数学史講義（第5回）：
17世紀における記号代数と方程式論

林　知宏

「だが代数なら，本を読んでも簡単にわかるじゃないか」
「その方がもっと楽でしょう．だって私は授業に出ていても，たいして分かりゃしないんですから」
「じゃ，どうしてなんだ？　だいいち，代数なんてきみになんの役にも立たんじゃないか」
「好きなんですよ，こいつが．気のふさぎを紛らせてくれるんでね」.[1]

1　はじめに

われわれの数学史講義は第5回目を迎えた．第2回講義では古代ギリシアにおいてユークリッド（エウクレイデス）の著作『原論』に示された数学的証明の体系化を見た．また前回（第4回）は，アルキメデスの求積法を論じた．アルキメデスの数学は古代ギリシアが生み出した数学の最高峰である．アルキメデスが，様々な制約のもとで残した成果はまさに驚異的であった．論証の中に含まれるアイデアの豊富さ，巧妙さは数学史上他に類を見ない．その一方で，われわれはアルキメデスの限界を指摘した.[2] それは記号法の問題である．アルキメデスは，適切な記号法を表現手段として持ち合わせなかった．アルキメデスのみならず，ユークリッド，アポロニオス，紀元前3世紀までの古代ギリシアの時代に残された数学的文献では，記号が本質的に内容にかかわることがない．目に見える図形やその図形的直観に根差した存在論を背景とした幾何学，あるいは数と量の理論が展開されていた．これは現代の記号であふれかえる数学と比較すると，特異さが鮮明である．

アルキメデスから1800年ほどの歳月が流れる．中世ヨーロッパで支配的であったスコラ哲学の影響から脱却しようとする思潮の中で数学上の記号法が確立する．特に代数と呼ばれる領域と結合して，方程式論の形成に至る．それに最大の貢献を果たした人物は，ルネ・デカルト（René Descartes, 1596–1650）である．彼は「われ思う．ゆえにわれあり」というよく知られた形而上学上の根本原理の表明を行った．それを基盤に据えて近世哲学の出発点を形成したことで著名である．われわれにとっては，彼が1637年に刊行した著作が注目に値する．その著作は序論と三つの試論から成るが，試論の一つ，「幾何学」で数学上の革新をもたらしたことが特筆される．デカルトが数学に取り組むとき，単に未解決だった問題を解決することだけが射程にあるのではない．独特な学問的方法論とセットになっており，数学が一つの具体例を与えることが重要である．その1637年の著作中，

[1][Proust 1988], p.464，邦訳[プルースト 2006]，488f頁．
[2][林 2010]，26–31頁．

特に序論部は「方法序説」と呼ばれ，独立して読まれることも多い．そこで展開される議論は人間思考の有様を根本的に捉え直すのに十分なインパクトがあった．われわれも「方法序説」に示されている（例えば第2部に見られる）数学の位置づけを確認しながら，試論「幾何学」で展開される内容との結びつきを論じたい．

デカルトの「幾何学」は様々な点で現代の数学に通じる要素を含んでいる．デカルトは，古代から研究されていた図形の学問に方程式の発想を組み入れた．その発想が引金となって数学における問題の立て方自体が変わったと言ってもよい．数学史家マイケル・マホーニィは，しばしば「代数的思考様式」と称して17世紀以降に数学者の内面に浸透していった動きを重要視する.[3] われわれは最後のまとめのところで，この17世紀の生じた変化の中身を検討する．この論考は，同時にデカルトの母国語フランス語で書かれていた点でも画期的だった（当時，学問的著作はラテン語で書かれるのが一般的）．後に（1650年代から60年代）スホーテンによりラテン語訳され，より多くの読者を獲得した.[4] 17世紀半ば以降，最も大きな影響力を誇った数学的著作と考えて間違いない．ニュートンもライプニッツもこのラテン語訳を学ぶことを通じて本格的な数学研究をスタートさせた．彼らは「幾何学」の手法を吸収したうえで，同時に限界がどこにあるのかを見極めた．そして微分積分学と今日呼ばれる手法の基礎を作り出したのである．今回の数学史講義は，数学が大きな進展をとげる素地となったデカルトの数学の分析を中心に据える．ただそのデカルトに至る道も確認したい．まずわれわれは「代数」の定義づけと歴史的背景を必要最小限の範囲で確認しよう．

2　代数とは

今回のテーマである代数は，数学上の技法であり，研究上の領域を表わす語でもある．われわれが論じる上では，次のボスによる定義をとりあえず採用する.[5]

> 代数とは，未知量かつ（あるいは）未決定な量に関係し，記号的操作が行われ，方程式にかかわり，そして数，あるいは幾何学的大きさ，またはより抽象的，一般的な意味での大きさ，いずれかを取り扱う，そうした数学的な理論と実践のことを言う．

この定義に基づく代数は，何も17世紀のヨーロッパで研究が開始されたのではない．も

---

[3][マホーニィ 2007]に所収された論文「17世紀における代数的思考法の始原」（同書第4章）は，本稿が参照する重要な論考の一つである．

[4][Descartes 1659-61]は，東京大学駒場キャンパス内の教養学部図書館で中村幸四郎文庫の所蔵本として閲覧することができる．同書は，デカルトの「幾何学」を単にラテン語訳しただけでなく，デカルトに触発された他の数学研究者の論考もあわせて所収している．

[5][Bos 2001], p.129.

ともと「代数」と訳される語，algebra はアラビア語 al-jabr に由来する．実は，中世（16 世紀以前）のヨーロッパ社会は，数学を積極的に発展させる契機を失っていた．同じ頃，イスラム世界では数学研究が盛んであった．古代ギリシアの遺産はアラビア語の文化圏で継承されていたのである．そこで生まれた手法が代数であり，当初から方程式と結びついていた．アル＝フワーリズミー（al-Khwārizmī：830 頃活躍），アル＝ハイヤーミー（al-khayyāmī：1048–1131），アッ＝サマウアル（al-Samaw'al：1174 没），シャラフ・アッ＝ディーン・アッ＝トゥースィー（al-Ṭūsī：1150–1215 頃）といった人々が残した文献からは想像する以上に充実した研究成果を読み取ることができる．20 世紀の後半の数学史研究がこの領域に多大な成果を残したことは記憶にとどめたい．例えば，アル＝フワーリズミーは『インド人たちの計算の書』という書を著わした．その後，12 世紀になりラテン語訳され，ヨーロッパ世界に伝えられた．計算法を述べるこの書は，「アル＝フワーリズミーは語った」（Dixit Algorizmi）で始まる．そこから，アル＝フワーリズミーという名前がラテン語化され，「アルゴリズム」（Algorithm）の語源となった．13 世紀になると，サクロボスコという名の人物の『一般アルゴリズム』（*Algorismus vulgaris*）という著述も現れる．

「代数」（algebra）の語源となった al-jabr は，アル＝フワーリズミーの「方程式」論を述べた著作『ジャブルとムカーバラの書』に示される．そのアル＝フワーリズミーの方程式論では，未知量 x に相当する語は，al-shay（「もの」の意），al-jidhr または al-jadhr（「根」の意）と称される．そして x^2 は，al-māl（「財産」の意）という．例えば，次のように方程式は表現される．

「58 ディルハムに等しい，100 とマール 2 個ひくシャイ 20 個」
（現代的記法で $58=100+2x^2-20x$）　(1)

このとき，ジャブル，すなわち al-jabr は，「欠けているものを補って欠陥のないものにする」こと，（現代の用語で）負の係数を持った項を移項して，正の係数にすることを意味する．またムカーバラ，すなわち al-muqābala は，「向かい合う同種のものを簡単にする」こと，すなわち同類項整理を意味する．アル＝フワーリズミーは，2 次方程式に対して，六つの「標準形」と具体的解法を示している．[6]

