最適成長の理論:計画期間が有限である場合*

江　沢　太　一

最適成長の理論は，計画期間の扱い方からみて二つの類型にわけることができよう。一つは計画期間を無限大にとるものであり，もう一つは有限期間を考えるものである。後者の代表例としては，カス〔2〕をあげることができよう。カスのモデルでは次のような目的関数が設定されている。

$$J(T)=\int_0^T U[c]^{-}e^{\delta t}dt \qquad (1)$$

ここでTは計画期間の長さ，$c=c(t)$はt時点における一人当り消費，δは時間選好率をあらわし，Uは効用関数である。

このような有限期間について最適成長を考える場合には，付加条件として計画終期，つまりT期末における一人当り資本ストックの大きさがあらかじめ与えられている。つまり(1)の最大化問題の制約条件の一つとして

$$k(T)\geqq k^T \qquad (2)$$

の条件を追加する。ここでk^Tはあらかじめ定められた一定の値である。

本稿は一つの簡単なモデルについて最適成長問題を考え，次の二つの問題を分析することを目的とする。(1) (2)式のk^Tを選択の対象と考え，(1)式で与えられる$J(T)$とk^Tとの選択可能曲線を特定のモデルのもとで導く。社会は，社会的厚生関数の値を極大ならしめる点をこの曲線上から選択することになる。(2) 次にそのような見地から，T期間にわたる最適化とそれを越える期間についての最適化との間の整合性が保たれるには，以下のモデルの下では目的関数がどのような形状をしていなければならないかを問う。

従来のモデルにおける問題の取り扱いとそれについての論評を最後の9「問題点の要約」においてのべることにし，さっそくモデルの分析に入ることとしよう。

1　モデルの説明

ソロー・タイプの新古典派集計モデルを対象とし，次のような関数を定義しよう。

$$y=f(k) \qquad (1)$$

yは一人当り産出量，kは資本労働比率とする。関数fは次の条件をみたし，かつ連続で2回微分可能とする[1)]。

$$\left.\begin{array}{l} f'(k)>0,\ f''(k)<0, \\ \qquad \text{for } 0\leqq k<\infty \\ f'(0)=\infty,\ f'(\infty)=0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

ここで$f'(k)$は資本の限界生産力を示すから，はじめの二つの条件は$0\leqq k<\infty$の範囲で資本の限界生産力が正であり，かつ逓減的であることを意味する。次の二つは労働，資本という生産要素が不可欠のものであるこ

*本稿は東京経済研究センター（ＴＣＥＲ）の定例研究会における報告をまとめたものである。席上有益なコメントを与えられた稲田献一先生および浜田宏一氏に厚く御礼申し上げます。

1)　このような性質をもつ生産関数は well-behaved であるといわれる。

とを示す。

以上の条件のもとで次のような極大化問題を考えよう。

$$\text{maximize } J(T)=\int_0^T c\,dt \qquad (3)$$

subject to

$$\left.\begin{aligned}&c=(1-s)\left[f(k)-\bar{c}\right]+\bar{c}\\&\dot{k}=s\left[f(k)-\bar{c}\right]-\lambda k\\&k(0)=k^{\circ},\ k(T)\geqq k^{T},\\&0\leqq s\leqq 1,\ \bar{c}>0.\end{aligned}\right\}(4)$$

ここで，状態変数 c，k および制御変数 s は，ともに時間 t の関数であるが，記号の簡潔化のために t を省いてある。$\bar{c}$ は一人当り最低生存費であり，s は貯蓄率であり，生産量 $f(k)$ が $\bar{c}$ をこえる部分の一定量とする。

したがって

$s=1$　ならば　$c=\bar{c}$

$s=0$　ならば　$c=f(k)$

となる。また k^T，k^0 はコンスタント，さらにドットは $\frac{d}{dt}$ をあらわす。λ は能率単位ではかった労働力人口成長率プラス資本の減価償却率であり，人口の一定割合が労働力化すると仮定している。

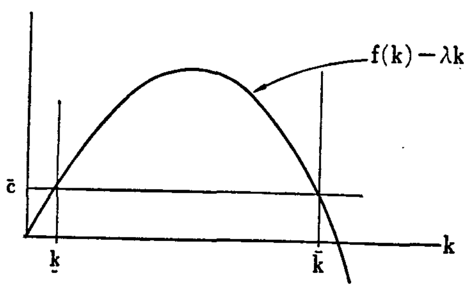
資本労働比率の初期値 k° について次の仮定をおくことにする。

$$\underline{k}<k^{\circ}<\bar{k} \qquad (5)$$

ここで $\underline{k}$，$\bar{k}$ はそれぞれ図•1に示すように

$$f(k)-\lambda k=\bar{c}$$

図・1



の二つの解であり，小さい方を $\underline{k}$，大きい方を $\bar{k}$ としたものである。以下においては，問題となる k の値はすべてこの範囲内にあるものとする。

2　最適経路の決定

以上のモデルにおける最適成長経路を決定するために，ポントリャーギン〔4〕の最大原理 (Maximum Principle) を応用しよう。まず，ハミルトン関数を次のように定義する。

$$H=(1-s)\left[f(k)-\bar{c}\right]+\bar{c}+q\left\{s\left[f(k)-\bar{c}\right]-\lambda k\right\} \qquad (1)$$

ここで q は補助変数であって，k の経路が最適であるための必要条件は，次の条件をみたす q が存在することである。

$$\dot{q}=\lambda q-[1-s+qs]f'(k) \qquad (2)$$

次に制御変数 s の値であるが，まず H を次のように変形してみよう。

$$H=(1-s+qs)\left[f(k)-\bar{c}\right]+\bar{c}-q\lambda k$$

そうすると，$f(k)>\bar{c}$ であるから，

$$\left.\begin{aligned}&q>1\quad\text{ならば}\quad s=1\\&q=1\quad\text{ならば}\quad 0\leqq s\leqq 1\\&q<1\quad\text{ならば}\quad s=0\end{aligned}\right\}(3)$$

