，すなわち，

前提（＝結論の否定）を立てる→矛盾が生じる→前提を否定する（＝結論の否定の否定）．

こうした議論の流れにより，主張したい内容を正当化する．ただし注意すべきは，辺 AB と辺 $A\Gamma$ に関して，$AB > A\Gamma$，あるいは $AB = A\Gamma$，あるいは $AB < A\Gamma$，同時に二つ以上の関係が成立しないことを暗黙の了解としていることである．本来，これは公理の中に設定されてしかるべきである．『原論』第 1 巻に設定されている他の公理と較べても，量に関するより必要な前提ではないだろうか．われわれならばそう考えるだろう．『原論』は，たしかに完璧ではない．整備された公理論的体系を過剰に期待することはできない．[21] また，この命題 6 では，矛盾を指摘する一文を「これは不合理である」(ὅπερ ἄτοπον) と述べている．『原論』中で，帰謬法が用いられるとき，つねに一定の文が現れるわけではない．第 1 巻命題 14（2 直角に等しい隣接する二つの角は 1 直線をなす）も同じように帰謬法による証明だが，「これは不可能である」(ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον) と記されている．いずれの場合も「小さいものが大きいものに等しい」ということが，公理 8「全体は部分よりも大きい」に反する．ただ，その矛盾の根拠として論理上の破綻と見るのか．経験的な直観を背景にあり得ないこととしているのか．『原論』にはそうした認識論的な議論は登場しない．したがって不明である．結局，4.1 項で論じた公理の意味合い（「なぜそのような事柄が要請されているのか」）に係わるのだろう．ユークリッドが，量に関して要請の必要性をどのように感じていたのか．また古代ギリシアの数学の中でどのように捉えられていたか．ここでは問題の指摘にとどめておく．

5.3 総合と解析

論証の形式に関して総合と解析についてもふれておこう．ヒースによる『原論』英訳 [Heath 1925]では，古代における総合・解析の意味づけを紹介している．ある写本の中に，第 13 巻命題 1 から 5（線分が外中比に分けられる場合の量的関係を示す命題）へ，次のような註釈が残されているという．[22]

解析とは求められていることを，あたかもそれが確かめられているかのようにとり，その帰結を通ってある真と認められていること[へ移ること]であ

[21] ヒルベルトは『幾何学の基礎』を刊行した（初版 1899 年，第 7 版 1930 年）．その第 1 章に角の大きさ，辺の大きさの比較に関して $x > y$，$x = y$，$x < y$ のいずれか一つが成立することを述べている．[ヒルベルト 1970]，23 頁（邦訳は原著第 7 版の翻訳）参照．

[22]「外中比」については，後述の式(5)参照．

る.

総合とは確かめられていることをとり，その帰結を通って求められていることの発見もしくは達成[へ移ること]である.[23]

Kを前提事項，既知の事柄，証明済みの事柄，Pを証明したい命題，P_iを（KまたはPから帰結される）中間命題として図式化すると次のようになるだろう.

$$K \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_n \to P \text{（総合，}\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma\text{），} \tag{1}$$
$$P \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to K \text{（解析，}\grave{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma\text{）.} \tag{2}$$

『原論』の記述はすでにいくつかの例を見たように，前提事項，既知の事柄，証明済みの命題から未証明の言明へと論理を展開する．すなわち「総合」的記述である.

現在も数学における記述のスタイルは，(1)の総合的方法によるのが一般的である．その意味でユークリッド以来，確固たる伝統が築かれているといえる．ただこうした記述では，様々な発見の過程が裏側に隠れてしまう．幾何学的定理の証明に付される補助線や，必要な作図は総合的記述の中で「天下り式」に与えられる．読者にとって，なぜそれを見いだすことができるのか不思議に感じることがしばしばである．定理を見いだし，論証を考える者にとっても，突然それが浮かんでくるのではない．(2)の手法はそうした場面で威力を発揮する.

例を見よう．『原論』第4巻命題11の主張は，「与えられた円の中に等角な5角形を内接させること」，すなわち正5角形の作図である．図4を見るとわかるが，本質的なことは円の中に底角が頂角の2倍である二等辺三角形（頂角36度，底角72度の二等辺三角形）を内接させることである．必要な三角形$ZH\Theta$を提示し（同巻命題10で証明済み），円内に$ZH\Theta$と等角な（相似な）三角形$A\Gamma\Delta$を内接させる（同巻命題2で証明済み）．このとき $\angle Z = \Gamma A \Delta$，$\angle H = \angle\Theta = \angle A\Gamma\Delta$，$\angle A\Delta\Gamma$ となっている．そこに$\angle A\Gamma\Delta$，$\angle A\Delta\Gamma$を二等分する線を，それぞれΓ, Δから引く（第1巻命題9で証明済み）．こうして円周上に，5点A, B, Γ, Δ, Eが定まる．この5点を結んでできる図形$AB\Gamma\Delta E$が求める正5角形である.