他に挙げた人物の貢献については，アル＝ハイヤーミーは 3 次方程式の分類，解法を示した．アッ＝サマウアルは，方程式において負係数，負指数の導入をした．さらに「数学的帰納法」に相当するような証明を試み，無理根の近似計算も行っている．さらにヨーロッパでは 17 世紀になって概念的な変化が生じる，解析と代数の同一視も彼の著作には見られる．アッ＝トゥースィーは，方程式の解の数値近似，3 次方程式の解法にも取り組んだ．9 世紀から 13，14 世紀頃のアラビア語で記された数学文献は，17，18 世紀のヨーロッパ

[6] [伊東他 1987]，143ff, 322–331 頁．

で行われる研究を先取りする内容が含まれている．それが明らかになったのが，20 世紀末の数学史研究の大きな成果であった．[7]

ただ歴史の流れは，単純に空間と時間とを越えて連結しない．アル＝フワーリズミーらによるイスラム世界の数学研究からデカルトへは直接はつながらない（それを示す文献的証拠がない)．12 世紀頃から，アラビア語訳されていたギリシアの文献は，数学文献だけでなくアリストテレス等の哲学文献も含めてヨーロッパ世界にラテン語訳され再び戻ってくる．その流れの中で代数の内容を含んだ文献も部分的には伝わった．だが受け取ったヨーロッパ側では大きな革新的な動きにはつながらなかったようである．むしろユークリッドやアルキメデスといったギリシアの古典的文献の再認識の方に目がいった感がある．また古典を受容したうえで，それ以上に新たな問題設定をする担い手が不足していたように見える．したがって先端の数学研究の場で代数が活用される，それ以前に数学研究が学問の世界で人々を引き付けるようになるまではかなり長い時間を経過することになる．ようやく 16 世紀になってヨーロッパは代数を本格的に発展させる．その担い手の一人がフランソワ・ヴィエト（François Viète, 1540−1603）である．われわれはデカルトへゆく前に，過渡的な状況としてヴィエトの数学を見ておきたい．その数学は方法論的な革新性を十分に備えている．ただデカルトにあって，ヴィエトにないものがある．その点をおさえる必要もある．では，ヴィエトの代数を見ることにしよう．

3　近世ヨーロッパにおける記号代数と方程式論

3.1　フランソワ・ヴィエトの記号代数と方程式論

3.1.1　ヴィエトの記号代数

ヴィエトは，フランスのポワティエ大学で法律を学び，法律家として当時の王家に招聘された人物である．一方で，数学研究も行い，いくつかの著作・論文を残した．なかでも 1591 年に刊行された『解析法序説』（*In artem analyticem Isagoge*）は，方法論的な主張を明確にしていることで記憶にとどめるべき文献である．例えば，その著作の冒頭には次の言葉が記されている．

> 数学においては真理を探究するための確実な方法があり，プラトンが最初に発見したと伝えられる．テオンはそれを解析と呼び，求めることをあたかも認められたかのようにして，すでに真であると認められた事柄へと探ることと定義づけている．反対に総合は，認められたことから求める事柄へと結論づけ，理解することへと進んでいくこととしている．
>
> 古代人たちは，2 種類の解析のみを提示した．すなわち，ゼーテーティケー

[7]代表的な文献として[ラーシェド 2004]を参照のこと．

> (ζητητική) とポリスティケー (ποριστική) である．テオンの定義づけが特に言及するその２種に，私はレーテーティケー (ῥητητική)，あるいはエグゼゲーティケー (ἐξηγητική) と呼ぶ第３のものを加える．ゼーテーティケーの技法は，求める量と与えられた量との間に成り立つ方程式，または比例関係を設定することである．ポリスティケーの技法は，得られた定理が正しいことを方程式や比例関係を通じて確かめることである．エグゼゲーティケーの技法は，与えられた方程式，あるいは比例関係に含まれる未知量の値を定めることである．よってこれら３種類の解析的技法全体は，それ自体数学における正しい発見の学 (Doctrina bene inveniendi in Mathematicis) と定義されることになろう．[8]

解析という概念は，引用にあるように古代ギリシアにさかのぼる．古代人たちが行ってきたアナリシス (ἀνάλυσις) について，[林 2008]でその一端を紹介した．ユークリッド『原論』の論証中の大半には表だって出てこないが，一部の問題で現れるその問題が解けたと仮定し，そこから解法を探究する議論である．証明の論理展開に必要な条件や作図を事前に明らかにするために必須の作業であり，結論を前提に必要な条件に議論を遡及させることもあった．目の前に図形があり，その図形に即しながら必要な考察を加える，それが古典的な解析である．ユークリッド自身，『原論』とは別に『デドメナ』(Δεδομένα) という解析技法を記した書物も著わしていた．[9] その後，紀元後４世紀にアレキサンドリアで活躍したとされる数学研究者，パッポスの『数学集成』という書物の中により一般的に理論化された解析について説明や具体的な技法の議論を確認できる．パッポスが解析をゼーテーティケー（「理論的解析」と称する）とポリスティケー（「問題的解析」と称する）の２通りに分類したのだった．[10] ヴィエトの時代の16世紀には，ギリシア語で記された伝えられた原典（ユークリッドやパッポス）がラテン語に翻訳され，普及していた．そこにヴィエトは方程式論を背景に独自の解釈を加えていることが先の引用からもわかるだろう．

ヴィエトが第３の解析としてエグゼゲーティケーの技法を強調することが彼の独自性である．まず，ある問題を解決するために未知量と既知量との間に成立する方程式を立てる．さらに，その方程式を解いた解の適切さを確認する．それらの工程を必らず通過する．ただその間，方程式を解くためのテクニック，技法を独立して考えることも伴うことになる．

---

[8]下線は引用者による．[Viète 2001], p.1，英訳[Viète 2006], p.11f,［Klein 1968], p.320f.

[9]『デドメナ』とは，「与えられたものもの」という意味である．ラテン語によって『ダタ』(*Data*) とも称され，後世に伝えられた．そのユークリッドの解析の技法に関しては，[ユークリッド 2010]中の斎藤憲による『デドメナ』解説参照．

[10]パッポスの技法についての分析は，前注９で言及した[ユークリッド 2010]において，『数学集成』中の解析に関連する箇所が訳出されている．特にその第Ⅶ巻の一般的言明や第Ⅳ巻の具体例，さらにはアルキメデス『球と円柱について』第２巻における具体例を見ることができる．[ユークリッド 2010], 455–471 頁．また[マホーニィ 2007]に所収の論考「ギリシャの幾何学的解析のもうひとつの見方」も，パッポスの理論的解析 (theoretical analysis) と問題的解析 (problematic analysis) との違いについて分析を試みている．

ヴィエトがその技法を強調する理由はそこにある．

ヴィエトは，方程式による問題解決を可能にするために独自の記号も工夫した．そもそも数学に用いる記号としてアルファベットを使用することを提唱したのは彼である．方程式(1)のように，中世アラビア世界では方程式に相当するものを立てる際，「もの」とか，「財産」といった語が用いられていたことに注意しよう．現代のわれわれにとって，数学記号としてアルファベットを利用することはごく当たり前のことになっているが，これは16世紀終わりになって行われ始めたということを明記したい．ヴィエトの記号法は具体的に次のようなものである．[11] 方程式において，

未知量 → アルファベットの母音（A, E, I, O, U, Y）を用いる，
既知量 → アルファベットの子音（$B, G, D, \ldots$）を用いる，

という約束にする．そしてヴィエト以前に定着していた記法も取り入れ，

未知量の 2 乗，3 乗（x^2, x^3）→ *A quadratum, A cubus,*
既知量の 2 乗，3 乗（b^2, b^3）→ *B planus, B solidus,*

と表す（図 1 参照）．さらに積（bx）は，*A in B* のように前置詞を組み合わせて表現する．こうした流儀により，ある 3 次方程式は，

A cubus＋*B plano* 3 *in A*, *aequari Z solido* 2（現代的記法で $x^3+3b^2x=2c^3$）　(2)