となる。

さらに

$$\max(1+s+qs)=p$$
$$0\leqq s\leqq 1$$

とおけば，

$$p=\max(1,\ q)$$

となる。この p を用いれば，最適経路は前出の(3)および次の(4)式

$$\left.\begin{aligned}&\dot{k}=s\left[f(k)-\bar{c}\right]-\lambda k\\&\dot{q}=\lambda q-pf'(k)\end{aligned}\right\}(4)$$

によって与えられる。

なお $q(T)$ につき，次の条件を付加する。

$$\left.\begin{aligned}&k(T)=k^T\quad\text{ならば}\quad q(T)>0\\&k(T)>k^T\quad\text{ならば}\quad q(T)=0\end{aligned}\right\}(5)$$

そこで基本となる微分方程式(4)の解，つまり q と k の時間経路を $s=1$ の場合，$s=0$

の場合にわけて検討しよう。

(a)　$s=1$（すなわち，$q>1,\ p=q$）の場合。方程式(4)は次のようになる。

$$\dot{k}=f(k)-\bar{c}-\lambda k \qquad (6)$$

$$\dot{q}=[\lambda-f'(k)]q \qquad (7)$$

したがって特異解，すなわち $\dot{k}=0$，$\dot{q}=0$ となる解は次式によって与えられる。

$$f(k)-\bar{c}-\lambda k=0,\quad k=\underline{k} \text{ および } \bar{k}$$

$$\lambda-f'(k)=0,\qquad k=k^*$$

(b)　$s=0$（すなわち，$q<1,\ p=1$）の場合。方程式(4)は次のように書ける。

$$\dot{k}=-\lambda k \qquad (8)$$

$$\dot{q}=\lambda q-f'(k) \qquad (9)$$

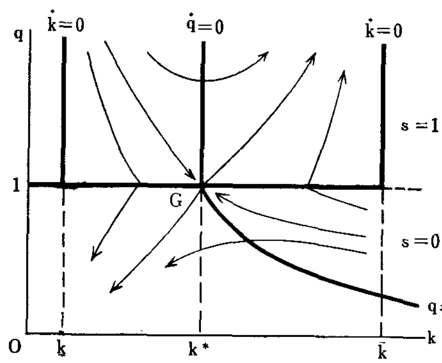
$\dot{q}=0$ となる点の軌跡は $\lambda q=f'(k)$ によって与えられる。ここで

$$\frac{dq}{dk}\bigg|_{\dot{q}=0}=\frac{f''(k)}{\lambda}<0 \qquad (10)$$

である。

以上の考察によって，微分方程式(4)の解の時間経路を次図のようなフェイズ・ダイアグラムによって示すことができる。

図・2



ここで点Gは $k=k^*$，$q=q^*$ となる点であり，この点は次式によって定義される。

$$\left.\begin{array}{l} s^*\left[f(k^*)-\bar{c}\right]=\lambda k^* \\ q^*=1,\ f'(k^*)=\lambda \end{array}\right\} \qquad (11)$$

この点は，周知のフェルプス等の黄金律経路にほかならない。この経路上における一人当り消費 c^* は

$$c^*=f(k^*)-\lambda k^* \qquad (12)$$

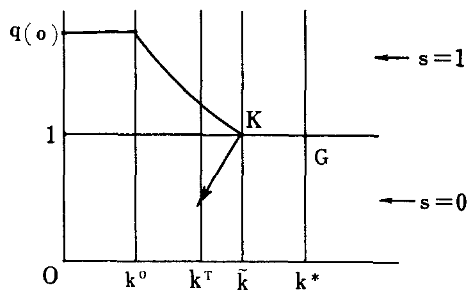
によって与えられる。

3　期末資本集約度と初期評価価格との関係

以上では，期末における資本集約度 k^T をあらかじめ与えられたものとしたが，k^T のさまざまな値に対応して，資本財の評価価格 $q(t)$ の初期値 $q(0)$ が一意的に定まるといえる。いま $k_0<k^*$ の場合について考えれば，$k^T<k^*$ の範囲では k^T の値が大きければ大きい程 $q(0)$ も大きく，$k^*\leqq k^T$ の範囲では $q(0)$ はコンスタントとなるといえる。ただし，これらは k の初期値 k° を不変とした場合の結論である。

この点を検討するために $\tilde{k}$ という変数を導入しよう。これは図・3 に図示されているように，最適経路が $q(t)=1$ において折れ曲る点Kにおける k の値を示す。いうまでもなく，この $\tilde{k}$ の値は k^T（およびk°）の値如何に依存する。すなわち次の関係が導かれる。

図・3



$$\frac{d\tilde{k}}{dk_T}=\frac{\tilde{k}}{k_T}\frac{(f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k})}{f(\tilde{k})-\bar{c}}>0 \qquad (1)$$

他方，$q(0)$ と $\tilde{k}$ との間には次式が成り立つ。

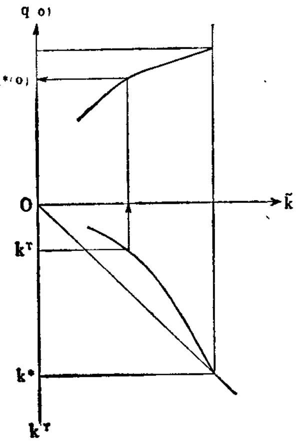
$$\frac{dq(0)}{d\tilde{k}}=q(0)\frac{f'(\tilde{k})-\lambda}{f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k}}>0 \qquad (2)$$

ここでは $\tilde{k}<k^*$ としているから，$f'(\tilde{k})-\lambda>0$

であり，極限において，つまり $\tilde{k}=k^*$においては(2)式は等式となる。

(1)および(2)式を結合して図示したものが図・4であり，$q(0)$ は k^T の増加関数であることがわかる。

図・4



この関係は(1)(2)からえられる次式

$$\frac{dq(0)}{dk^T}=q(0)\frac{\tilde{k}}{k^T}\frac{f'(\tilde{k})-\lambda}{f(\tilde{k})-\overline{c}}>0 \quad (3)$$

