解の公式と正多面体群

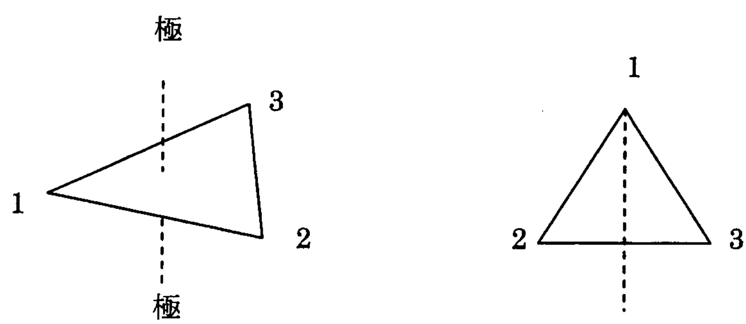
益子雅文

四次以下の方程式は，係数から出発し，それらに四則演算とベキ根をとる算法（$\sqrt[n]{\quad}$）とを行って，解をすべて表わすことができる（解の公式）．この小論では，まず方程式のガロア群である対称群 S_n を正多面体群によって視覚化し，それを用いて四次以下の方程式の解をベキ根で表わす過程を示し，さらに五次方程式の解の公式が一般には存在しないことをみてみようと思う．

Ⅰ．正二面体群（n＝3）

＊n＝3 の正二面体とは表裏のある正三角形のことである．

正二面体を自分自身に重ね合わせる回転の全体の作る群を正二面体群という．



1．正二面体群の回転の軸による分類

＊置換 P が m 個の文字 $i_1, i_2, \ldots, i_m$ を巡回的に動かし，他の文字を動かさないとき，P を巡回置換といい $P=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ で表わす．

①面の中心を通る軸を持つ回転（２個）

「三角形の頂点を 1, 2, 3 とするとき　(123), (132)」

②一つの頂点と向かい合う辺の中点を軸とする回転（３個）

「(12), (13), (23)」

③何も動かさない回転（１個）「(1)」　　　　　　　　計６個

＊３次の対称群 S_3 を視覚化したものと考えられる．

①，②，③は S_3 の共役類に対応している．

「(極を入れ替える回転)$\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right.$ の回転$\left.\right)$(極を入れ替える回転)$^{-1}$＝$\left(-\dfrac{2k\pi}{n}\right.$ の回転$\left.\right)$

(軸１を２に移す回転)(軸２の回転)(軸１を２に移す回転)$^{-1}$＝(軸１の回転)」

2．3次方程式の3つの解を x_1, x_2, x_3 とし，$g_1=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ とする．

①g_1^2 は**1**のすべての回転で不変である．

②g_1 は**1**の①と③の回転で不変であり，**1**の②の回転で $-g_1$ に変わる．

「(1) $g_1=g_1$，(123) $g_1=(x_2-x_3)(x_2-x_1)(x_3-x_1)=g_1$，(132) $g_1=g_1$，

(12) $g_1=-g_1$，(13) $g_1=-g_1$，(23) $g_1=-g_1$」

3．$g_2=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ とする．ここに ω は1の3乗根である．

①g_2^3 は**1**の①と③の回転で不変である．

②g_2 は**1**の①の回転により (123) $g_2=\omega^2 g_2$，(132) $g_2=\omega g_2$ となる．

「(1) $g_2=g_2$，(123) $g_2=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1=\omega^2 g_2$，(132) $g_2=\omega g_2$」

4．次の図式が得られ，したがって3次方程式の解の公式が得られる．

「詳しくは高等科紀要4号益子による」

$$\begin{tikzcd}
S_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{Q}(\sqrt{-3}) \arrow[d, dash, "2"] \\
A_3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})(g_1) \arrow[d, dash, "3"] \\
\{(1)\} \arrow[r, dash] & K=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})(x_1, x_2, x_3)=L(g_2)
\end{tikzcd}$$

＊$L／\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ は巡回拡大であるから $L=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})(g_1)$ となる g_1 が取れる．

「服部 p. 101」 $K／L$ も同様である．

三次方程式を $X^3+a_1X^2+a_2X+a_3=0$ とするとき

①**2**により $g_1\in L$，$g_1\notin \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$．