と記号と言葉を混ぜて書き表わされる．ヴィエトの記法は一定の新しさを備えているが，累乗表現は，図形的なイメージも伴っている（例えば，3 乗に対して「立体」を指す語が記号として用いられる）．直観に訴えるやり方である．だが，当然 3 次元超える累乗に対して適切に表すことができない．したがって，例えば未知量の 4 乗（x^4）は，*A quadrato-quadratum* のように「2 乗したものに 2 乗」すると書くしかなくなってしまい，煩雑さは否めない．ただ旧来のものに比べて一般的な推論を可能にする記法ではあった．ヴィエトは自己の方法に確信を持っている．『解析法序説』の末尾では，

> 結局，ゼーテーティケー，ポリスティケー，エグゼゲーティケーという三つの形を要は持つことになった解析的技法は，諸問題の中でも尊い問題を自らに正当に付与する．つまり，あらゆる問題を解くこと（Nullum non ploblema solvere）である．[12]

と高らかに述べる．この書が，ときに「近世数学のマニフェスト」などと呼ばれる所以である．

---

[11] [Viète 2001], pp.8f, 英訳[Viète 2006], pp.23ff, [Klein 1968], pp.339f.
[12] *Ibid.*, p.12, 英訳[Viéte 2006], p.32, [Klein 1968], p.352.

2 Magnitudines quæ ex genere ad genus ſua vi proportionaliter adſcendunt vel deſcendunt, vocentur Scalares.

3 Magnitudinum Scalarium prima eſt

Latus, ſeu Radix.
2 Quadratum.
3 Cubus.
4 Quadrato-quadratum.
5 Quadrato-cubus.
6 Cubo-cubus.
7 Quadrato-quadrato-cubus.
8 Quadrato-cubo-cubus.
9 Cubo-cubo-cubus.

Et eâ deinceps ſerie & methodo denominanda reliqua.

7 Genera magnitudinum comparatarum, uti de ſcalaribus enunciantur ordine, ſunt:

1 Longitudo latitudóve.
2 Planum.
3 Solidum.
4 Plano-planum.
5 Plano-ſolidum.
6 Solido-ſolidum.
7 Plano-plano-ſolidum.
8 Plano-ſolido-ſolidum.
9 Solido-ſolido-ſolidum,

& eâ deinceps ſerie & methodo denominanda reliqua.

8 Ex ſerie ſcalarium gradus altior, in quo conſiſtit comparata magnitudo exinde a latere, vocatur poteſtas. Reliquæ inferiores ſcalares ſunt gradus parodici ad poteſtatem.

9 Pura eſt poteſtas, cùm adfectione vacat. Adfecta, cui homogeneum ſub parodico ad poteſtatem gradu & adſcitâ coëfficiente magnitudine immiſcetur.

Pura poteſtas eſt, Quadratum, Cubus, Quadrato-quadratum, Quadrato-cubus, Cubo-cubus,&c. Poteſtas verò adfecta eſt,

In gradu ſecundo.

1. *Quadratum, unà cum Plano ex latere in longitudinem, latitudinemve.*

In gradu tertio.

1. *Cubus, cum Solido ex Quadrato in longitudinem, Latitudinemve.*
2. *Cubus, cum Solido ex latere in Planum.*
3. *Cubus, cum duplici Solido. Vno ex Quadrato in longitudinem, latitudinemve. Altera ex latere in Planum.*

図1　ヴィエト『解析法序説』より

3.1.2 ヴィエトの方程式解法

ヴィエトにとって先の引用（注 8）で見たように，方程式を解く作業（エグゼゲーティケー）が重要となる．具体的なヴィエトの方程式解法の例として，『解析法序説』と同じ 1591 年に刊行された「方程式の考察と改良に関する 2 論文」(De aequationum recognitione et emendatione, tractatus duo）中の 3 次方程式解法を見ることにしよう．二つの論文のうち第 2 論文の第 7 章で，「立方方程式は，立方根を用いてどのように平方方程式に下げられるか」という表題の下，3 次方程式(2)が考えられている．先に述べたようにヴィエトの記法は，われわれにとって少し煩雑に見える．そこで議論の流れを了解しやすくするために表 1 のあるように，ヴィエトのテキストにより忠実に表した流れと現代的記号法による表記とを対比させる．問題解法にあたって必要なアイデアは，(ii)の補助方程式の導入である．これを通じて，3 次方程式が(v)の段階のように 2 次方程式に帰着するのである．

さらに加えて，ヴィエトは同じ方程式(2)において，(vi）で c^3 の前の符号－と＋を入れ替えることで，$\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}+c^3=g^3$ とする．このとき議論を(v)から(vii)へと進めて，

$$\frac{g^2-b^2}{g}=x$$

となる．先に得た（vi）とあわせて，b を消去する．その結果「一方で，より小さいのが d で，より大きいのが g で，その差が求める A である」となる．つまり，方程式(2)の解は，

$$x=g-d=\sqrt[3]{\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}+c^3}-\sqrt[3]{\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}-c^3}$$

と結論づけている．[13]

以上の例に見ることができる発想をもとに，17 世紀には「解析＝方程式による解法」という図式が定着していく．つまり，すべてが方程式を介する（方程式を立て，方程式を解き，得られた解の適切さを確かめる）方法論として確立するのである．古代ギリシアの数学の遺産が非常に豊かであることを思うと，ヴィエトが『解析法序説』末尾で述べていた宣言は極論とも言えるかもしれない．だがヴィエトは方程式を介在させる自らの技法を「数学における正しい発見の学」と称していた．確かにアルキメデスの求積法に見たような，図形に対する鋭い洞察を含んだある種の名人芸的な発想の展開とは異なる．アルキメデスの『球と円柱について』第 1 巻の体積計算などは，3 次元の立体の計算を 1 次元の線分の長さを求めることに帰着させるものだった．[14] ヴィエトは問題を方程式を解く作業に帰着させる．そして個別に方程式を解くためのテクニックを開発する．この点において新たなアイデアが必要とされることは確かである．実際，表 1 の(ii)から(v)の段階のように方程式を解いてその根を求めるために，高次の方程式をより低次のものに帰着させると

[13] [Viéte 2001], p.149f, 英訳[Viéte 2006], p.286ff, [中村 1980], 38f 頁.
[14] [林 2010], 17-24 頁.

表1　ヴィエトの方程式解法

	ヴィエトの表記法による解法の流れ	現代的記法による表示
(i)	*A cubus*+*B plano* 3 *in A*, *aequari Z solido* 2 が与えられるとせよ	$x^3+3bx=2c^3$
(ii)	*E quad.*+*A in E* が，*B plano* に等しいとせよ	$y^2+xy=b^2$
(iii)	したがって，$\dfrac{B\ planum-E\ quad.}{E}$ は，*A* である	$\dfrac{b^2-y^2}{y}=x$
(iv)	それゆえ，$\dfrac{B\ plano\ plano\ planum}{E\ cubo}-\dfrac{E\ quad.\ in\ B\ plano\ planum\ 3}{E\ cubo}+\dfrac{E\ quad.\ quad.\ in\ B\ planum\ 3-E\ cubo\ cubo}{E\ cubo}+\dfrac{B\ plano\ planum\ 3-B\ planum\ in\ E\ quad.\ 3}{E}$ は，*Z solido* 2 に等しくなるだろう	$\dfrac{b^6-3b^4y^2+3b^2y^4-y^6}{y^3}+\dfrac{3b^4-3b^2y^2}{y}=2c^3$
(v)	あらゆる項に *E cubum* をかけて，同類項整理（concinnatum）によって *E cubi quad.*+*Z solido* 2 *in E cubum* は，*B plani cubo* に等しくなるだろう	$(y^3)^2+2c^3y^3=(b^2)^3$
(vi)	$\sqrt{B\ plano\ plano\ plani+Z\ solido\ solido}-Z\ solido$ を *D cubo* に等しいとせよ	$\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}-c^3=d^3$
(vii)	$\dfrac{B\ planum-D\ quad.}{D}$ は，求める *A* となる	$\dfrac{b^2-d^2}{d}=x$