に対応するものである。

以上のようにして k^T の値が与えられれば，それに対してしかるべき $q(0)$ の値が一意的に対応し，この $q(0)$ と，k の初期値 k° とによって k と q の全経路は 2-(4) の微分方程式によって一意的に確定するわけである。

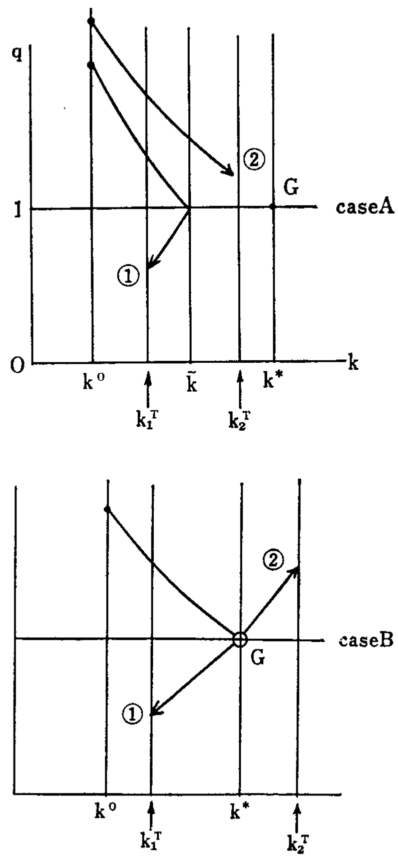
すでに述べたように，従来のモデル，たとえばカス〔2〕，あるいはサミュエルソン〔6〕，シェル〔7〕等計画期間を有限としたモデルにおいては k^T は所与であって，明示的には選択の対象とされていない。しかし k^T の値が異なれば当然社会的厚生 $J(T)$ の値も異なる。とすれば，この両者の間に一定の trade-off を考えるべきではなかろうか。すなわち k^T を後の期間，あるいは世代へ持ち越す資産と考えれば，k^T を社会的厚生の一構成要素とみなすべきであると考えられよう。

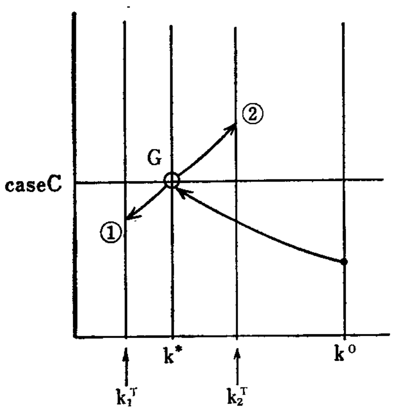
4 最適経路の概観

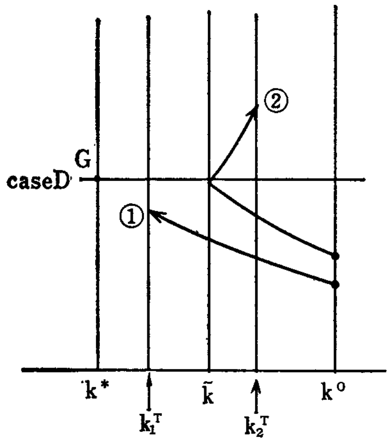
そこで選択可能曲線(トレード・オフ曲線)の形状を考えるにあたって，まず初期値 k° の大きさと最適経路との関係を概観しよう。この関係は図・5のように示される。順を追って説明しよう。

ケースAとBはいずれも初期値 k° が k^* より小さい場合である。Aは k° がかなり小さく，計画期間中 $s=1$ としても，つまり最大限の蓄積に努めても黄金律経路上には到達しない場合である。②は全期間を通じて $s=1$，つまり蓄積に専念する場合であり，$k_2{}^T$は与えられた k° とTのもとで達成可能なkの

図・5







値の最大限である。①は期末資本労働比率 k_1^T が k° と k_2^T の間にあり，計画期間の前半では $s=1$ として k の値を k° から $\tilde{k}$ にまで高め，途中で $s=0$ に切りかえて $\tilde{k}$ から k_1^T にまで引き下げる場合である。グラフには図示されていないが，一般的にいえばケース A には例外的な状態として，全期間を通じて $s=0$ とする場合もふくまれる。k^T が極めて低い場合（ただし$k^T>\underline{k}$）がそうである。しかしこれは k° がかなり大きいか，もしくは T が十分短い場合に限られる。このようにk^Tを極度に小さくとる経路は有効でなくなる場合があり，これは2-(5)の条件によって排除されている。この点については，後に再びふれることにしよう。

次にケースBであるが，これは k° が比較的大きく，計画期間中に黄金律経路上に到達する場合である。①はいったんこの経路に達してから，再びkの値を低下させて k_1^T に戻るものである。黄金律経路G上には瞬間的にしか位置しないこともありうるが，一般には点Gにしばらくの間滞留することになろう。したがって貯蓄率の値でみれば，①の場合には 1，s^*，0 という三つの局面を経ることになる。②の場合は逆に $k^*<k^T$ であり，貯蓄率は一般に順次に 1，s^*，1 という値をとる。

ケースC，DはケースA，Bとは逆に初期値 k° が k^* より大きい場合である。図には示されていないが，場合によっては $k^\circ<k^T$ という関係も考えられる。ただし $\overline{k^T}<\overline{k}$ とする。

5　選択可能曲線の形状（ケースA）

以上四つのケースについて選択可能曲線の形状を検討することにしよう。すなわち k^T の値をパラメトリックに変化させたときに $J(T)$[1] がどのように変化するかを考える。つまり，$J(T)$ と k^T（或いは変数と考えて$k(T)$）との間のトレード・オフ曲線（関数）を考察する。計画当局は，この選択可能曲線上の一点を社会的厚生関数に従って選択することになるわけである。