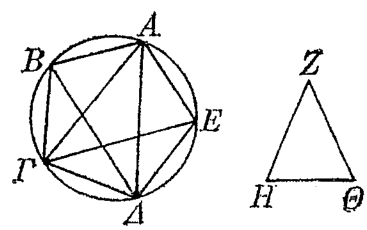

図4　『原論』第4巻命題11

第4巻命題11の議論の進め方を見る限り，やはり内接二等辺三角形の提示がいかにも唐突である．だがここに解析の利用が隠れている．すなわち,

[23][Heath 1925], Vol. 3, p. 442,［マホーニィ 2007］，64頁にはヒースの邦訳が含まれている.

あらかじめ「正5角形が円内に作図できた」とする
→必要な条件は何か？

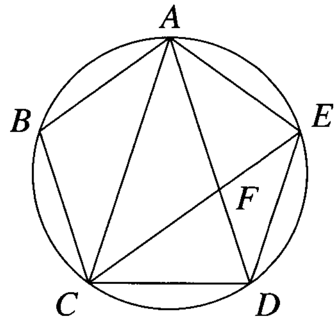

図5　第4巻命題11の解析

こうした流れで考察することをあらかじめ行っていることが想像できる．議論の流れを逆転することにより，必要な事柄が明確になる．例えば，まず図5のように，正5角形 *ABCDEF* が作図されるとする．すると円周が5等分されるので，各々の円周角（例えば $\angle CAD$, $\angle ACE$, $\angle ECD$）はみな36度である．したがって頂角36度，底角72度の二等辺三角形が現れる．こうして

「正5角形が円内に作図できた」とする
→頂角36度，底角72度の二等辺三角形が生じる

のように，解析の作業を通じて必要な作図が判明する．こうした裏で行われる展開を伏せて，あらかじめ当該の二等辺三角形の作図について論証し，命題11でまずそうした三角形を与えることになる．

ただし，いまの類推は注意を要する．あくまで『原論』の議論にあわせたもので，解析として他の必要条件に至ることも可能である．この第4巻命題11の前提となる命題10の証明は比例論（第5巻以降に現れる）を回避している．円内に与えられる三角形の作図は，あくまでも第3巻までに論じられる円の性質を用いて保証される．仮に比例の議論（三角形の相似を見いだす）に訴えるならば，異なる展開も想定される．実際，図5で，三角形 *ACD* と *CDF* の相似から，

$$AD : DC = CD : DF \tag{3}$$

かつ $CD=CF=AF$ より，式(3)は，

$$AD : AF = AF : DF \tag{4}$$

となる．この比例関係(4)は，より一般的には線分を

$$\text{全体} : \text{大きな切片} = \text{大きな切片} : \text{小さな切片} \tag{5}$$

という比（「外中比」，あるいは「黄金分割」）に分割する問題に帰着する．だが『原論』では，外中比という用語は第6巻定義3で初めて登場する．また「与えられた線分を外中

比に分割すること」という命題は同巻の命題30でようやく現れる．こうしてわれわれには，『原論』が提示する論証とは違う可能性を見いだすこともできる．[24] ユークリッド自身が『原論』以外に『デドメナ』という解析に関する著作を残したことは興味深い．『原論』の総合的記述と対になる作業も重んじていたということだろう．解析は，初学者にとって「天下り」とも見える議論の展開を見直すことにつながる．また，さらに研究を進めようとする場合，解析の手法を通じて隠れたアイデアを掘り起こすことができる．そして次に新たな数学を構想する契機ともなり得る．したがって古代ギリシアの時代に確立された総合的記述は，同時に解析的手法を組にして後世に残ったのである．[25]

17世紀以降近世ヨーロッパにおいて，古代の解析の手法は整備されつつあった記号代数を通じて様変わりした．図形の問題に対して未知量xに関する方程式の設定によって，解析は事実上，代数的な式変形の問題となった．特に同値変形が用いられる限り，解析とは逆の流れ論理展開，総合的な手続きはもはや不要となる．結果としてギリシア時代には，帰謬法の議論によって直接取り扱うことが避けられていた無限小も，解析の一部として扱うことができるようになる（無限小解析＝微分積分学の確立）．記号代数の整備が数学に何をもたらしたか．この問題については，いずれ別稿にてじっくり論じることにしよう．

まだ他にも論じるべきことは多くあるが，とにかく各巻からの具体例を見ることで，『原論』に対する理解を深めることにしよう．

6　各巻からの事例

6.1　第1巻命題47

命題の言明：「直角三角形において，直角に向かい合う辺〔斜辺〕の上の正方形は，直角を囲む2辺の上の正方形〔の和〕に等しい」．

エクテシス，ディオリスモスの内容：直角三角形を$AB\Gamma$とし，角$BA\Gamma$を直角であるとする．$B\Gamma$上の正方形は$BA, A\Gamma$上の正方形の和に等しい．