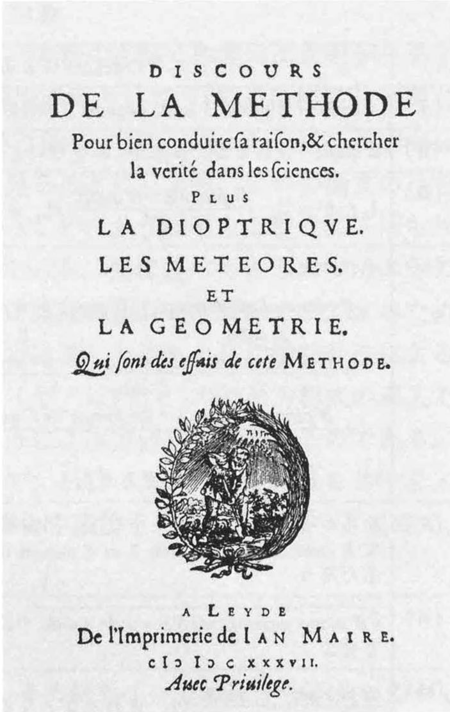
いう，数学上の新たな工夫をしなければならない．だが，こちらの方が取り組みやすさを持っていると，少なくともヴィエトは感じていただろう．またヴィエトの著作の読者も同様に感じたことが，広く普及する原因になったのであろう．ただ，表1の左右を比較すれば，方法の巧妙さに対して記号法の洗練度が落ちることは一目瞭然である．表1の右側の表記法は，現代のものであるが，これはデカルトに始まるものである．デカルトの記号法が定着した今となっては，他に代え難いという印象を持ってしまう．だがヴィエトが数学に一つの変化をもたらしたことは確かである．結果として過渡的な段階と見えても，技法の面ではかなりの成果をもたらしていたと考えられるだろう．

3.2　ルネ・デカルトの記号代数と方程式論

3.2.1　デカルト1637年の著作「方法序説」

ルネ・デカルトは哲学史上もっとも有名な人物の一人である．彼が1637年に刊行した著作は，近代的な思想の原点として言及されることが多い．まさに現代にまで通じる学問の基本姿勢を表したものとして影響力を誇ってきた．この著作の原題は，『理性を正しく導き，諸科学の中で真理の探究をするための方法論．加えてその方法の試論である屈折光学，気象学，幾何学』（*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores, et La Géométrie, qui sont des essais* *de cette méthode*）である．[15]

デカルトの言説は，実に多くの研究者たちによって分析の対象とされてきた．そのすべてをここで要約することは不可能である．[16] われわれは，次項でデカルトの記号代数と方程式論について「幾何学」中の記述を分析する．その関連において，序論部に提唱されている議論に耳を傾けることにする．この著作のタイトルが示すように，「幾何学」は他の試論同様，デカルト目指す学問的方法論の一実践例である．「幾何学」理解のためにも「方法序説」に記された数学への言及は見逃せない．その点に限定にして「方法序説」を見ていきたい．実際，多くの哲学研究者たちの視線は，必ずしもわれわれのものとは重ならない．数学史の立場からのデカルト分析であることをあらかじめお断りする．


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

図2　デカルト1637年の著作の表紙

「方法序説」は，第1部から第6部に分かれている．前半の第1部から第3部まではデカルトの学習や思索の軌跡が描かれ，彼が独自の方法論に達するプロセスが示されている．第2部で表明されるその方法は第一から第四までに標語化される．すなわち，第一は「明晰かつ判明に現れるもの以外を判断に取り入れないこと」，第二は「問題を必要なだけ小部分に分割すること」，第三は「単純なのものから複雑なものへと順序にしたがって導くこと」，そして最後は「完全な枚挙と全般的な見直しをすること」である．ごく当たり前のことが述べられているように感じるだろうか．もしそうであるとするならば，すでにデカルトの思想圏内にいる証拠である．なぜならこうした方法論を鮮明にすることは，デカルト以前に行われていなかったからである．まさに「近代的思考の祖」と称される理由がここにある．第3部は，第一格率から第四格率の形でデカルトが自分自身に課した道徳律の表明が行われる．そして1620年から28年ころまで「世間を渡り歩く以外のことは何もせず，そこで演じられる芝居の役者よりも観客になろうとした」9年間を過ごしたこと，そして「方法序説」執筆からさかのぼる8年前にオランダへ移り住んだことが述べられる．[17] 後半は第4部で有名な第一原理「私は考える，ゆ

[15]図2は，［Descartes 1996］，Ⅵ，p.XIIIから取った．タイトルのフランス語の表記は現代風に改めた．

[16]膨大な2次文献があるが，本稿執筆のために参照した［Rodis-Lewis 1971］，［Vuillemin 1987］，［Gaukroger 1995］，［Beyssade 2001］，［小林 1995］，［小林 2006］，［谷川 1995］を挙げるにとどめる．

[17]［Descartes 1996］，Ⅵ，pp.18f, 28–31，邦訳［デカルト 2010］，37f, 51ff 頁．デカルトの文献に関して邦訳からの引用を行う場合には，訳文を引用者の判断で変更することがある．

えに私は存在する」（Je pence, donc je suis）の表明が行われる.[18] 第5部では血液循環説という同時代の自然学への関心が述べられ，さらに第6部では自著『世界論』の刊行が中止に至った経緯が述べられる．方法論の獲得と結びつけられて数学が言及されるのは主として前半までである．したがって必要な範囲で，数学が彼の学問的方法論に対して果たしている役割を押さよう．

デカルトは第1部で若き日に学んだ諸学問のうち，数学に関して「極めて巧妙な創意工夫があり，好事家を満足させるにも，あらゆる技術を容易にして人間の労力を軽減するにも役立つ」という印象を語っている.[19] ここで「あらゆる技術」（tous les arts）は，「思考の技法」をも含んでいると理解可能だろう．そしてさらに，

> 私はとりわけ数学が，その推論の確実さと明証さとのゆえに気に入っていた．しかし，数学の本当の使いみちにはまだ気づいていなかった．そして数学が機械技術にしか役立っていないことを考えて，その基礎がたいへんしっかりしていて堅いにもかかわらず，その上にもっと高いものが何も建てられなかったことに驚いた．

と述べている.[20] デカルトにとって，数学は彼の学問論における重要な価値基準である確実性，明証性をすでに備えている．その点で高く評価する．だが数学が備えている学問上のポテンシャルは十分に具体化していないとデカルトは考える．さらに新たに作り上げる余地があるはずとみなしているのである．数学を評価するがゆえ，なお改良の可能性を示唆する言明は，第2部でより鮮明になる．

> まだ若かったころ，私は哲学の部門のうちでは論理学を，数学のうちでは幾何学者の解析と代数とを少しばかり勉強した．これらの三つの技術あるいは学問は，私の計画に何か貢献するにちがいないと思われたからである．〔中略〕古代人の解析と現代人の代数については，それらはきわめて抽象的で何の役にも立たないと思われる主題にのみ適用されている．だが，それればかりでなく，解析はいつも図形の考察に縛られているので，想像力をひどく疲れさせることなしに知性をはたらかせることができない．代数においては，人はある規則や記号にとらわれているので，それは精神を開発する学問ではなく，精神を混乱させる曖昧な術になってしまっている．以上のことが原因となって私は，この三者の長所を備え，かつ短所を免れた何かほかの方法を探究しなければならない，と考えた.[21]

---

[18] *Ibid.*, p.32，邦訳，56頁．
[19] *Ibid.*, p.6，邦訳，23頁．
[20] 下線部は引用者による．*Ibid.*, p.7，邦訳，25頁．
[21] *Ibid.*, pp.17f，邦訳，36f頁．