まずケースAをこの節で扱う。①という場合であるが，問題となる方程式はこの場合三つある。順次検討しよう。

(i) 第一に$J(T)\equiv J$の値であるが，計画期間の前半，つまり $s=1$ の時期に達成される値をJ_1，後半 $s=0$ の時期のものをJ_2としよう。すなわち$J=J_1+J_2$である。これらについて次の関係が成り立つ。

$s=1$の期間：

1)　以下 $J(T)$ と記したものはすべて最大値を意味する。

$$J_1=\int_o^{\tilde{t}} \bar{c}\,dt=\bar{c}\,\tilde{t} \qquad (1)$$

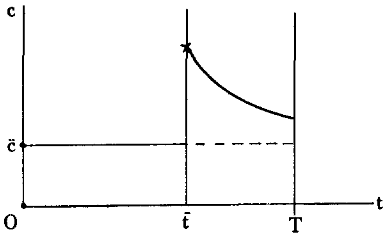
$s=0$ の期間：

$$J_2=\int_{\tilde{t}}^{T} f(k)dt,\quad \text{ただし}\ \dot{k}=-\lambda k \qquad (2)$$

ここで $\tilde{t}$ はスイッチの行われる時点を示す。

したがって，上の関係をフロー量 c について図示すれば次図のようになる。この図においてタテ軸は c をあらわし，$\bar{c}$ は最低生存費

図・6



水準である。ヨコ軸は時間を示す。$t=0$ から $t=\tilde{t}$ までは $s=1$，つまり $c=\bar{c}$ であり，$t=\tilde{t}$ 以降 $t=T$ までは $s=0$，従って $c=f(k)$ である。$t=\tilde{t}$ にて $k=\tilde{k}$，$t=T$ にて $k=k^T$ となる。

ここで(2)における積分変数 t を k に変換しよう。すなわち $dt=-\frac{1}{\lambda k}dk$ の関係を用いて，

$$J_2=-\frac{1}{\lambda}\int_{\tilde{k}}^{k^T}\frac{f(k)}{k}dk \qquad (3)$$

をうる。

(ii) 次に $t=\tilde{t}$ にて，$k=\tilde{k}$ となること，および $s=1$ の期間には

$$\dot{k}=f(k)-\bar{c}-\lambda k$$

であることを用いれば，次式がえられる。

$$\tilde{t}=\int_o^{\tilde{t}}dt=\int_o^{\tilde{k}}\frac{1}{f(k)-\bar{c}-\lambda k}dk \qquad (4)$$

(iii) 後半の $s=o$ の期間については

$$\dot{k}=-\lambda k$$

であるから，同様にして

$$T-\tilde{t}=\int_{\tilde{t}}^{T}dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{\tilde{k}}^{k^T}\frac{1}{k}dk \qquad (5)$$

がえられる。

以上 (i)(ii)(iii) で導いた式をそれぞれ全微分する。まず $J=J_1+J_2$，$J_1=\bar{c}\,\tilde{t}$ および(3)の関係から，

$$dJ=\bar{c}\,d\tilde{t}-\frac{1}{\lambda}\left\{A(k^T)dk^T-A(\tilde{k})d\tilde{k}\right\} \qquad (6)$$

をうる。ここで $A(k)\equiv f(k)/k$ である。次に(4)を全微分すれば

$$d\tilde{t}=\frac{1}{f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k})}d\tilde{k} \qquad (7)$$

となる。さらに同様に(5)から

$$d\tilde{t}=\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{k^T}dk^T-\frac{1}{\tilde{k}}d\tilde{k}\right\} \qquad (8)$$

がえられる。

以上(6)(7)(8)の三つの方程式をまとめれば次の通りである。

$$\lambda dJ-A(\tilde{k})d\tilde{k}-\lambda\bar{c}\,d\tilde{t}=-A(k^T)dk^T$$

$$d\tilde{k}-[f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k}]\,d\tilde{t}=0$$

$$\frac{1}{\tilde{k}}d\tilde{k}+\lambda d\tilde{t}=\frac{1}{k^T}dk^T$$

これらから求める関係が次のように導かれる。

$$\frac{dJ}{dk^T}=\frac{1}{\lambda k^T}\left\{f(\tilde{k})-\lambda\tilde{k}-f(k^T)\right\} \qquad (9)$$

あるいは，これは次のようにも表現される。

$$\frac{dJ}{dk^T}+1=\frac{1}{\lambda k^T}\left\{f(\tilde{k})-\lambda\tilde{k}-[f(k^T)-\lambda k^T]\right\} \qquad (10)$$

いま①の場合には $k^T<\tilde{k}$ であるから

$$f(\tilde{k})-\lambda\tilde{k}<f(k^T)-\lambda k^T,$$

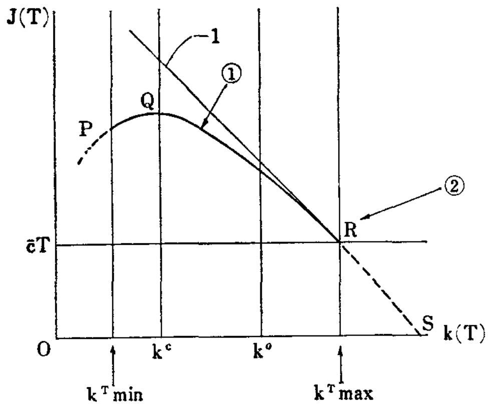
したがって

$$\frac{d}{dk^T}<-1$$

といえる。

以上からケース A におけるトレード・オフ曲線は図・7のように描くことができよう。ここで k^Tmax は所与の計画期間 T のうちに，同じく所与の初期値 k° によって達成可能な k の最大値であって，全期間にわたって $s=1$ とした場合に達成される値である。すなわち②の場合の到達点である。この場合タテ軸