論証のポイント：いわゆる「ピュタゴラスの定理」，あるいは「三平方の定理」である．ただし，この定理の

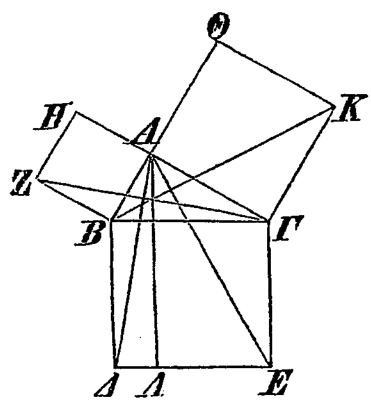

図6　『原論』第1巻命題47

[24]『原論』の体系構成を研究者たちが，不自然と考える理由の一端がここにある．『原論』は議論の展開について，なぜそのような形にするか何ら理由が示されない．そこで理由を推測するしかない．どうしてユークリッド『原論』は比例論を回避したのか．『全集』第1巻の解説において，その問題についての言及がある．［全集 2008］，136–140頁参照．

[25]古代における解析の手法についてさらに詳しい議論は，［マホーニィ 2007］第2章「ギリシャの幾何学的解析のもうひとつの見方」参照．特に紀元後4世紀前半頃の人，パッポスの解析の手法は多義的であり，後世への影響を考えると非常に重要である．

発見者，あるいは最初に証明を与えた人物をピュタゴラスと特定することには無理がある.[26] この証明の中で本質的な箇所は，次に掲げる三つの命題の利用にある（使用される順に沿って列挙する).

・与えられた線分の上に正方形を描く（命題 46),
・与えられた 1 点を取り，与えられた線分に平行な直線を引く（命題 31),
・三角形と同じ底辺を持ち，同じ平行線の中にある（すなわち高さが同じ）平行四辺形は，面積が 2 倍になる（命題 41).

直角三角形の各辺の上に正方形（$BH, \Gamma\Theta, B\Delta E\Gamma$）を作図する．それらの面積を等置することで，このよく知られた定理が導かれる．ただし，定理の言明が幾何学の用語で記されていることは注意を要する．決して「辺の長さの 2 乗」というような記号代数に結びつく表現ではない.

（図 6 で）直角をはさむ辺の上にある正方形（$ABZH, A\Gamma K\Theta$）の面積を別の長方形（$B\Lambda, \Gamma\Lambda$）の面積に移す際に，命題 31 の作図が活用される．この作図は，『原論』の中で頻繁に利用される．また，命題 41 は，命題 47 の直前に置かれた命題 42 から 45 で示される「領域付置」に直接関連する．非常に重要な技法である．領域付置とは，一つの直線と一つの直線図形が与えられるとき，その直線図形に等しい平行四辺形を傍らに描く作図である．言い換えれば，直線図形の面積を S，線分の長さを l とするとき，S を l を一辺とする平行四辺形（あるいは長方形）に置き換えることである．この命題 41 を利用する例として，

・あらゆる平行四辺形の，径のまわりの二つの平行四辺形の補形は互いに等しい（命題 43),
・与えられた直線のかたわらに与えられた三角形に等しい平行四辺形を付置する（命題 44),
・与えられた直線図形に等しい平行四辺形を与えられた直線角の中に作図する（命題 45),

を挙げることができる．命題 43 は図 7 において，平行四辺形 $AB\Gamma\Delta$ の対角線 $A\Gamma$ の両側にできる「補形」$EBHK$, $\Theta KZ\Delta$ の面積が等しいことを主張する．この命題も利用頻度が高く，次項で取り上げる第 2 巻命題 5，6 で不可欠の役割を果たしている.

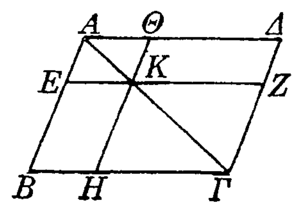

図 7 『原論』第 1 巻命題 43

[26][全集 2008]，89–100，243f 頁参照.

「ピュタゴラスの定理」とその逆命題が『原論』第1巻の末尾を占めている．しかし実質的には，領域付置の命題の証明が第1巻の議論の主目的であったのではないかと推測される．命題47，48に（命題46を除く）直前の命題は利用されない．そして命題46の証明にも，命題42から45は用いられない．順番が入れ替わったとしてもさしつかえないからである．また領域付置の技法は，第2巻以降利用されていく重要命題だからである．[27]

『原論』は第5巻の比例論を経て，第6巻では相似図形の議論が展開される．第1巻命題47は，そこで相似図形に関する定理へと変わる．すなわち，第6巻命題31で「直角三角形において，直角に向かい合う辺の上の形状は直角を囲む2辺の上に，相似でかつ相似〔な配置〕に描かれた形状〔の和〕に等しい」と一般化される．

6.2 第2巻命題5，6

命題の言明：「もし直線が等しい2切片と等しくない2切片へと切られるならば，直線全体の等しくない2切片によって囲まれる長方形に，二つの切断点の間の直線上の正方形を合わせたものは，〔全体の〕半分の上の正方形に等しい」（命題5），

「もし直線が2等分され，また何らかの直線がそれに1直線をなしてつけ加えられるならば，全体につけ加えられた直線と，つけ加えられた直線とによって囲まれる長方形に，〔全体の〕半分の上の正方形を合わせたものは，半分の直線とつけ加えられた直線を合わせた直線の上の正方形に等しい」（命題6）．