この引用中に現れる「古代人の解析」，「現代人の代数」に関する批評は数学史の観点において，非常に興味深い．前項 3.1.1 で見たように，ヴィエトの著作の中にすでに解析概念の改変が含まれていた．デカルトもヴィエト同様，再興された古典を読解し，あわせて 17 世紀に進んだ記号代数と方程式論を学んだ．そこで得た知識をもとに引用の通りに語っているのである．デカルトの指摘の中では，古典的な解析の手法を「図形の考察に縛られている」点が問題ありとしていることが重要である．したがって古代から豊富に蓄積されたノウ・ハウとは異なる方向性，すなわち個々の図形に特化したアイデアよりもより一般性を備えた技法への転換を目指そうと表明しているように理解できるわけである．

一方，デカルトは第 1 部で「ヨーロッパで最も有名な学校の一つ」で学んだと述べていた．[22] 彼が学んだ代数は，イエズス会士であり，数学研究者だったクラヴィウスの『代数学』（*Algebra*）に記された内容であったと推定されている．[23] その代数学は，一定のレベルの記号法とそれをもとに展開される方程式論である．ここで指摘される「現代人の代数」が指す内容が何であるか，ヴィエトの数学はその一つに含まれると考えたいが正確に特定することには一定の留保が必要である．前項で見たヴィエトの数学は，デカルト以前では最高峰のものであった．ただデカルトがヴィエトをどのように吸収したかデカルト自身の言及がないためによくわからない．したがってデカルトの指摘が何を想定しているか明確ではない．しかしそのデカルトとヴィエトとの関係が不明であったとしても，仮にヴィエトの代数，あるいは方程式論に対して「規則やある記号にとらわれている」ので，「精神を混乱させる複雑で曖昧な術になってしまっている」という批判するならば，それは当てはまる．特に図形の次元から離れることができないために煩雑になってしまっていることは確かである．ヴィエトに代表される先行研究が一般的に陥っていた傾向と考えてよいだろう．

「方法序説」第 2 部の数学に関わるコメントはさらに続く．当時，数学の名のもとに考えられていた個別の分野，すなわち算術，幾何，天文，音楽，光学，機械学などを通じてある共通の要素があることが指摘されていた．それに関連する「方法序説」第 2 部のコメントは以下のとおりである．

> これまで諸学問において真理を探究してきたすべての人たちのうちで，何らかの証明つまり何らかの確実で明証的な論拠を見いだし得たのは，ただ数学者だけだったことを考えて，彼らが吟味したのと同じものから始めることを私は決して疑わなかった．〔中略〕しかし，だからといって，私は一般に数学と呼ばれている個々の諸学問のすべてを学ぼうとしたわけではなかった．そして，それらの学問の対象は異なっていて

---

[22] *Ibid.*, p.5，邦訳，22 頁．デカルトの学んだ学校は，1604 年国王アンリ 4 世によって創設され，イエズス会によって運営されたラ・フレーシュ学院であると推定されている．[小林 2006], 19ff 頁．

[23] デカルトが学生としてどのような数学的文献に親しんでいたのか．またどういった思考過程を経て，注 20，注 21 で示した引用のような見解を抱くに至ったか．それらは興味深い問題である．だがここでは深入りしない．[佐々木 2003]第 1 部第 1 章，第 2 章を参照のこと．

も，対象間に見いだされる様々な関係つまり比例のみを考察するという点で，それらの学問はみな一致していることを見て，こう考えた．ただこの比例のみを一般的に吟味した方がよいこと．その際，そうした比例の認識を最も容易にしてくれるのに役立つ対象においてのみ，その比例を想定すること．〔中略〕さらに，この比例を認識するために，あるときはそれをここに考察する必要があり，またあるときはそれを記憶にとどめ，それらの多くを一度に理解しておく必要があることに気づいて，私はこうも考えた．比例を個別的によりよく考察するためには，それらを線において想定するべきであること．なぜなら，線以上に単純で，私の記憶や感覚に対して判明に表象されるものはないからである．だが，それらの比例を記憶にとどめ，多くを一度に理解するためには，それらをできるだけ短い記号で説明する必要があること．そして，こういう仕方で，幾何学的解析と代数とのあらゆる長所を借り，一方の短所をすべて他方によって正すだろう，と私は考えた．[24]

以上の引用中，

ア）比例の考察，イ）比例の考察のために線分を利用，
ウ）比例を表現するための簡潔な記号の利用，

がデカルトの数学の基本として想定されていることがわかるだろう．この数学の個別領域における共通要素の抽出と，それをもとに数学全体を構成し直すというアイデアは普遍数学（mathesis universalis）概念と呼ばれ，17 世紀前半に数学研究者たちに共有されていた．デカルトは 1620 年代終わりに記された論考「精神指導の規則」の中で，すでにこのことについて語っている．[25] 彼が 1637 年の「方法序説」と「幾何学」に先立つ 7，8 年前には

[24] 下線は引用者による．[Descartes 1996], Ⅵ, pp.19f, 邦訳[デカルト 2010], 39f 頁．

[25]「精神指導の規則」は未完の論考で，デカルトの死後 1701 年になって初めて原文が刊行された．全体で 21 の規則が掲げられているが，19 番目から 21 番目までは単に標語のみで説明は与えられていない．その第 4 規則は「事物の真理を探究するには方法が必要である」と述べられている．そこでデカルトは，われわれが分析している「方法序説」中の数学に関する内容分析をより綿密に展開している．デカルトは，1）あらゆる人が数学という名によって一体何を正確に理解しているのか，2）算術，幾何等々の諸分野がなぜ数学の部分であると言われているのか．この 2 点を探究したと表明している．そして次のように述べている（[Descartes 1996], X, pp. 377f, 邦訳[デカルト 1974]，30 頁．ただし〔　〕内は引用者の補足）．

ほとんど誰でも，少しでも学問をしたことがある人ならば，どれが数学に属し，何が他の学問に属するかをかろうじて区別するのである．そしてこの点をさらに注意深く考察することで，人はついに次のことに気づくであろう．すなわち，順序（ordo）あるいは計量（mensura）が吟味されるようなすべての事柄それのみが数学に関係する．そしてそうした計量が，数において，あるいは図形において，あるいは星や音において，また他のどの対象において求められるかは問題ではないということである．したがって特別な質料に帰されることのない順序と計量について求め得るあらゆることを説明するある一般的な学問がなければならない．そしてそれは外来の名前〔代数〕をもってではなく，それどころかすでに根づいている慣行として受け入れられている名によって，普遍数学と呼ばれるべきである．というのもその他の学が数学の部分と呼ばれることに関して，すべてがその普遍数学に含まれているからである．

この普遍数学の発想から数学を眺めていたことが文献上確認される.[26]

「幾何学」という論考では，比例関係を表現するために，一元的に線分表示が行われる．その姿勢は徹底している．また量を表現する記号はより洗練された簡潔なものに整備されるだろう．その上で，解析的方法として図形の問題を方程式によって解決することが図られる．ただし古典的解析のように個別の図形を前に解決法を探るのではなく，また当時の代数学のように洗練度の低い記号によって方程式を立てるのでもない．まず（1次元の）線分によって図形の中に現れる量を表示し，次元の制約を撤廃する．その上で適切な記号表現を与えて方程式による表示を行う．そして方程式を解くことで，問題を解決するという内容になるだろう．その結果，手法がシステマティックに整えられ，個別の直線や曲線への対処というよりも一般性を備えた技法へと昇華する可能性を得る．この 1637 年の著作に付された試論の一つが「幾何学」というタイトルでありながら，ユークリッド『原論』（特にその第 1 巻から第 6 巻まで）に代表される内容と，一見して趣きを異にしていることはこうした記述と対応しているのである．われわれは「幾何学」という論考の背景となる発想を確認したので，いよいよ「幾何学」そのものの分析に移ろう．

3.2.2 「幾何学」第 1 巻：デカルトの記号法と方程式の解の線分表示

本項では，デカルトが「方法序説」で述べていたことが，数学上どのような果実を得たのか．その実相を明らかにすることを意識しつつ，「幾何学」の内容を，第 1 巻，第 3 巻の方程式論を中心に見ることにする．