図・7



の値は$\overline{c}\,T$となる。したがって点Rによってこの状態が示される。点Rより下に位置するRSの部分（破線部分)は達成不可能である。

次に k^Tmin は上とは逆に全期間にわたって $s=0$ とした場合の k^T の値であって，この場合

$\dot{k}=-\lambda k$, つまり $k=k^{\circ}e^{-\lambda T}$

であるから，

$k^T\min=k^{\circ}e^{-\lambda t}$

のようになる。この場合の到達点は点Pで示してある。

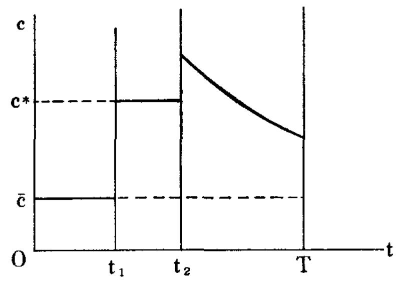
ここで注意されることは，点Pのようなところではトレード・オフ曲線が右上り，つまり$dJ(T)/dk^T>0$ となることがありうる，ということである。すなわち，PとRとの中間に点Q（kの値はk^C）のように，$dJ(T)/dk^T=0$ となる状態が生じる可能性がある。従ってこの場合，PQ の部分は有効ではない。なおPより左の部分は，資本の廃棄（これも有効ではない）を別とすれば達成不可能である。

従って，われわれは結局QRの部分を問題とすればよいといえよう。すなわち，曲線 QR が意味をもつ選択可能曲線ということになる。

6.　ケースBについて

ケースBは計画期間中に黄金律経路上に到達でき，暫くこの経路上にとどまった後，終端に向う場合である。①の状態では$k^T<k^*$であり，②では $k^*<k^T$ である。まず①からみることにしよう。この場合には，一人当りの消費フローcは次図のような推移をたどる。

図・8



ここでt_1は黄金律経路上に到達する時点であり，t_2はそこから離れる時点を示す。そこで $0\leqq t<t_1$ の間に達成される累積消費量をJ_1，$t_1\leqq t<t^*$ の間に達成されるものをJ^*，残りの $t^*\leqq t\leqq T$ の間に達成されるものをJ_2としよう。いうまでもなく$J=J_1+J^*+J_2$である。これらはそれぞれ次のように与えられる。

(i) $J_1=\overline{c}\,t_1$

$J^*=c^*(t_2-t_1)$

$$J_2=\int_{t_2}^{T}f(k)dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{k^*}^{k^T}\frac{f(k)}{k}\,dk$$

最後の関係には $t_2\leqq t\leqq T$ の間，$\dot{k}=-\lambda k$ となることを用いてある。

以上により

$$J=\overline{c}\,t_1+c^*(t_2-t_1)-\frac{1}{\lambda}\int_{k^*}^{k^T}\frac{f(k)}{k}dk \quad (1)$$

となる。

(ii) 次に上で導入した t_1, t_2 の値について考察しよう。まず $0\leqq t<t_1$, の期間中，$\dot{k}=f(k)-\overline{c}-\lambda k$ であることを想起すれば

$$t_1=\int_o^{t_1}dt=\int_{k^0}^{k^*}\frac{1}{f(k)-\overline{c}-\lambda k}dk$$
$$=\text{constant} \quad (2)$$

となる。k° と k^* は一定の数であるから t_1 は定数である。つまり k^T の選択の如何に依存しない。

(iii) 他方の t_2 であるが，$t_2 \leqq t \leqq T$ の期間中，$\dot{k}=-\lambda k$ であるから，上と同様の論法によって，

$$T-t_2=\int_{t_2}^{T} dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{k^*}^{k^T}\frac{1}{k}dk \quad (3)$$

がえられる。

以上の考察により，(1)と(3)を全微分した形はそれぞれ次のようになる。

$$dJ=c^*dt_2-\frac{1}{\lambda}\ \frac{f(k^T)}{k^T}dk^T \quad (4)$$

$$dt_2=\frac{1}{\lambda k^T}dk^T \quad (5)$$

この両者より

$$\frac{dJ}{dk^T}=\frac{1}{\lambda k^T}\ (c^*-f(k^T))$$

をうる。ここに

$$c^*=f(k^*)-\lambda k^*$$

の関係[1]を代入すれば，結局

$$\frac{dJ}{dk^T}=\frac{1}{\lambda k^T}\Big(f(k^*)-\lambda k^*-f(k^T)\Big) \quad (6)$$

となる。あるいは，書きなおせば，

$$\frac{dJ}{dk^T}+1=\frac{1}{\lambda k^T}\Big\{f(k^*)-\lambda k^*-[f(k^T)-\lambda k^T]\Big\} \quad (7)$$

である。すなわち

$k^T=k^*$ のとき $\dfrac{dJ}{dk^T}=-1$

$k^T<k^*$ のとき $\dfrac{dJ}{dk^T}<-1$

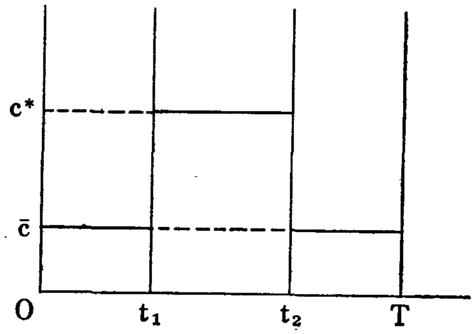
となる。

②の場合に移ろう。すなわち $k^*<k^T$ となる状態である。これまでと同様の考え方に従って議論を進めることができる。

1) 2—(12)式である。p. 49

まず消費フロー c の時間的パターンは次図に示す通りである。これまでと同様に，各期

図・9



間に対応する累積消費をそれぞれ J_1, J^*, J_2 としよう。すなわち，

$0 \leqq t < t_1$ にかんするもの J_1

$t_1 \leqq t < t_2$ にかんするもの J^*

$t_2 \leqq t \leqq T$ にかんするもの J_2

(i) そうすると，$J=J_1+J^*+J_2$は次のように与えられる。

$$J=\overline{c}\,t_1+c^*(t_2-t_1)+\overline{c}\,(T-t_2) \quad (8)$$

(ii) 次に t_1 の値は，①の場合と全く同様に

$$t_1=\int_{k^0}^{k^*}\frac{1}{f(k)-\overline{c}-\lambda k}dk=\text{constant} \quad (9)$$