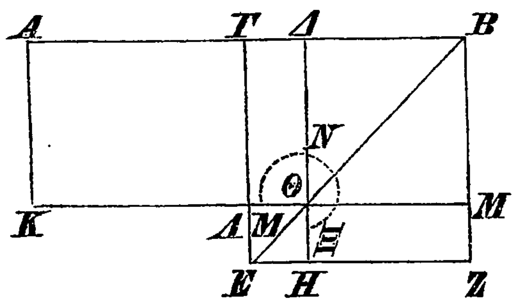

図8 『原論』第2巻命題5

エクテシス，ディオリスモスの内容：直線ABがまずΓにおいて等しい2切片に切られる〔第1巻命題10で証明済み〕．またΔで等しくない2切片に切られるとする．$A\Delta$, ΔBによって囲まれる長方形に，$\Gamma\Delta$上の正方形を合わせたものは，ΓB上の正方形に等しい（命題5）．

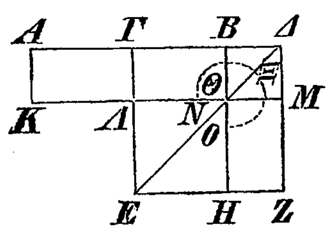

図9 『原論』第2巻命題6

直線ABがまずΓにおいて等しい2切片に切られる〔第1巻命題10で証明済み〕．また$B\Delta$がそれに1直線をなしてつけ加わる．$A\Delta$, ΔBによって囲まれる長方形に，ΓB上の正方形を合わせたものは，$\Gamma\Delta$の正方形に等しい（命題6）．

論証のポイント：これらの命題の証明の中でも，第1巻

[27][Mueller 1981], pp. 26f.

の命題31，46が活用されている．だが，より本質的なことは，前項で見た命題43の利用である．図8，または図9で，長方形$\Gamma\Theta$, ΘZが等しくなることを示すのに必要になる．

命題5，6は第2巻中でしばしば利用される重要命題である．長らくこれらの命題に対して，「幾何学的代数」という解釈（＝代数的な問題を幾何学的に記述しているという解釈）が研究者たちに支持されてきた．これら命題の言明は，あくまで図形に即して語られている．実際，上記の言明を示されたとしても何を意図しているのかつかみづらい．しかし記号代数を利用できるわれわれの立場から，置き換えて表現すると非常にわかりやすくなる．例えば，命題5に関して，図8で$A\Gamma = a, \Gamma\Delta = b$と置く．するとその主張は代数的な恒等式（量に関して一般的に成立する関係式）$(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$を意味すると考えられる（命題6も図9で$\Gamma\Delta = a$, $\mathrm{A}\Gamma = b$とすると，同じ恒等式で表現することができる）．[28] こうした解釈は多分に数学研究者になじみやすかったかもしれない．だが1970年代以降，疑問視されるようになった．古代ギリシアの人々は，こうした洗練された記号代数はまったく持ち合わせなかった．彼らにとって利用可能な技法，表現手段を前提にしつつ了解しなければ歴史理解とは呼べないのではないか．数学史研究者たちの中に方向転換が起きたのである．［林 2007］の2.1項で述べたように，過去の著作に記されたものが，現代から見てどれほど近いか．どれほど先駆的要素を見ることができるか．それを尺度に価値判断することは，われわれの採用する方針ではない．「現代人に了解しやすい，あるいは自然な解釈＝過去の人々が考えたこと」ではないだろう．まさしく数学史研究の根本に係わる問題である．掲げられたとおり，第2巻命題5，6はあくまで幾何学的な言葉で述べられている（$A\Delta$, ΔBによって囲まれる長方形，$\Gamma\Delta$上の正方形，ΓB上の正方形と表現されている）．これらの命題以降の諸命題での活用を目的していたと考える方がわれわれにとって好ましい．例えば，第3巻命題35，36（いわゆる「方ベキの定理」）の論証の中で利用される．代数的な恒等式ではなく，幾何学的な問題に必要な補助として考案されたと見る方がよいだろう．

6.3　第3巻命題16

命題の言明：「円の直径に直角にその端点から引かれた直線は，円の外部に落ち，この直線と円周との間の場所へと他の直線が入り落ちることにはならない．そして，まず半円の角はあらゆる鋭角の直線角より大きく，またその残りの角は〔あらゆる鋭角の直線角より〕小さい」．

エクテシス，ディオリスモスの内容：円を$AB\Gamma$とし，中心Δ，直径ABとする．Aか

[28]［中村他 1971］では，欄外に$ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（命題5，39頁），$(2a+b)b+a^2 = (a+b)^2$（命題6，40頁）と注釈なしに記されている．それぞれ図8において$AB = a$，$BM = b$，図9において$A\Gamma = a$，$B\Delta = b$と想定しているのだろう．

ら AB に直角に直径 AB の端点から引かれた直線は，円の外部に落ちる．半円の角，すなわち直線 BA と円周 $\Gamma\Theta A$ によって囲まれる角は，あらゆる鋭角の直線角より大きく，残りの角，すなわち直線 AE と円周 $\Gamma\Theta A$ によって囲まれる角は，あらゆる鋭角の直線角より小さい．