$g_1^2\in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$，実際

$g_1^2=a_1^2a_2^2+18a_1a_2a_3-4a_2^3-4a_1^3a_3-27a_3^2=\alpha\in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$．

「紀要4号 p. 36」

よって $g_1=\sqrt{\alpha}\in L$，$\alpha\in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$．

②i) **3**により $g_2\in K$，$g_2\notin L$．

$g_2^3\in L$，実際 $g_2^3=\dfrac{\beta+\sqrt{-27}g_1}{2}\in L$，ここで $\beta=9a_1a_2-2a_1^3-27a_3$．

「$g_2'=x_1+\omega^2x_2+\omega x_3$ とするとき

$g_2^3+g_2'^3=9a_1a_2-2a_1^3-27a_3=\beta\in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$「紀要4号 p. 36」

$(g_2^3-g_2'^3)^2=-27g_1^2$「紀要4号 p. 36」より $g_2^3-g_2'^3=\sqrt{-27}g_1\in L$

したがって $g_2^3=\dfrac{\beta+\sqrt{-27}g_1}{2}$，$g_2'^3=\dfrac{\beta-\sqrt{-27}g_1}{2}\in L$」

よって $g_2=\sqrt[3]{\dfrac{\beta+\sqrt{-27}g_1}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{\beta+\sqrt{-27}\sqrt{\alpha}}{2}}\in K$，$\dfrac{\beta+\sqrt{-27}g_1}{2}\in L$

ii）ゆえに $x_1+x_2+x_3=-a_1$，$g_2 = x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3 = \sqrt[3]{\dfrac{\beta+\sqrt{-27}g_1}{2}}$

$g_2' = x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3 = \sqrt[3]{\dfrac{A-\sqrt{-27g_1}}{2}} = \dfrac{a_1^2-3a_2}{g_2}$ から，K において

$x_1 = \dfrac{1}{3}(-a_1+g_2+g_2')$，$x_2 = \dfrac{1}{3}(-a_1+\omega^2 g_2+\omega g_2')$，$x_3 = \dfrac{1}{3}(-a_1+\omega g_2+\omega^2 g_2')$ を得る．

II．方程式 $f(X) = X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n = 0$ がベキ根のみで解き得ると仮定するとき，その解法において必要な素数次のベキ根を $\sqrt[p]{r}$, $\sqrt[q]{r_1}$, ... とすれば，これらのベキ根は $f(X) = 0$ の根 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と 1 の p 乗根，q 乗根，…との有理式として表わし得る．

「$\sqrt[p]{r} = g(x_1, \ldots, x_n, \omega, \zeta, \ldots)$ $\omega, \zeta, \ldots$ は 1 の p 乗根，q 乗根，…」　「高木 p. 203」

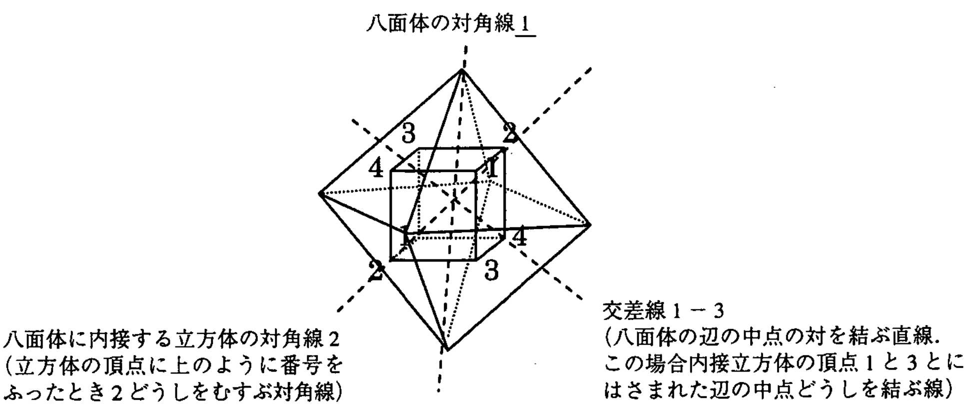
さらに，そのベキ根 $\sqrt[p]{r}$, $\sqrt[q]{r_1}$, ... としては，p, q, ... が n 以下の素数であるものでよい．