となる。

(iii) t_2の値は①の場合とは異なって次式で与えられる。

$$T-t_2=\int_{k^*}^{k^T}\frac{1}{f(k)-\overline{c}-\lambda k}\ dk \quad (10)$$

以上の考察に基いて，(8)と(10)をそれぞれ全微分すれば次の関係がえられる。

$$dJ=(c^*-\overline{c})dt_2 \quad (11)$$

$$dt_2=\frac{1}{f(k^T)-\overline{c}-\lambda k^T}dk^T \quad (12)$$

この両式から

$$\frac{dJ}{dk^T}=-\frac{c^*-\overline{c}}{f(k^T)-\overline{c}-\lambda k^T}$$

がえられるが，ここにやはり

$$c^*=f(k^*)-\lambda k^*$$

の関係を代入すれば，結局これは

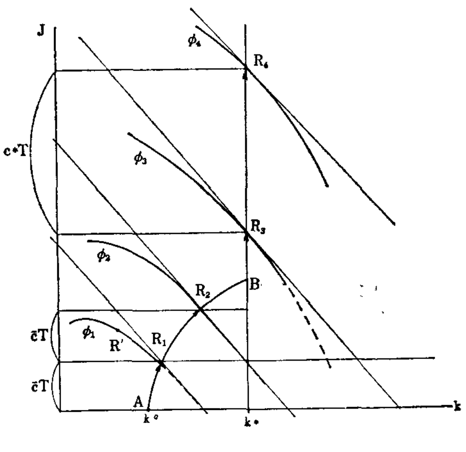
$$\frac{dJ}{dk^T}=-\frac{f(k^*)-\bar{c}-\lambda k^*}{f(k^T)-\bar{c}-\lambda k^T} \qquad (13)$$

となる。すなわち，$k^*<k^T$ であれば $\frac{dJ}{dk^T}<-1$，特殊ケースとして$k^*=k^T$のとき$\frac{dJ}{dk^T}=-1$となることがわかる。特に$\bar{k}$を，$f(k)-\bar{c}-\lambda k=0$ によってきまるkの値の大きい方とすれば，$k^T\to\bar{k}$において，$\frac{dJ}{dk^T}\to-\infty$となることが注意される。

7 資本不足経済における成長パターン（ケースA，Bの総括）

以上 A，B両ケースは，いずれも$k^\circ<k^*$という状態における最適成長を考えたものであった。これは資本集約度kの初期値が黄金律経路上の値k^*より低い経済，つまり資本蓄積が相対的に不足している経済を意味するものといえよう。この場合，Tという計画期間内の成長経路と，さらにこの計画期間を越えた将来の成長パターンとの関係はどうであろうか。これを図示したものが図・10である。

図・10



図において ϕ_1，ϕ_2……は最初のT期間，次のT期間……における選択可能曲線であり，ϕ_1は図・7に示した曲線に相当する。

この図において初期値$k_\circ$を示す点Aから出て，$R_1R_2R_3R_4$ と記してある曲線が重要である。というのは，このような経路のみが長期計画，短期計画の整合性を保証するものだからである。T期間の計画においては ϕ_1（の有効部分）上の任意の点，たとえばR'を選択できるが，このような点はより長期の$2T$，$3T$……期間の計画からみれば最適でない可能性がある。仮に$2T$ないし$3T$という期間の計画からみれば最適であっても，より長い$4T$，$5T$，……という計画の観点からみれば最適ではないかもしれない。従ってこのような長期，および短期の選択間に整合性が保たれているためには，社会的厚生関数の形が

$$W(T)=J(T)+k(T)=\int_0^T (c+\dot{k})\,dt+k^\circ \qquad (1)$$

という形でなければならないことになる。これはいうまでもなく 1）$\bar{c}$をこえる消費についての即時的限界効用が1に等しく，かつ 2）時間選好率が0，つまり世代間に差別を設けない，という二つの前提のもとで成り立つ結論である。

いうまでもなく，このような社会的厚生関数からえられる無差別曲線は，図において－1の勾配をもつ直線群で示される。整合的な最適経路は ϕ_1，ϕ_2，……という選択曲線と，この無差別曲線との接点の軌跡になる。

さてこの整合的な最適経路は，黄金律経路上に達するまでは $s=1$，つまり$\bar{c}$を越える生産物をすべて蓄積にまわすという蓄積志向型の経路である。これは実は時間最小計画の解でもある。つまり，与えられた k° から最短時間をもって黄金律経路上に達する，という計画の解経路に一致する。通常，時間最小計画は厚生経済学的に最適性をもっていないと考えられているが，さきにかかげた二つの前提 1)，2) の下では，最適経路（社会的厚生関数を極大化する，という意味で）の一部に一致

するわけである。ただ時間最小化計画は，$k^\circ < k^*$という条件のもとで黄金律経路上に達するまでの事態のみを扱うわけであるが，われわれの問題は黄金律経路上に達してから後の推移，および後にみるところの $k^* < k^\circ$ という状況での最適経路の問題を統一的に扱っているわけである。

黄金律経路上に達するまでの時間，すなわち図・10において点Aから点Bに至るまでの時間を t^* とすれば，これは次式で与えられる。

$$t^* = \int_{k^\circ}^{k^*} \frac{1}{f(k) - \bar{c} - \lambda k} dk \qquad (2)$$

ここでkが増加するにつれて $f(k) - \bar{c} - \lambda k$ (>0) の値が増加するから，その逆数である $1/(f(k) - \bar{c} - \lambda k)$ の値は連続的に減少し，k°，k^*で評価した値は有限であるから，積分値そのものも有限である。