「幾何学」第 1 巻の冒頭で，デカルト流の記号法が説明される．現代に至るまで利用される基本的な表記（例えば，a^3 のように文字の右肩に数字を書いて累乗を表すこと）が提示される．現在，われわれがごく自然に利用している表現法の起源がここにある．次にある量が線分の長さとして与えられたときに，四則演算（+，−，×，÷）の結果ならびに平方根の量を，すべて定規，コンパスを用いて作図された線分によって示す．いま図 3 で $AB=1$ とその延長上に AD を与える．また別の線分 BC を与える．いま AC と DE が平行になるように作図すると（E は BC の延長上の点），積 $BD \times BC$ は線分 BE の長さとして表示される（$1 : BD = BC : BE$ より）．

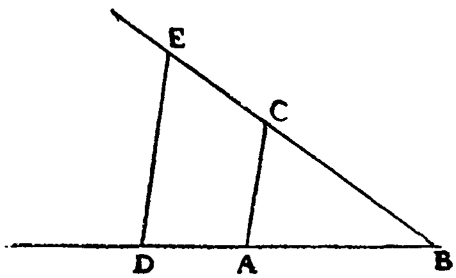


図 3　二つの量の積を線分表示

この普遍数学という発想が，デカルトの創意ではないことは引用からもわかる．実際，デカルトに先立つ 16 世紀後半からの普遍数学概念については，[Bockstaele 2009]参照．またこのデカルトの未完の論考を筆写し，普遍数学からさらに広範な普遍学（scientia universalis，あるいは scientia generalis）へと発展させようとしたのがライプニッツである．ライプニッツの普遍数学，普遍学構想については[林 2003]，第 4 章「統合学問の基礎としての普遍数学」参照．

[26]実質的に先の引用（注 24）で示された言明は，「精神指導の規則」第 14 規則から第 18 規則により詳細に論じられている．[Descartes 1996]，X，pp.438–468，邦訳[デカルト 1974]，103–140 頁．

積 $BD \times BC$ は，2 辺が BD, BC の長方形という描像から離れ，同じ線分の長さとして表される．このような「視覚化」をデカルトは重要と考える．また図 4 で $GH(=a)$ の平方根を考える．その際，単位線分 $FG(=1)$ を加えて，線分 FH を作る．そして FH の中点 K を中心とする円（半径 $\frac{a+1}{2}$）を描き，G から垂線を立て，円周との交点を I とする． $GK=FK-FG=\frac{a+1}{2}-1=\frac{a-1}{2}$ だが，このとき $IG=\sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}=\sqrt{a}$ となり，その長さは GH の平方根を表す．デカルト以前に発展してきた代数学は，量の次元を重視してきた．ヴィエトは，方程式中の未知量の 3 乗を表現するのに *E cubus*, 既知量の 3 乗ならば，*B solidus* のように，母音（未知量を表す）または子音（既知量を表す）を用いて，それに（未知量に対して）「立方体」，または（既知量に対して）「立体」という直接図形を示唆する表記を行っていた．したがって 4 次以上については，例えば 6 次の場合は *E cubo cubus* のように「立方体－立方体」と同じ表記を繰り返すしかなかった．デカルトは量の次元の制約を煩わしいと考えていたようである．「方法序説」第 2 部で，彼以前の記号代数が，記号にとらわれることで精神を混乱させる術になっていると指摘していたことを思い出そう．彼は方程式を立てるにあたって，a, b, c 等，アルファベットの最初の文字によって既知量を表し，x, y, z など末尾の文字によって未知量を表すことにする（これも現代に受け継がれ慣習となっている）．そして先の累乗表記を統一的に両者に対して用いる．同時に，いま見た積や平方根の計算のようにすべての量を 1 次元の線分の長さとして表すことによって，量の次元が記号表現に影響する煩雑さから解放したのである．[27] これによって図形的描象を切り離して，4 次以上についても簡潔な表現と線分表示を与えることが可能になる．

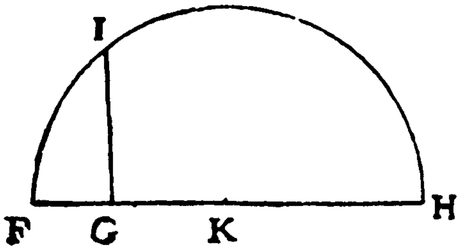


図 4　平方根の線分表示

以上の表現法をもとにデカルトは「幾何学」第 1 巻で，2 次方程式の実根を線分によって示す方法を提示する．[28] いまここでデカルトが提示する 2 次方程式は，以下の(3)，(4)である．ただし z は未知量を表し，a, b は既知量である．

$$z^2 = az + b^2 \tag{3}$$
$$z^2 = az - b^2 \tag{4}$$

---

[27] [Descartes 1996], VI, 369–374, 邦訳[デカルト 2001], 3–6 頁.

[28] 以下において特に記さない限り，デカルトの表記を便宜のため変更する場合もある（等号，累乗，立方根など）．デカルトにとって独自の記号法をくずしてしまうと，彼の主張を損ないかねない．その一方で，現代の慣用と異なる記号について，その都度説明を繰り返すのは冗長であろう．そこでデカルトの記号上の工夫の趣旨を損なわない範囲で改変を行う．

図5で，$LN=\frac{1}{2}a$, $LM=b$ の直角三角形 NLM を考える．そして中心 N, NL を半径とする円 LPO を描く．すると $OM=ON\left(=\frac{1}{2}a\right)+NM\left(=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+b^2}\right)$ が求める根を表示する線分となる．こうして方程式(3)に対する実根（の一つ）$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ が線分 OM として表される．

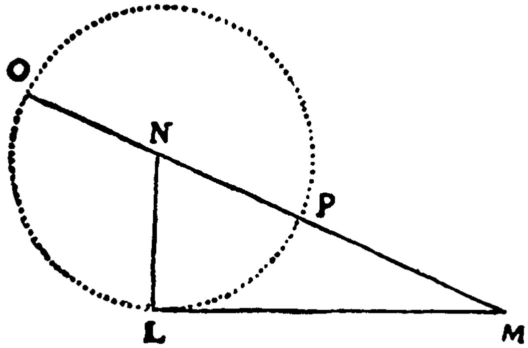


図5　2次方程式の実根の線分表示1

同様に $PM=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ も根となる．また図6においても，$LN=\frac{1}{2}a$, $LM=b$ とする．LN と LM は直交し，かつ LN と MQR が平行になるように引く．そして中心 N，半径 NL の円を描いたときに，MQR との交点を Q, R とする．このとき $MQ=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$，$MR=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ が求める根の線分表示である．よって方程式(4)の二つの実根 $z=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ が表示される．ただしこの場合は，図から明らかなように，図6の N を中心とする円が直線 MQR に交わること（円の半径 $NL>LM$, すなわち $\frac{1}{2}a>b$）が前提となっている．これは，ちょうど平方根内が正の値になり，2次方程式が実根を持つことに対応している．[29] このように2次方程式について，作図が不可能な場合は自動的に根の線分表示が回避される．実根を定規とコンパスを用いて作図するという観点からすると対象にならないからである．つまり，2次方程式に対して虚根は想定されずに済まされてしまう．これが「幾何学」第3巻で扱われる3次方程式の場合になると，事情は異なってくる．実根を得るために虚根を扱わざるを得なくなる．その時点でデカルトの方程式論は，作図による根の線分表示と違った可能性をはらんでくるのである．

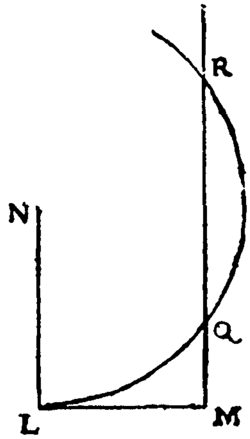


図6　2次方程式の実根の線分表示1

3.2.3 「幾何学」第3巻：3次方程式の解とデカルトの意図

「幾何学」第1巻でデカルトは，与えられた方程式が2次方程式に帰着される問題を「平面的」と称していた．その場合，円と直線によって解を線分表示できるという意味か

[29] [Descartes 1996], Ⅵ, p.374ff, 邦訳[デカルト 2001], 6ff頁.