「服部 p. 106」

例えば 3 次方程式の場合，必要であったのは $g_1 = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ と $g_2 = x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ であった．ここに ω は 1 の 3 乗根である．

III．正八面体群

＊正八面体を自分自身に重ね合わせる回転の全体の作る群を正八面体群という．



1．正八面体群の回転の軸による分類

①立方体の対角線を軸とする角 $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$ 回転（$2\times4=8$ 個）

「立方体の対角線を 1，2，3，4 とすると

(243), (234)、(143), (134)

(142), (124)、(132), (123)」

②6本の交差線を軸とする角πの回転（6個）

「(12), (13), (14), (23), (24), (34)」

③3本の対角線を軸とする角$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$の回転（2×3＝6個）

「(1234), (1432)、(1342), (1243)、(1423), (1324)」

④3本の対角線を軸とする角πの回転（3個）

「(12)(34), (13)(24), (14)(23)」

⑤何も動かさない回転（1個）

「(1)」

計　24個

＊4次の対称群S_4を視覚化したものと考えられる．

①～⑤はS_4の共役類に対応している．

2．有理数を係数とする4次方程式$X^4+a_1X^3+a_2X^2+a_3X+a_4=0$の4つの解を$x_1, x_2, x_3, x_4$とする．$g_1 \in Q(\sqrt{-3})(x_1, x_2, x_3, x_4)$とし，$g_1^2$が1のすべての回転で不変であるとする．すなわち，$g_1$は解法において必要な平方根であるとする．

①このときg_1は1の各々の回転で不変であるか，$-g_1$に変わるが，

「g_1がg_1'に変わるとすると$g_1^2-g_1'^2=g_1^2-g_1^2=0$，よって

$(g_1-g_1')(g_1+g_1')=0$から$g_1=g_1'$または$g_1=-g_1'$」

以下の対応によってg_1を不変に保つ回転全体とg_1を$-g_1$に変える回転全体は1対1に対応する．すなわちこの2つの集合の個数は同じである：

g_1を$-g_1$に変える回転の一つをAとする．g_1を不変に保つ回転Iに対しIAを対応させ，またg_1を$-g_1$に変える回転Bに対しBA^{-1}を対応させる．

よってg_1を不変に保つ回転全体の数（＝g_1を$-g_1$に変える回転全体の数）

＝24÷2＝12.

②また，このときg_1を不変に保つ回転全体は1①のすべての回転を含むか，すべて含まないかのいずれかである．

『i）たとえば立方体の対角線1を軸とする角$\frac{2\pi}{3}$の回転（234）についてg_1が不変であれば，$(243)g_1=(234)((234)g_1)=(234)g_1=g_1$より(243)についても不変.

ii）(1234)は対角線1を対角線2に移すから，対角線2を軸とする回転Cについて$A'=(1234)C(1234)^{-1}$は対角線1を軸とする回転である．「対角線1上の点をPとすると，Pは(1234)で対角線2上へ，Cで変わらず，$(1234)^{-1}$で対角線1上へ動く」よってi)からA'はg_1を変えない.

したがってCはg_1を不変にする．「$C=(1234)^{-1}A'(1234)$であるが，$(1234)^{-1}$がg_1を$\pm g_1$に変えたとすると，A'は$\pm g_1$を変えず，(1234)は$\pm g_1$をg_1に変

える」

よって対角線 2 を軸とする回転はすべて g_1 を不変にする．

iii）(13)(24)が対角線 1 を対角線 3 に，(1432)が対角線 1 を対角線 4 に移すことから ii）と同様に対角線 3，4 を軸とする回転はすべて g_1 を不変にする.」

＊ ii）のように八面体群のなかに軸を移しあうものがあれば，二つの回転による g_1 の変わり方は同じである．

i）は極を入れ替える回転(24)によって $(24)(243)(24)^{-1} = (234)$ と書いても説明できる．

1②，**1**③，**1**④についても同様である．

「交差線 1 − 3 →交差線 1 − 2 ：(243)，交差線 1 − 3 →交差線 1 − 4 ：(234)
交差線 1 − 3 →交差線 2 − 3 ：(124)，交差線 1 − 3 →交差線 2 − 4 ：(1234)
交差線 1 − 3 →交差線 3 − 4 ：(142)
対角線 1 →対角線 2 ：(234)，対角線 1 →対角線 3 ：(243)」