次に曲線ABの形状について一言しておこう。ABは図示されているように右上り，かつk軸からみて強く凹である。この点は次のようにして確かめられる。まずこの範囲では

$\dot{J} = \bar{c}$，$\dot{k} = f(k) - \bar{c} - \lambda k$

であるため

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{\dot{J}}{\dot{k}}\right) = -\bar{c}\,\frac{f'(k) - \lambda}{(f(k) - \bar{c} - \lambda k)^2} < 0 \quad (3)$$

となるからである。さらに極限として点Bにおけるこの曲線の勾配は

$$\frac{\bar{c}}{c^* - \bar{c}} \quad (k = k^*\text{にて}) \qquad (4)$$

となる。

8　ケースC, Dにおける選択可能曲線

これまでは初期における資本ストックが相対的に過少な経済を考えてきた。次にこの逆の状態，つまり資本ストックが相対的に過大である経済について検討しよう。すなわち，$k^* < k^\circ$ の場合であり，ケースC，Dと名づけた場合である。ケースCはT期のうちに黄金律経路上に達する場合であり，ケースDは（資本の廃棄は考えないとして）達しない場合である。いうまでもなくTを与えられたものとすれば，ケースDはケースCに比べて初期資本ストックがさらに大きいわけである。ただしケースDにおいても，k°は$k^\circ < \bar{k}$の範囲にあるものと仮定する[1]。

ケースCにおけるトレード・オフ曲線の形状は，ケースBと全く同様である。黄金律経路に到達する経路は異なる——ケースBではkの値を増加させることにより，ケースCでは逆に値を減少させることにより $k = k^*$の状態に向う——のであるが，この過程で達成される消費の累積値は期末の資本集約度 k^T の値とは独立である。すなわち，ケースBではこの累積値は

$$\bar{c}\int_{k^\circ}^{k^*} \frac{1}{f(k) - \bar{c} - \lambda k} dk \quad (k^\circ < k^*) \ (1)$$

であり，ケースCでは

$$-\frac{1}{\lambda}\int_{k^\circ}^{k^*} \frac{f(k)}{k} dk (k^\circ > k^*) \qquad (2)$$

であって，いずれも（k^Tの値に無関係という意味で）定数である。いったん黄金律経路上に到達した後の経過は，期末資本労働比率 k^T が k^* より大であるか，小であるかに応じて二つに分けられるが，いずれもケースBとケースCとでは事情は全く同じである。

次に最後のケースDを考えよう。これはT期間中には黄金律経路上には到達できない場合である。ここでは資本が相対的に過大であるから，一部を廃棄すれば即時的に黄金律経路上に到達できるが，そのような過程は有効ではない。

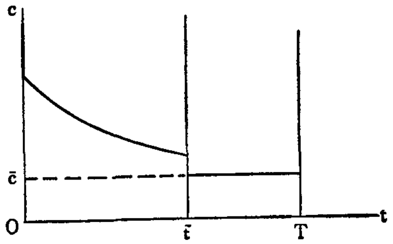
ケースDにおける運動は図・2に（P 49）に示されているように，①および②の二つの型が考えられる。①は全期間中$s = 0$とおく場

1）$\bar{k}$の定義については(p.48)を参照されたい。

合であり，k の値は一様に減少する。これは計画期間の途中で $s=0$ から $s=1$ に切り換わる②の場合の極限的な事態と考えられるから，以下②の過程を考えることにしよう。この過程は計画期間の前半は $s=0$ で，途中のたとえば $t=\tilde{t}$ という時点で $s=1$ にスウィッチして以降 $t=T$ まで進む，という形になる。$t=\tilde{t}$ における k の値を $\tilde{k}$ としよう。

上のような推移を消費フロー c の値についてみれば，図・11のとおりである 。

図・11



いま前半，つまり $0\leqq t<\tilde{t}$ の期間に獲得される消費フローの累積分を J_1，後半すなわち $\tilde{t}\leqq t\leqq T$ の期間にえられるものを J_2 としよう。$J=J_1+J_2$ である。そうすると

(i) $$J_1=\int_0^{\tilde{t}} f(k)dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{k^\circ}^{\tilde{k}}\frac{f(k)}{k}dk \quad (8)$$

$$J_2=\bar{c}(T-\tilde{t}) \quad (9)$$

が成り立つ。従って全微分により

$$dJ=-\frac{1}{\lambda}\frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}}d\tilde{k}-\bar{c}\,d\tilde{t} \quad (10)$$

がえられる。

(ii) 次に前半に関して

$$\tilde{t}=\int_0^{\tilde{t}} dt=-\frac{1}{\lambda}\int_{k^\circ}^{\tilde{k}}\frac{1}{k}dk \quad (11)$$

が成り立つから，

$$d\tilde{t}=-\frac{1}{\lambda\tilde{k}}\,d\tilde{k} \quad (12)$$

がえられる。

(iii) 最後に後半の関係から

$$T-\tilde{t}=\int_{\tilde{t}}^{T} dt=\int_{\tilde{k}}^{k^T}\frac{1}{f(k)-\bar{c}-\lambda k}dk \quad (13)$$

であるから，

$$d\tilde{t}=G(k^T)dk^T-G(\tilde{k})d\tilde{k} \quad (14)$$

が導かれる。ただし記号の簡単化のため

$$G(k)\equiv f(k)-\bar{c}-\lambda k$$

とおいてある。

以上(10)，(12)，(14)の三式をまとめれば，次のとおりである。

$$\lambda dJ+\frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}}d\tilde{k}+\lambda\bar{c}\,d\tilde{t}=0$$

$$d\tilde{k}+\lambda\tilde{k}d\tilde{t}=0$$

$$G(\tilde{k})d\tilde{k}-d\tilde{t}=G(k^T)dk^T$$

これよりクラーメルの公式を用いて

$$\frac{dJ}{dk^T}=-\frac{G(k^T)}{G(\tilde{k})}=-\frac{f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k}}{f(k^T)-\bar{c}-\lambda k^T} \quad (15)$$