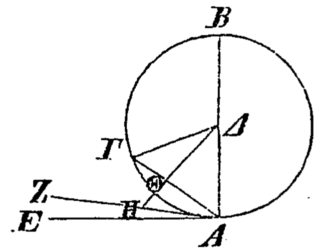

図 10 『原論』第 3 巻命題 16

論証のポイント：円の接線に係わる命題である．曲線に直線が「接する」という現象に対して，『原論』は視野を微小な範囲に限定する（微分係数につながる）発想を持ち込むことはない．第 3 巻冒頭の定義 2 で，「円に触れる直線で，延長されるときに円を切らないものはすべて円に接する」と規定される．あくまで円に限定して定義づけている．実際，

「円に触れる」＋「円を切らない」＝「円に接する」

という了解は，円のみならず変曲点を持たない曲線の場合には十分である．対象となる曲線を円だけでなく，古代ギリシアで研究されていた円錐曲線（放物線，楕円，双曲線）または螺線へと移す段階があり，さらに扱う範囲が拡大されるとき，あらためて「接線とは何か」が問われるだろう．接線問題は，周知のように微分法を生む直接の契機となる．だが，それは『原論』より，約 2000 年後のことである．17 世紀に入り，デカルトは（代数的曲線と直線の方程式から成る）連立方程式の重解問題として置き換えた．またニュートンやライプニッツは，曲線を微小な範囲に限定して考え，そこで成り立つ微分方程式の計算操作を定式化した．曲線への接線を数学的に精密に表現するのは，まだまだ先のことである．

一方，この第 3 巻命題 16 の証明は典型的な帰謬法である．図 10 のように，直径 BA に直角に引いた直線 AE が，円の内部に落ち込むとすると矛盾が生じること示す．その際，使用される命題は第 1 巻の命題だけである（利用される順に列挙）．

・二等辺三角形の底角は等しい（命題 5），
・三角形内の 2 角の和は 2 直角よりも小さい（命題 17），
・与えられた直線の上へ，その直線の上にない与えられた点から垂線を引く（命題 12），
・三角形の大きな角には大きな辺が向かい合う（命題 19）．

この命題の後半では，半径，円，接線が作る角の大きさについて論じている．これは 4.1 項で述べたように，角の定義に由来する問題である．円周と接線にはさまれた角（角状の角，「接触角」）をどのように捉えるかは，17 世紀ヨーロッパまで論じ続けられた．[29]

6.4　第 5 巻命題 16

命題の言明：「四つの量が比例するならば，交換されても比例することになる」.

エクテシス，ディオリスモスの内容：比例する四つの量を A, B, Γ, Δ とし，A が B に対するように，Γ が Δ に対するとする．（B と Γ が交換されても）比例し，A が Γ に対するように，B が Δ に対する．

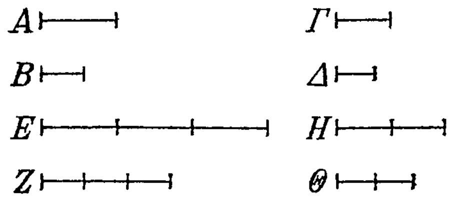

図 11 『原論』第 5 巻命題 16

論証のポイント：すでに述べたように，『原論』は決して幾何学的図形の問題のみを扱うのではない．第 5 巻では連続量に関する比例論，第 7 巻では数の比例論が論じられる．この命題 16 を現代的な記法で表すと

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \Gamma : \Delta \Longrightarrow \mathrm{A} : \Gamma = \mathrm{B} : \Delta \qquad (6)$$

となるだろう．しかし 6.2 項のところで述べたように，こうした現代の数学を前提に解釈することは危うさがある．問題点は二つある．

1）式(6)は，連続量による比例しか表していない，
2）式(6)は，同じ連続量であっても，（次元が違うなど）異種の量の間で成り立つ比例関係は表していない．

これら 1)，2) はギリシアの比例論に特徴的な事柄である．近世になってデカルトが $1 : a = a : a^2$ のように比例を図形的な意味合い（線分や正方形のような図形的描像）を除いて記号表示し，認識する方法を提示するまで規範として存続し続けた．ただしこの第 5 巻命題 16 の証明は，1)，2) の原則にもかかわらず，極めて一般的に行われる．利用される命題は，同じ第 5 巻の次のものである．

・部分は同多倍と同じ比を持つ．ただし〔部分と多倍は〕対応する順序でとられる（命題 15），
・同一の比に同じ比は互いに対しても同じである（命題 11），
・第 1 の量が第 2 の量に対して持つ比が第 3 が第 4 に対する比と同じであり，第 1 が第 3 よりも大きいならば，第 2 も第 4 よりも大きく，等しいならば等しく，小さいならば小さい（命題 14）．