＊③，④については，例えば(1234)によって g_1 が不変であれば③，④のすべての回転によっても不変であるが，(12)(34)によって g_1 が不変であっても③の回転によって g_1 が不変かどうかわからない．

③**2**①，②より g_1 を不変に保つ回転全体の組み合わせは 8 ＋ 3 ＋ 1 ＝ 12，すなわち立方体の対角線を軸とする角 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ の回転（2 × 4 ＝ 8 個），3 本の対角線を軸とする角 π の回転（3 個），何も動かさない回転（1 個）のみ可能である．

④実際 $\zeta_1 = x_1x_2+x_3x_4$，$\zeta_2 = x_1x_3+x_2x_4$，$\zeta_3 = x_1x_4+x_2x_3$，$g_1 = (\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_2-\zeta_3)$ とすればそのようになる．

3．**2** の 12 個の回転，すなわち立方体の対角線を軸とする角 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ の 8 個の回転，3 本の対角線を軸とする角 π の 3 個の回転，何も動かさない回転の範囲内で分類すると，やはりそれぞれは一つの類となる：

1①（対角線 1 → 2 ：(12)(34)，対角線 1 → 3 ：(13)(24)，対角線 2 → 4 ：(13)(24)）
「(243), (234)、(143), (134)、(142), (124)、(132), (123)の 8 個」

1④（対角線 1 →対角線 2 ：(243)，対角線 1 →対角線 3 ：(234)）
「(12)(34), (13)(24), (14)(23)の 3 個」

1⑤「(1)　1 個」

①g_2^2 が 12 個すべての回転で不変であるとする．g_2 を不変に保つ回転全体の個数は **2** と同様に 12 ÷ 2 ＝ 6．これは上の類の組み合わせではできない．

すなわち，g_2^2 が 12 個すべての回転で不変であり，g_2 がそのうちの 6 個の回転で不変であることはできない．

② $g_2{}^3$ が 12 個すべての回転で不変であるとき，g_2 を不変に保つ回転全体の個数は 12 ÷ 3 = 4．「$g_2 \to g_2$，$g_2 \to \omega g_2$，$g_2 \to \omega^2 g_2$ がすべて同じ個数」

この組み合わせの可能性は，3 本の対角線を軸とする角 π の回転（3 個），何も動かさない回転（1 個）のみである．

実際，$g_2 = \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3$ はそのような式である．

4．3②の 4 個の回転，すなわち 3 本の対角線を軸とする角 π の 3 個の回転，何も動かさない回転は，その範囲内で 1 つずつ 4 つの類となる．

$g_3{}^2$ が 4 個すべての回転で不変であるとき，g_3 を不変に保つ回転全体の個数は 4 ÷ 2 = 2．これはたとえば(12)(34)と(1)との組み合わせである．

実際，$g_3 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ がとれる．

5．4の 2 個の回転で $g_4{}^2$ が不変であるとき，(1)は g_4 を不変に保ち，(12)(34)は g_4 を $-g_4$ に変える．例えば $g_4 = x_1 - x_2$．

6．次の図式が得られ，したがって 4 次方程式の解の公式が得られる．

① $\zeta_1 = x_1x_2 + x_3x_4$，$\zeta_2 = x_1x_3 + x_2x_4$，$\zeta_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ とするとき

$g_1 = (\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_3)$．

② $g_2 = \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3$．

③ $g_3 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$．

④ $g_4 = x_1 - x_2$．

$$
\begin{tikzcd}
S_4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{Q}(\sqrt{-3}) \arrow[d, dash, "2"] \\
A_4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})(g_1) \arrow[d, dash, "3"] \\
V_4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M = L(g_2) \arrow[d, dash, "2"] \\
F_7 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & N_7 = M(g_3) \arrow[d, dash, "2"] \\
\{(1)\} \arrow[r, dash] & K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})(x_1, x_2, x_3, x_4) = N_7(g_4)
\end{tikzcd}
$$

「詳しくは高等科紀要 4 号益子による」

① $g_1 = (\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_3)$ とするとき　$g_1 \in L$, $g_1 \notin \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$．