のように解かれる。ここで $\tilde{k}<k^T$ であるから（両者とも k^* より小であることを用いて）

$$f(\tilde{k})-\bar{c}-\lambda\tilde{k}>f(k^T)-\bar{c}-\lambda k^T$$

が成り立ち，

$$\frac{dJ}{dk^T}<-1 \quad (16)$$

といえる。

特に全期間を通じて $s=0$ とおいた場合には

$$\dot{k}=-\lambda k \quad (17)$$

すなわち $k=k^\circ e^{-\lambda t}$ であるから，

$$k^T=k^\circ e^{-\lambda T} \quad (18)$$

となることはいうまでもない。

9. 問題点の要約

以上われわれは有限の計画期間をもつ最適成長の問題を単に一人当り消費フローの和 $J(T)$ だけでなく，一人当り期末資本ストック $k(T)$ をも社会的厚生関数に含める要因として明示的に扱う，という観点から考えてきた。従来のモデルは（筆者の知るかぎり）冒頭に述べたように，この型の問題は $k(T)$ の値

がある特定の値，たとえばk^Tより小さくなってはならない，という制約つまり $k(T) \geqq k^T$ という制約を付加することによって$J(T)$ の極大化をはかるものであった。カス〔2〕，シエル〔7〕等がその代表的な例であった。しかしこのような問題の設定は，次のような不十分さをもつと考えられる。第一に，共同体は今日の世代が（ここでいう今日とは，計画期間T内の時期を意味する）どれだけ消費すべきか，ということを次の世代（つまりT期以後に属する世代）にどれだけ資本を遺すか，ということとのかね合いで決定するものとみなすべきであって，この一方，つまり$k(T)$（の下限）のみを先に与え，しかる後消費について考えるという方式は不十分であると考えられる。外生的に（つまりモデルの内部からその値を導くのでないという意味で）k^T の値を与えるのであれば，たとえばその値が現存の生産能力（資源賦与量を含めて）に比べて極めて大きい場合には，今日の世代が享受する消費 $J(T)$は極めて小となるであろう。場合によってはゼロにならないという保証もない。k^T の与え方が明示されていない以上そう言わざるをえない。また場合によっては，与えられた k^T そのものが実現不可能であるかもしれない[1]。

このように $k(T)$ の値を適切に選ぶには，一方でT期を越える将来における世代を，他方で現存の生産能力を考慮しなければならない。すなわち現存のkつまり計画初期のkの値，k°がかなり大きい場合には，それ以上の蓄積を推進することは子孫に対して過大の資本を遺すことになるかもしれず，また限界生産力の上からいっても，資本の限界生産力 $f'(k)$ が逓減する限り（つまり$f''(k)<0$である限り）うる所が相対的に小さいといえよう。逆の場合つまり k° が比較的小さい場合は上

1）もっともこの点はカス〔2〕においては配慮されており，k^T の値を実現可能な範囲に限っている。

の逆の議論が成立するであろう。

ここで k° の相対的な大小，ということを述べたのであるが，これは何を基準に判定すべきであろうか。本モデルにおいては，それは黄金律経路における値k^*であった。すなわち，$f'(k^*)=\lambda$ なる式によって与えられる k にほかならない。この値は生産関数と，人口（労働力）成長率（プラス減価償却率）が与えられれば一意的に確定する。これにより，$k^\circ>k^*$ ならば相対的に消費に，逆に $k^\circ<k^*$ であれば相対的に蓄積にウエイトをおいた成長パターンを選択すべきである，というのが本モデルでの結論であった。

上の結論は実は第二の論旨に関連する。すなわち，先に述べた従来のモデルの設定では，T期内の計画とT期を越える計画との間の整合性が保証されていない。すなわち，たとえば5ヵ年計画では最適である経路が20ヵ年計画の見地からは最適ではない，ということが起りうるのである。この点の整合性を保つような計画を立案する，という考え方からみても，$k(T)$ を明示的に選択対象に加える必要が生ずるわけである。従来はこの点は計画期間を無限大にとることによって処理してきた[2]。しかし，このような考え方には無限大という計画期間を考えることが，経済学的に納得できるものかどうか，という点を別にしても，さらに積分

$$\int_0^\infty U(c)e^{-\delta t}dt$$

が収束するために，$\delta>0$ という仮定を設けなければならない[3] という問題がある。ここでδは時間選好率ないし割引率であり，cは

2）計画期間を無限大としたモデルの代表としては，カス〔1〕をあげることができよう。

3）もっともラムゼイ〔5〕，サミュエルソン〔6〕は別の仮定をおくことによってこの点を回避している。すなわち，効用の飽和，または生産力の飽和の仮定がおかれている。しかし，これらの仮定が上の $\delta<0$ という仮定より経済学的に

一人当り消費，Uは効用関数である。よくいわれているように，$\delta<0$ と仮定することは将来の世代よりも今日の世代を重視するという特定の価値判断を前提としている。このような価値判断が先験的に正当であるという保証はない。

より納得できるものであるとはいえないであろう。

参考文献

〔1〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies,* Vol. 32, No.3, July, 1695.

〔2〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem", *Econometrica,* Vol. 34, No.4, October, 1966, pp.833～850.

〔3〕 Koopmans, T.C., "Objectives, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models", *Econometrica,* Vol. 35, No. 1, January, 1967, pp.1～15.

〔4〕 Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (translated from the Russian), New York and London: Interscience Publishers., Inc., 1962.

〔5〕 Ramsey, F.P., "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal,* Vol. 38, 1928, pp. 543～559.

〔6〕 Samuelson, P.A., "A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule", *American Economic Review,* Vol. 55, No.3, June, 1965.

〔7〕 Shell, K., "Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change", in *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth,* (ed. by K.Shell), The M.I.T. Press, 1967, pp.1～29.