---

[29]第 3 巻命題 16 の後半部は，後世に挿入された可能性があると指摘されている．［全集 2008］，306，325f 頁参照．

特に 1) に関して，われわれは自分たちの常識をリセットする必要がある．デカルトの記号は一般量に用いる．すなわち，離散量，連続量を区別なく考え，より広い範囲の量一般に適応することができる．しかし『原論』は，そうした記号を持ち合わせていないだけでなく，離散量（＝数），連続量をカテゴリーとして厳格に分別する．したがって，この第 5 巻命題 16 と並行して，第 7 巻命題 13 で次が提示される．

・もし四つの数が比例するならば，交換されても比例するだろう（下線引用者）．

単に「量」を「数」に変えただけの命題をわざわざ証明する．したがって第 5 巻命題 16 の言明を，式(6)によって単純に代替できると了解すべきでない．そもそも第 7 巻定義 2 によれば，「数とは単位〔1〕からなる多」である．このとき同巻定義 21 で，数に関して成立する比例は，次のようにと定義されている．

・第 1 の数が第 2 の数の，第 3 の数が第 4 の数の同じ倍数であるか，同じ約数であるか，または同じ約数和〔＝割り切れない場合〕であるとき，それらの数は比例する．

同じ第 7 巻の命題 4 で，一方の数がもう一方の数を「割り切る」か「割り切らないか」しかないことを証明した上で，命題 13 は，単純に第 3 の数と第 2 の数の立場を入れかえるだけで，同じ約数，約数和の関係が成立するとしている．

第 5 巻命題 16 の論証は次のように進む．まず図 11 のように，四つの連続量 A, B, Γ, Δ がある．A が B に対するように，Γ が Δ に対している．このとき，A, B の等多倍 E, Z をとり，また Γ, Δ の等多倍 H, Θ をとる．そして E, H，または Z, Θ の関係を考えて，最終的に $A : \Gamma = B : \Delta$ を示している．第 5 巻の定義 5 に「同じ比」という項目があり，命題 16 の証明でも効いている．わかりやすくするため現代風に記すと（(a, b)によって比を表す），

$$(a, b) = (c, d) \iff (m, n \text{ を自然数として})$$
$$ma > nb,\ \text{かつ}\ mc > nd,\ \text{または}\ ma = nb,\ \text{かつ}\ mc = nd,\ \text{または}\ ma < nb\ \text{かつ}\ mc < nd$$

である．比例 (a, b) があくまでも関係であり，決して比の値 $\frac{a}{b}$ と同一視されない点は注意を要する．二つの比が同じであること，四つの量の間の量的関係が同じであることを上のように定義づけるのである．これもギリシア数学における独自性の一つである．比が等しい，同じであることをなぜこのように定義しなければならないのか．共測量，非共測量，両者に共通して適応することを意識しての配慮ではないかと推察されている．[30]

[30]［全集 2008］，144–150 頁参照．

6.5 第 12 巻命題 10

命題の言明：「すべての円錐〔の体積〕はそれと同じ底面，等しい高さを持つ円柱〔の体積〕の 3 分の 1 である」.

エクテシス，ディオリスモスの内容：円錐が円柱と同じ底面，すなわち円 $AB\Gamma$ を持ち，かつ等しい高さを持つとする．円錐の体積は円柱の体積の 3 分の 1 になる．

論証のポイント：この命題の証明も帰謬法による．論証は，円柱の体積が円錐の体積の 3 倍でないと仮定し始まる．このとき次の 2 通りが考えられる．

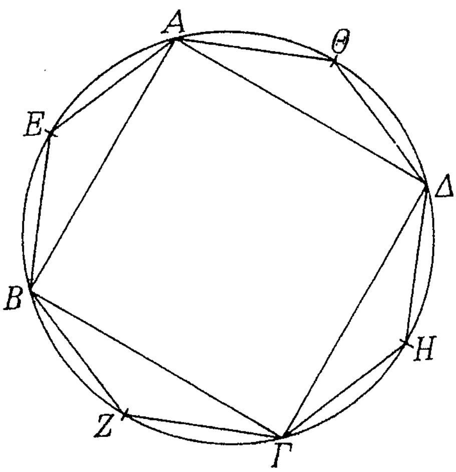

図 12 『原論』第 12 巻命題 10

1) 円柱の体積が円錐の体積の 3 倍よりも大きい場合，
2) 円柱の体積が円錐の体積の 3 倍よりも小さい場合．

それぞれに矛盾が生じることから，第 3 の場合（円錐の体積は円柱の体積の 3 分の 1 になる）に至っている．すでに 5.2 項で第 1 巻命題 6 を例に見たように，ここでも量の関係に関して暗黙の前提，すなわち二つの量 a, b があるとき $a > b$, $a = b$, $a < b$ のいずれかが成立することになっている．求積問題（長さ，面積，体積を求める）は，現代のわれわれにとっては積分法の守備範囲である．その理論の中では，極限移行が必須である．『原論』には，そうした概念も，表現手段もない．こうして結果があらかじめ既知である事項に対して，2 回の帰謬法の繰り返しによって正当性を示すのである．では，そもそもその結果自体はどのようにして見いだすのか．『原論』は何も語らない．あくまで総合的論証のみを示すだけである．アルキメデスの文献の中では，求積問題を解決するための方法論と同時に論証が示されている．さらに彼は帰謬法を用いず，発見法と論証とを統合していく試みも行おうとしていた.[31] また別稿でアルキメデスを取り上げる際に考察することにしよう．