「

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	g_1
(12)	ζ_1	ζ_3	ζ_2	$-g_1$
(12)(34)	ζ_1	ζ_2	ζ_3	g_1
(123)	ζ_3	ζ_1	ζ_2	g_1
(1234)	ζ_3	ζ_2	ζ_1	$-g_1$

」

$g_1^2 \in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$，実際

$g_1^2 = \alpha^2\beta^2 + 18\alpha\beta\gamma - 4\beta^3 - 4\alpha^3\gamma - 27\gamma^2 = \Gamma$（と置く）$\in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$,

ここに $\alpha = a_2$, $\beta = a_1a_3 - 4a_4$, $\gamma = a_1^2a_4 + a_3^2 - 4a_2a_4$

「高等科紀要 4 号 p. 39」

よって $g_1 = \sqrt{\Gamma} \in \mathrm{L}$，$\Gamma \in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.

②ⅰ）$g_2 \in \mathrm{M}$，$g_2 \notin \mathrm{L}$.

「(1) $g_2 = g_2$，(12)(34) $g_2 = g_2$，(13)(24) $g_2 = g_2$，(14)(23) $g_2 = g_2$

(123) $g_2 = \omega g_2$，(124) $g_2 = \omega^2 g_2$，(134) $g_2 = \omega g_2$，(234) $g_2 = \omega^2 g_2$」

$g_2^3 \in \mathrm{L}$，実際 $g_2^3 = \dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\,g_1}{2} \in \mathrm{L}$，ここで $\Pi = 9a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_3$.

『$g_2' = \zeta_1 + \omega^2\zeta_2 + \omega\zeta_3$ とするとき

$g_2^3 + g_2'^3 = 9a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_3 = \Pi \in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$

「紀要 4 号 p. 36」

$(g_2^3 - g_2'^3)^2 = -27g_1^2$「紀要 4 号 p. 36」より　$g_2^3 - g_2'^3 = \sqrt{-27}\,g_1 \in \mathrm{L}$

したがって $g_2^3 = \dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\,g_1}{2}$，$g_2'^3 = \dfrac{\Pi - \sqrt{-27}\,g_1}{2} \in \mathrm{L}$』

よって $g_2 = \sqrt[3]{\dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\,g_1}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\sqrt{\Gamma}}{2}} \in \mathrm{M}$，$\dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\,g_1}{2} \in \mathrm{L}$

ⅱ）ゆえに $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = -a_1$，$g_2 = \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 = \sqrt[3]{\dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\sqrt{\Gamma}}{2}}$

$g_2' = \zeta_1 + \omega^2\zeta_2 + \omega\zeta_3 = \sqrt[3]{\dfrac{\Pi - \sqrt{-27}\sqrt{\Gamma}}{2}} = \dfrac{a_1^2 - 3a_2}{g_2}$ から，M において

$\zeta_1 = \dfrac{1}{3}(-a_1 + g_2 + g_2') = \dfrac{1}{3}\left(-a_1 + \sqrt[3]{\dfrac{\Pi + \sqrt{-27}\sqrt{\Gamma}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{\Pi - \sqrt{-27}\sqrt{\Gamma}}{2}}\right)$,

$\zeta_2 = \dfrac{1}{3}(-a_1 + \omega^2 g_2 + \omega g_2')$，$\zeta_3 = \dfrac{1}{3}(-a_1 + \omega g_2 + \omega^2 g_2')$ を得る.

③ⅰ）$g_3 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$ とするとき $g_3 \in \mathrm{N}_7$，$g_3 \notin \mathrm{M}$.

「(12)(34) $g_3 = g_3$，(13)(24) $g_3 = -g_3$，(14)(23) $g_3 = -g_3$」

$g_3^2 \in \mathrm{M}$，実際 $g_3^2 = a_1^2 - 4(a_2 - \zeta_1) \in \mathrm{M}$.

『$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a_1$ と $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = a_2 - \zeta_1 \in \mathrm{M}$

「紀要 4 号 p. 36」より

$((x_1 + x_2) - (x_3 + x_4))^2 = a_1^2 - 4(a_2 - \zeta_1) \in \mathrm{M}$.』

よって $g_3 = \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - \zeta_1)} \in \mathrm{N}_7$.