らである．第3巻ではその平面的な問題とは異なり，方程式が3次方程式にしか帰着できない場合も扱われる（「立体的」な問題とされる）．第3巻前半の議論は，方程式に関する一般的な性質の提示，計算技法の紹介である．それらを列挙すると次のようになる．

1）方程式の根の個数が未知量の次元に等しいこと（「代数学の基本定理」と同等の言明）
2）「真根」(racine vraie＝正の量の根）と「偽根」(racine fasse＝負の量の根）
3）方程式が何個の真根を持つか（「デカルトの符号法則」）
4）真根と偽根とを互いに変換する方法
5）方程式の第2項（2番目に次数の高い項）を除く方法
6）方程式の未知量の係数をすべて整数に変換する方法
7）虚根について

2)に関して負の根に「偽根」という名称を与えている点が興味深い．われわれのように整数全体を数の集合として認識することが前提とされるならば，方程式の根を正負の違いによって区分けする必要はない．当時（17世紀）において，体系的な数の構成は理論化されていない．むしろ数の概念は量的な把握をもとにしている．そこでこの「負の」量をどう認識するかについて研究者たちは悩んだようである．また第3巻全体の流れからするとつけ足しにすぎないが，3)が興味深い．方程式の各項の係数を見て，その正負の符号が変化する回数によって真根の個数を判断するものである．例えば，4次方程式

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0 \tag{5}$$

という例をデカルトは提示する．この方程式(5)の場合，係数は左から順に＋，－，－，＋，－で符号の変化（＋ → －，あるいは－ → ＋）が生じた回数は3回，同符号が並んだ回数は1回である．この回数に応じて真根の個数は3個，偽根の個数は1個と判断するのである（実際，上記の方程式の根は，2, 3, 4, －5）．ただし証明は与えられていない．4)については，3)の法則にしたがい，先の方程式(5)で2番目と4番目の項について係数の正負を逆転させる．すると順に＋，＋，－，－，－となるので，真根と偽根の個数がそれぞれ1個と3個になる．[30]

6)は計算上の技法である．方程式，

$$x^3-\sqrt{3}\,x^2+\frac{26}{27}x-\frac{8}{27\sqrt{3}}=0$$

に対して $y=\sqrt{3}\,x$ と変換し，両辺を $3\sqrt{3}$ 倍して方程式を $y^3-3y^2+\frac{26}{9}y-\frac{8}{9}=0$ と変形する．さらに $z=3y$ とし，両辺を27倍して係数をすべて整数にすると与えられた方程式は，

$$z^3-9z^2+26z-24=0$$

[30] *Ibid.*, p.444-447，邦訳，52ff 頁．

となる．

7)に関して，方程式の根の種類として，虚根（racine imaginaire）の名称を与えたこともデカルトの発案とされる．数学史における重要事として記憶すべきである．第1巻で2次方程式の根を線分表示する際，図6において，円と直線との交点が存在しない場合と虚根とは結びつけられていなかった．作図が不可能（円の半径の大きさに応じて曲線と直線が交点を持たない）場合は，方程式の解は線分表示できず，したがって対象外とされた．デカルトは，なお図形の像に縛られているともいえる．だが，この第3巻でデカルトは次のように述べている．

> 真根も偽根もつねに実であるとは限らず，時には単に虚となる．すなわち各方程式には私が言っただけの〔根の〕個数をつねに想像できるのだが，想像される根に対応する量がまったく存在しないことがある．[31]

例として，3次方程式 $x^3-6x^2+13x-10=0$ が掲げられている．この方程式は先の1)により，3個の根を持つことが予想されるが，実根は2の一つだけであると指摘されている．2次方程式(3)，(4)の場合のように線分表示を伴わず判断が下っている．これは一つの新たな発想である．すなわち，先の方程式に関する一般的性質1)（17世紀前半には数学研究者の中で了解されていた）を前提に，線分表示不能の解の存在を認めていることになる．しかしデカルトがこの「幾何学」第3巻で行う議論は，「対応する量のない」根について十分には深まらない．以下で述べるように，3次方程式の一般解（こちらも「カルダーノの公式」として17世紀数学研究者には普及していた）を公式として提示するが，むしろ具体的な幾何学上の問題を解くことに重心が置かれている．そして第1巻同様，方程式の実根に線分表示（視覚化）を与える方法が強調される（直線と円のみならず，他の円錐曲線が利用される）．この点で，デカルトの姿勢は，現代の抽象代数学に親しんだ者からすると中途半端に見える可能性もある．実在する量と異なる方程式の根を数学的対象としてどのように正当化し，組み入れていくか．この1637年の論考「幾何学」で，デカルトはそうした考察を試みようとしない．ただ，この「幾何学」にあまり多くの読み込みをすることは禁物である．この著作名が「幾何学」であることは忘れてはならない．デカルトは，図形的な根拠づけにあくまでもこだわりを持っているからである．

「幾何学」第3巻後半の議論は，立体的な問題に対する方程式の根の線分表示を問題としている．第1巻と第3巻，両者の議論を関連づけると以下の表2のように図式化できるだろう．表2の左側のたての流れが第1巻の議論であり，右側の流れが第3巻の議論の進み方である．同時に右側の流れは，途中で右側へと帰着されていくケースもある．デカルトは，未知量が3次元を超える場合でも2次方程式に帰着される場合を次のようにあげて

---

[31]〔　〕内の補足は引用者による．*Ibid.*, p.453f，邦訳，59頁．

表2 「幾何学」第1巻と第3巻における議論の流れ

第1巻	第3巻
基本演算（+, −, ×, ÷, $\sqrt{\ }$ の開平）と線分の作図との対応 ⟶	1) 3次，4次方程式の根（真根，偽根，虚根）について 2) 「符号法則」 3) 方程式の第2項の除去 4) 係数の有理化
↓	↓
「平面的な問題」（＝2次方程式に帰着） ⟵ →円と直線によって（定規とコンパスを用いて）解を線分表示	1) 3次方程式→2次方程式に帰着 2) 4次方程式→3次方程式→2次方程式に帰着
↑	↓
$z^2=az\pm b^2$ の解の線分表示	3次方程式が2次方程式に帰着されない場合（「立体的な問題」） ↓ 1) $z^3=\pm pz\pm q$ に帰着 2) 円と直線と円錐曲線を通じて解を線分表示 ↑ カルダーノの公式

いる．与えられた方程式を6)の技法によって整理した後，方程式

$$y^6-8y^4-124y^2-64=0 \tag{6}$$

を考える．この場合，定数項64の約数1, 2, 4, 8, 16, 32, 64をもとに，2項式 y^2-1, y^2-2, y^2+2, y^2+4, … でこの(6)の左辺を割っていく．実際，y^2-16 で割り切れる（$y^6-8y^4-124y^2-64=(y^2-16)(y^4+8y^2+4)$）．あらたに $y^4+8y^2+4=0$ が得られるが，これは $y=Y$ とすると2次方程式 $Y^2+8Y+4=0$ に帰着する．こうした割り切る2次式を見いだすことができないときが，「立体的な問題」となる．デカルトはその場合，「それでも円と直線しか使わないで問題を作図しようと努めるのは，円しか必要としない問題を作図するために円錐曲線を使うのと劣らず誤りである」とする．[32]