論証の展開は，後世において「取り尽くし法」と呼ばれた方法による．1)，2) ともに同様な論理が展開されるので，1) の場合に限定する．図 12 で，円 $AB\Gamma\Delta$ 内に正方形 $AB\Gamma\Delta$ が内接することを考える．その正方形の上に円柱と同じ高さの角柱（平行 6 面体）

[31]アルキメデスには，晩年に書かれたと推測される『方法』という著作がある．その命題 14 は，円柱が平面によって切断される場合の体積を求める．その際，アルキメデス自身が用いてきた仮想天秤による（思考実験の）発見法とは異なる方法が示されている．17 世紀になってカヴァリエリが提唱した方法（「不可分者」(indivisibles) の理論）と実質的に同等のものを見ることができる．アルキメデスは，『原論』で示される論証形式と違った次元で思考していたことが窺える．［アルキメデス 1990］，第Ⅲ部第 4 章参照．

を立てる．このとき円に外接する正方形を考えると，その面積は，今の内接正方形 $AB\Gamma\Delta$ の 2 倍になる．ところが，外接正方形の上に同高の角柱を立てると，これは当該の円柱の体積よりも大きい．一方で，内接正方形上の平行 6 面体の体積は底面の面積に比例する（第 11 巻命題 32 より）．したがって外接平行 6 面体の体積の 2 分の 1 である．よって，

$$\text{内接正方形 } AB\Gamma\Delta \text{ 上の角柱の体積} > \text{円 } AB\Gamma\Delta \text{ 上の円柱の半分}$$

となる．円柱の中に含まれ，かつ体積が半分よりも大きい立体を取り除いてしまう．（円柱の半分以下の体積を持つ）残った立体に対しても同様のことを考える．

そこで，図12 にある円弧を点 E, Z, H, Θ で 2 等分していく．円と内接正方形のとの隙間にできる部分に，三角形 AEB 等々を作る．このとき，三角形の面積は，それを含む円の切片の半分よりも大きい（第 12 巻命題 2 の中に示されている）．また円柱と同じ高さの角柱を三角形の上に立てる．すると次が成り立つ．

$$\text{三角形 } ABE \text{ 等々の上に立つ角柱の体積} > \text{円 } AB\Gamma\Delta \text{ 上の円柱に含まれる切片の半分}$$

こうした底面部分の円と内接図形との隙間の部分に次々に三角形を考え，その上に立つ円柱と等高の角柱とを比較する．角錐の体積が同底，等高の角柱の体積の 3 分の 1 であることは，この第 12 巻の命題 7 系で示されている．同じ作業が繰り返されて，円柱の体積（V_1 とする）と角錐の体積（V_2 とする）の 3 倍との差よりも小さい何らかの切片が残るというのである．実質的にこの議論が含意するのは，任意に与えられた量 ϵ に対して，

$$V_1 - 3 \times V_2 < \epsilon$$

とすることができるということである．こうした取り尽くし法による議論を支えるのは，『原論』第 12 巻以前に既出の以下の命題，定義である．

- 二つの量が互いに対して比を持つの言われるのは，多倍されて互いを超えることができるものである（第 5 巻定義 4 ）．
- 二つの不等な量が定められ，もし大きい方の量からその半分よりも大きい量がひかれ，残りからまたその半分より大きい量がひかれ，これがたえず繰り返されるならば，最初に定められた小さい方の量よりも小さい何らかの量が残されるに至るだろう（第 10 巻命題 1 ）．

前者は，現代の解析学において「アルキメデス（あるいはエウドクソス）の原理」と呼ばれる．さらに 1) の場合の仮定より，多角形 $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ を底面とし，円柱と同じ高さの

角柱の体積は，円錐の体積の 3 倍よりも大きいことになる．一方で，いまの角柱は，同じ底面 $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ を持ち，円錐と同じ頂点の角錐の体積の 3 倍である．したがってこの角錐は，同じ頂点を持ち，底面が円 $AB\Gamma\Delta$ の円錐の体積よりも大きいことになる．しかし，実際には角錐は円錐に含まれる．よって矛盾が生じる（したがって，円柱の体積は，同じ高さの円錐の体積の 3 倍よりも大きいことにならない）．