したがって $x_1 + x_2 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - \zeta_1)}}{2} = \dfrac{-a_1 + g_3}{2} \in \mathrm{N}_7$,

$$\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4=\frac{-a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}}{2}=\frac{-a_1-g_3}{2}\in \mathrm{N}_7.$$

ii）$g_3{}'=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4$ とするとき $g_3{}'\in \mathrm{N}_7$，$g_3{}'\notin \mathrm{M}$.

「$(12)(34)\ g_3{}'=g_3{}'$，$(13)(24)\ g_3{}'=-g_3{}'$，$(14)(23)\ g_3{}'=-g_3{}'$」

$g_3{}'^2\in \mathrm{M}$，実際

$$g_3{}'^2=(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)^2=(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)^2-4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4=\zeta_1{}^2-4a_4\in \mathrm{M}.$$

よって $g_3{}'=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4=-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}$.

したがって，$\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4=\zeta_1$ より $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2=\dfrac{\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}=\dfrac{\zeta_1+g_3{}'}{2}\in \mathrm{N}_7$,

$$\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4=\frac{\zeta_1+\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}=\frac{\zeta_1-g_3{}'}{2}\in \mathrm{N}_7.$$

ただし $\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2$, $\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4$, $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$, $\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4$ は

$$(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4+(\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4)\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4+\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4+\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4=-a_3$$

であるように定めなければならない.

『$(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4+(\mathrm{x}_3+\mathrm{x}_4)\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$

$$=\frac{-a_1+\sqrt{a_1-4(a_2-\zeta_1)}}{2}\,\frac{\zeta_1+\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}+\frac{-a_1-\sqrt{a_1-4(a_2-\zeta_1)}}{2}\,\frac{\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}$$

$$=\frac{-a_1\zeta_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}$$

$$=\frac{-a_1\zeta_1+a_1\zeta_1-2a_3}{2}=-a_3$$

「$\zeta_1{}^3-a_2\zeta_1{}^2+(a_1a_3-4a_4)\zeta_1-(a_1{}^2a_4+a_3{}^2-4a_2a_4)=0$ 等より」』

④ i）$g_4=\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2$ とするとき $g_4\in \mathrm{K}$，$g_4\notin \mathrm{N}_7$.

「$(12)(34)\ g_4=-g_4$」

$g_4{}^2\in \mathrm{N}_7$，実際 $g_4{}^2=\dfrac{(a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2}{4}-\dfrac{8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4})}{4}$

$$=\frac{(a_1-g_3)^2}{4}-\frac{8(\zeta_1+g_3{}')}{4}\in \mathrm{N}_7$$

「$g_4{}^2=(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)^2=(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)^2-4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$

$$=\left(\frac{-a_1+\sqrt{a_1-4(a_2-\zeta_1)}}{2}\right)^2-4\left(\frac{\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4}}{2}\right)$$」

$$g_4=\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2=\frac{\sqrt{(a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2-8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4})}}{2}.$$

これと $\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2=\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}}{2}$ により

$$\boxed{x_1,\, x_2 = \frac{-a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}\pm\sqrt{(a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2-8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2-4a_4})}}{4}}$$

ii）$g_4' = x_3 - x_4$ とするとき $g_4' \in K$, $g_4' \notin N_7$.

「$(12)(34)\ g_4' = -g_4'$」

$$g_4'^2 \in N_7,\ \text{実際}\ g_4'^2 = \frac{(a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2}{4} - \frac{8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2+4a_4})}{4}$$

$$= \frac{(a_1+g_3)^2}{4} - \frac{8(\zeta_1-g_3')}{4} \in N_7$$

$$「g_4'^2 = (x_3-x_4)^2 = (x_3+x_4)^2 - 4x_3x_4$$

$$= \left(\frac{-a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2+4a_4}}{2}\right)」$$

$$g_4' = x_3 - x_4 = \frac{\sqrt{(a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2-8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2+4a_4})}}{2}.$$

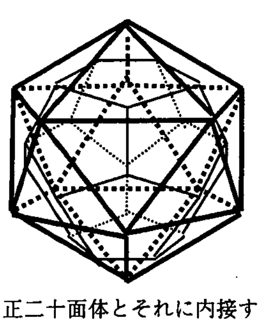
これと $x_3+x_4 = \dfrac{-a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}}{2}$ により

$$\boxed{x_3,\, x_4 = \frac{-a_1-\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)}\pm\sqrt{(a_1+\sqrt{a_1{}^2-4(a_2-\zeta_1)})^2-8(\zeta_1-\sqrt{\zeta_1^2+4a_4})}}{4}}$$

7．<u>注意</u>　$g_1{}^3$ と g_1 とをともに不変に保つ回転の数は $24 \div 3 = 8$．これは **1** の類の組み合わせではできない．よって最初に立方根をとることはできない．

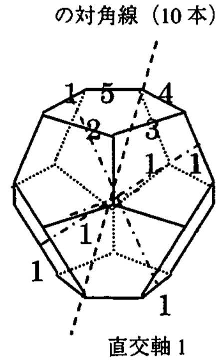
IV. 正二十面体群

＊正二十面体を自分自身に重ね合わせる回転の全体の作る群を正二十面体群という．



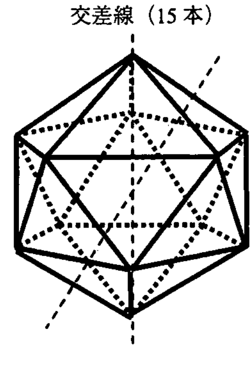
正二十面体とそれに内接する正十二面体

内接する正十二面体の対角線（10本）



直交軸 1
「辺の中点どうしを結ぶ 15 本の交差線のうち，互いに直交する 3 本」（5 組）
（木村 p. 207 の図参照）

正二十面体の交差線（15本）



正二十面体の対角線（6本）

1． 正二十面体群の回転の軸による分類

①正二十面体の 6 本の対角線を軸とする角 $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ の回転

（4 × 6 ＝24 個）

「正十二面体の直交軸を 1，2，3，4，5 とすると

(12345), (13524), (14253), (15432)、(13254), (12435), (15342), (14523)

(13542), (15234), (14325), (12453)、(15324), (13452), (12543), (14235)

(15243), (12354), (14532), (13425)、(14352), (13245), (15423), (12534)」

②15 本の交差線を軸とする角 π の回転（15 個）

「(23)(45)，(24)(35)，(25)(34)，(13)(45)，(14)(35)，(15)(34)

(12)(45)，(14)(25)，(15)(24)，(12)(35)，(13)(25)，(15)(23)

(12)(34)，(13)(24)，(14)(23)」

③正十二面体の 10 本の対角線を軸とする角 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ の回転

（2 ×10＝20 個）

「(123), (132)、(142), (124)、(125), (152)、(143), (134)、(153), (135)

(154), (145)、(234), (243)、(253), (235)、(254), (245)、(354), (345)」

④何も動かさない回転（1 個）

「(1)」

計　60 個

＊ 5 次の交代群 A_5 を視覚化したものと考えられる．

1 ①は A_5 の共役類としては 12 個ずつ 2 つの類に分かれる．

しかし $(13524)=(12345)^2$ などにより g_1 を変えるか変えないかに関しては 1 つの類になる．

下の図式にそって解くことを試みる．

$$\begin{array}{c} S_5 \\ | \\ A_5 \\ | \\ \{(1)\} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} S_5 \\ | \\ \bigcirc \end{array}$$

図式 1　　　　図式 2

<u>図式 1 の場合</u>

$g_0 = \prod_{i,j=1,\, i<j}^{5} (x_i - x_j)$ とおくと，g_0^2 は S_5 すべての元で不変であり，g_0 が A_5 のすべての回転で不変である．

2．$g_1(x_1, \ldots, x_n, \omega, \zeta)$，$\zeta$ は 1 の原始 5 乗根とし「II より」g_1^2 が **1** のすべての回転で不変であるとする．

①このとき g_1 は **1** の各々の回転で不変であるか，$-g_1$ に変わる．

g_1 を不変に保つ回転全体と g_1 を $-g_1$ に変える回転全体は 1 対 1 に対応する．すなわちこの 2 つの集合の個数は同じである．

②また，このとき g_1 を不変に保つ回転全体は **1** ①のすべての回転を含むか，すべて含まないかのいずれかである．

「正二十面体の対角線 1 →対角線 2 ：(23)(45)
対角線 1 →対角線 3 ：(15)(34)，対角線 1 →対角線 4 ：(12)(54)
対角線 1 →対角線 5 ：(15)(23)，対角線 1 →対角線 6 ：(12)(34)」