すべて一端，角柱，角錐の議論に置き換えて，両者の関係について証明済みの結果を利用する．同時に最も本質的なことは，やはり第 10 巻命題 1 の論法の利用である．こうした論法（2 回の帰謬法の繰り返し）をとらざるを得ないのは，極限移行のように，直接無限に係わる議論を表現する術を持たないことに理由がある．ただそれを避けるための理論構成としては，実に巧妙なものといえるだろう．確かにわれわれの目からは，ある意味煩雑に見える．ただ結果が既知であれば，証明の展開は形式的である．量に関する暗黙の前提を認めた上で，パターンにはめ込むだけである．むしろ（アルキメデスにも言えることだが），級数計算を簡略に表現する手段が欠如していることが限界をもたらしているように見える．加えて帰謬法に訴える以前にどのように求める結果を発見するのか．それが読者には不明なままである．アルキメデスの著作ならば，仮想された天秤を使った発見法が示され，さらに帰謬法による論証に移行する．結局は，無限（あるいは無限小）を数学の対象として明確に組み入れ，それを扱う形式的演算を確立しなければ前に進めないのであろう．級数計算の表現法，適切な発見法（無限小解析），いずれも代数記号を備えて初めて可能になる事柄である．それらすべてをギリシアの数学に求めることは無論できない．17 世紀ヨーロッパにおいてようやく本格化することである．ギリシアの遺産が伝承され，発展し，さらに思考の枠組みを大きく変化させるためには，やはり長い年月が必要だったのである．

7 文　献

1 次資料（翻訳も含む）

[Apollonius 1891–1893] *Apollonii pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis*, Vol. I – II, ed. by J. L. Heiberg (Leipzig: B. G. Teubner, 1974) (rep.).

[Euclid 1883–1916] *Euclidis opera omnia*, Vol. I –VII, ed. by J. L. Heiberg and H. Menge (Leipzig: B. G. Teubner, 1883–1916).

[Euclid 1969–1977] *Euclides Elementa*, Vol. I – V, ed. by J. L. Heiberg and E. S. Stamatis (Leipzig: B. G. Teubner, 1969–1977).

[Heath 1925] *Euclid The Thirteen Books of the Elements* (2nd ed. 1925_1), Vol. 1 (Book I – II), Vol. 2 (Book III–IX), Vol. 3 (Book X–XIII), Translated with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath (New York: Dover Publications, Inc., 1956)

[Proclus 1992] *Proclus A Commentary on the First Book of the Euclid's Elements* (1971_1), Translated with introduction and notes by Glenn R. Morrow (Priceton: Princeton University Press, 1992).

[Vitrac 1990–2001] *Euclide Les Éléments*, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Vol. 1 (Livres I-IV), Vol. 2 (Livres V-IX), Vol. 3 (Livre X), Vol. 4 (Livres XI-XIII) (Paris: Presses Universitaire de France, 1990–2001).

[アリストテレス 1968]『アリストテレス全集』3,『自然学』出隆・岩崎允胤訳（岩波書店, 1968年).

[アルキメデス 1981] アルキメデス『球と円柱について』(科学の名著9) 佐藤徹訳・解説（朝日出版社, 1981年).

[アルキメデス 1990] アルキメデス『方法』佐藤徹訳・解説（東海大学出版会, 1990年).

[全集 2008]『エウクレイデス全集』, 第1巻『原論 I-VI』斎藤憲・三浦伸夫訳・解説（東京大学出版会, 2008年).

[ヒルベルト 1970] ヒルベルト『幾何学の基礎』, クライン『エルランゲン・プログラム』寺坂英孝・大西正男訳（共立出版, 1970年).

[中村他 1971]『ユークリッド原論』中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳（共立出版, 1971年₁, 1996年（縮刷版)).

2次文献, その他

[Heath 1921] Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics* (1921₁), Vol. I, II (New York: Dover Publications, Inc., 1981) (rep.).

[Knorr 1996] Knorr, Wilber R., "The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text and Its Alternatives," *Centaurus*, **38** (1996), pp. 208–276.

[Mueller 1981] Mueller, Ian, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structures in Euclid's Elements* (1981₁) (Mineola: Dover Publications, Inc., 2006) (rep.).

[Mueller 1991] Mueller, Ian, "On the Notion of a Mathematical Starting Point in Plato, Aristotle, and Euclid," in *Science and Philosophy in Classical Greece*, edited by Alan C. Bowen (New York, London: Garland Publishing Inc., 1991), pp. 59–97.

[Netz 1999] Netz, Reviel, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History* (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).

[Rommevaux *et al.* 2001] Rommevaux, S., Djebbar, A. et Vitrac, B., "Remarques sur l'Histoire du texte des *Éléments* d'Euclide," *Archive for History of Exact Sciences*, **55** (2001), pp. 221–295.

[斎藤 1997] 斎藤憲『ユークリッド『原論』の成立：古代の伝承と現代の神話』（東京大学出版会, 1997年).

[サボー 1978] サボー, A.『ギリシア数学の始源』中村幸四郎・中村清・村田全訳（玉川大学出版会, 1978年).

［林 2007］林知宏「数学史講義（第 1 回）：講義を始めるにあたって」,『学習院高等科紀要』**5**, 49–66 頁.

［マホーニィ 2007］マホーニィ，M. S.『歴史の中の数学』（1982 年）佐々木力訳（ちくま学芸文庫，2007 年）.

［Alain 1958］Alain, *Les Arts et les Dieux*, Édition établie et annotée par Georges Bénézé（*Bibliothèque de la Pléaide*）（Paris: Gallimard, 1958）.

［アラン 2008］アラン『芸術の体系』長谷川宏訳（光文社古典新訳文庫，2008 年）.