1 ②，**1** ③についても同様である．

「交差線 1 →交差線 2 ：(12345)，　交差線 1 →交差線 3 ：(13524)
交差線 1 →交差線 4 ：(14253)，　交差線 1 →交差線 5 ：(15432)
交差線 1 →交差線 6 ：(142)，　交差線 1 →交差線 7 ：(15)(34)
交差線 1 →交差線 8 ：(235)，　交差線 1 →交差線 9 ：(12453)
交差線 1 →交差線10：(135)，　交差線 1 →交差線11：(15342)
交差線 1 →交差線12：(13)(25)，　交差線 1 →交差線13：(354)
交差線 1 →交差線14：(14)(25)，　交差線 1 →交差線15：(12435)」

3．①　**2** ①より g_1 を不変に保つ回転全体の個数は $60 \div 2 = 30$.

2 ②より g_1 を不変に保つ回転全体の組み合わせの可能性は次の 8 通り．

$24+20+15+1=60$,　$24+20+1=45$
$24+15+1=40$,　$20+15+1=36$
$24+1=25$,　$20+1=21$
$15+1=16$,　1

したがって g_1^2 と g_1 とをともに不変に保つことはできない．すなわち，g_1^2 が 60 個すべての回転で不変であり，g_1 がそのうちの 30 個の回転で不変であることはできない．

② g_1^3 が 60 個すべての回転で不変であるとき，g_1 を不変に保つ回転全体の個数は $60 \div 3 = 20$．①よりこれもできない．

③ g_1^5 が 60 個すべての回転で不変であるとき，g_1 を不変に保つ回転全体の個数は $60 \div 5 = 12$．これもできない．

したがって g_1^n が 60 個の回転で不変であり，g_1 が $\dfrac{60}{n}$ 個の回転で不変であるような式 $g_1(x_1, \ldots, x_n, \omega, \zeta)$ は存在しない．

図式２の場合

S_5 の共役類およびその元の個数は次の通り.

代表元	個数
(1)	1
(12)	10
(12)(34)	15
(123)	20
(123)(45)	20
(1234)	30
(12345)	24

4. ① g_0^3 と g_0 とをともに不変に保つ回転全体の個数は 120÷３＝40.

これが可能なのは 24＋15＋１＝40 の組み合わせ，すなわち A_5 の類の組みわせである.

② g_1^2 が 40 個すべての回転で不変であるとき，g_1 を不変に保つ回転全体の個数は 40 ÷２＝20. **3**①よりこれはできない.

③ g_1^5 が 40 個すべての回転で不変であるとき，g_1 を不変に保つ回転全体の個数は 40 ÷５＝８. これもできない.

したがって g_1^n が 40 個の回転で不変であり，g_1 が $\frac{40}{n}$ 個の回転で不変であるような式 g_1 は存在しない.

＊24＋15＋１＝40 の A_5 の類の組み合わせは実際には部分群にならない.

5. g_0^5 と g_0 とをともに不変に保つ回転全体の個数は 120÷５＝24. **3**①よりこれはできない.

以上によって５次方程式はべき根の積み重ねでは解けないことがわかる.

V. その後エルミートは，楕円モジュラー関数を用いて５次方程式が解けるという注目すべき発見をした.「笠原氏の記事」

またクラインは，５次方程式，楕円関数，および正 20 面体の回転を互いに結びつけることに成功した.「クラインの本」

最後に，II の部分が必要であるとの重大な指摘をいただいた高等科の上野正樹氏と，発表の機会をあたえてくださった高等科紀要に深く感謝いたします.

参考文献

[木村俊一] 天才数学者はこう解いた，こう生きた（講談社）
[F.クライン] 正20面体と5次方程式（シュプリンガー）
[藤原松三郎] 代数学 第二巻（内田老鶴圃）
[服部 昭] 初等ガロア理論（宝文館出版）
[大島 勝] 群論（共立）
[笠原乾吉] 5次方程式の解法（数学セミナー 1988，7，8月号）
学習院高等科紀要第4号