では立体的な問題はどのような具体的な場面で生じるのか．例えば，2個の比例中項を求めるときが該当する．すなわち，a と q を与えられた量とするとき，$a:z=z:z^2=z^2:q$ を満たす z を求めるならば，$z^3=aq$ を解かなくてはならない．こうした3次方程式の処理が必要となるときはどうするのか．「幾何学」はまず，より一般的な場合を考え本稿の冒頭に掲げた技法5)，すなわち方程式の2番目に次数が高い項を取り除く，すなわち $x^3+px^2+qx+r=0$ に対して，$x=z-\dfrac{p}{3}$ と置換することを行う．そして帰着される以下の方程式，

$$z^3=\pm pz\pm q \tag{7}$$

を考える．この方程式(7)に対して，デカルトは p, q の前の符号がともにマイナスになる

[32] *Ibid.*, p.454–457，邦訳，59ff 頁．

場合を除いて，三つの一般解を以下のように示している（デカルトのテキストの表記にもとづく．＊は欠項を示す）．

$$z^3 = * - pz + q \longrightarrow z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \tag{8}$$

$$z^3 = * + pz + q \longrightarrow z = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \tag{9}$$

$$z^3 = * + pz - q \longrightarrow z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \tag{10}$$

(9)については，立方根中の平方根で $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 > \left(\frac{1}{3}p\right)^3$ の場合に限定している．また(10)は，本来ならば絶対値が付くべきである.[33] デカルトはあえて第2の式と形を揃えている．

注目すべきことは，やはり根の線分表示である．デカルトはそれに拘っている．ただし2次方程式のように直線と円の組み合わせでは，上記の実根を線分の長さとして作図できない．そこでデカルトは円錐曲線（円，楕円，放物線，双曲線）の組み合わせから表示を試みる．具体例として角の3等分に由来する方程式，

$$z^3 = 3z - q \tag{11}$$

について確認しよう．いま，図7で弧 $NQTP$ を3等分する（すなわち角 NOP を3等分する）ことを考える．$NO=1$，弦 $NP=q$，弦 $NQ=z$ とする．かつ QS と TO は平行となるように引く．このとき二等辺三角形 $\triangle ONQ$，$\triangle NQR$，$\triangle QRS$ の相似より，

$$NO : NQ = NQ : QR = QR : RS$$

となる．すなわち，$1 : z = z : QR$ から $QR = z^2$．同様に $RS = z^3$ である．すると $NP = 3NQ - RS$ から方程式(11)が得られる．この方程式(11)の解は，解の公式として先に掲げた(10)が適用される場合である（$p=3$ の場合）．このとき図8にあるように，放物線 FAG を

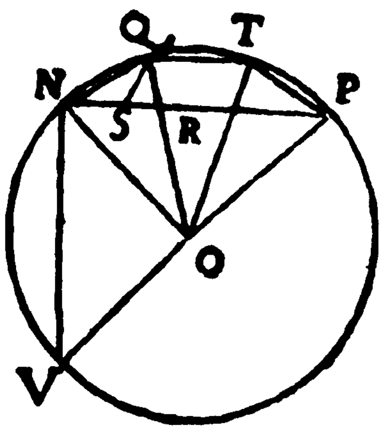


図7　角の3等分と3次方程式

[33]公式(9)で q の代わりに $-q$ とするとわかる．

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \end{aligned}$$

となるからである．

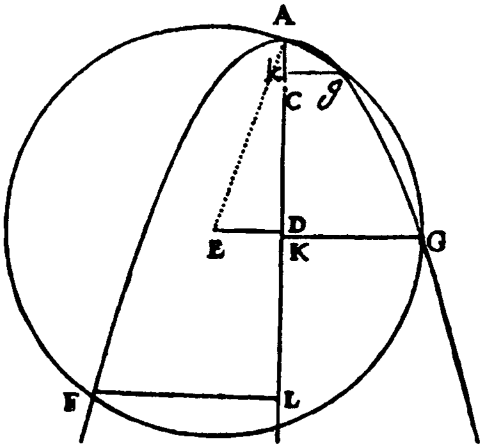


図 8　3 次方程式の実根の線分表示

描き，(「主通径」と称される) 放物線のパラメーターの半分として $CA=\frac{1}{2}$，さらに $CD=\frac{3}{2}$ と設定する．かつ垂線 $DE=\frac{1}{2}q$ をとり，E を中心として A を通る円 $FAgG$ $\left(\text{半径} \sqrt{4+\frac{1}{4}q^2}\right)$ を描く．すると，(A を除く) 円と放物線の交点 F, g, G から得られる線分 GK, gk, FL が 3 次方程式の根と対応する．デカルトの説明によれば，三つの線分 GK, gk, FL のうち線分 GK, gk が真根に，線分 FL が偽根になる．そしてこの問題の求める長さ，図 7 の NQ としては gk をとる．GK は NV，すなわち弧 NVP の 3 等分を表す量だからである．[34]

以上「幾何学」第 1 巻，第 3 巻の例を見ることからわかるように，デカルトはまず記号代数の基本を定める．そして幾何学的問題から派生する方程式の根をどのように線分として「目に見えるようにするか」を解決する．途中，方程式に係わる一般論も展開されるが，あくまで最終目標に向けて補助的な役割を担うだけである．くり返すが，この 1637 年の著作のタイトルが「代数学」ではなく，「幾何学」であることは注意されるべきである．だがデカルトが示したかったのは，「問題解決の方法」であって，ユークリッド『原論』に代表される公理的体系を提示することではない．いわゆる「符号法則」に対しても例を挙げるにとどまっている．解決すべき問題を片付けるのに必要な考察を行うことに主眼がある以上，デカルト自身が考案した方法論の持つ理論的可能性にまで目が行き届かなかったかもしれない．量を線分表示することから「幾何学」は始まった．そしてあくまで方程式の実根を一次元的に示すこと以上には進まない．したがって作図可能性と方程式の根として認容できる範囲とが一致する．しかし方程式の根を記号によって表現することで，その「目に見える」対応から分離していく方向に進展の余地があった．数学的論証は，明証

[34] [Descartes 1996]，Ⅵ, pp.470–474，邦訳[デカルト 2001]，71–74 頁．現代的な設定の下で一連の作業は，次のように了解できる．放物線の頂点 A を座標軸の原点にとり，放物線の対称軸を y 軸に見立てる．このとき，

$$\text{放物線の方程式}：y=-z^2,$$
$$\text{円の方程式}：\left(z+\frac{1}{2}q\right)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{4+\frac{1}{4}q^2}\right)^2$$

となる．この両者から，y を消去すると，$z^4-3z^2+qz=0$，すなわち方程式(11)，$z^3=3z-q$ を得る．なおこの(11)で，解と係数の関係から，

$$FL=-(MN+NV)$$

より，線分 FL が偽根になる．

性を備えることで説得力を持つ．一方でその対象の存在性についての根拠をどのように考えるか，それはまた別の議論である．デカルトが考案した記号代数は数学的対象の存在を了解することに新たな可能性を生み出そうとしていた．デカルト自身がそのことに気づいていたようにも見える．[35] 特に3次方程式において，根の公式を通じて虚根という線分表示不能なものが介入する．にもかかわらず結果的に実根が得られるという現象が生じる．これを正当化するためには，デカルトの観点と異なる発想が不可欠である．デカルトの「幾何学」を本格的に学んだライプニッツが感じた不満を推測するならば，以上の事柄と重なるはずである．デカルトが必ずしも拡げられなかった可能性に，ライプニッツはいち早く気づいた．ライプニッツはさらにデカルトの限界を見定め，数学に新たな展開をもたらそうと試みたのである．[36]

デカルトは煩雑な記号表現を洗練させ，量の次元からの解放によって代数に新境地をもたらした．デカルトはその方法論において革新的だが，実際の「幾何学」の内容は，案外「保守的」なようにも見える．今回の講義は，「幾何学」を取り上げた．おなじ著作の中に示されている作図，曲線の構成に関してユークリッド『原論』中の平面幾何学の理論的枠組みの延長線上にあるものとして位置づける向きもある．[37] ただそれは現代の観点から陥りやすいアナクロニズムかもしれない．デカルトの貢献に過剰に何もかも読み込むことは禁物だろう．われわれの分析はデカルトの数学研究のうち，「幾何学」にほとんど限定し，しかもその方程式論の内容に限定した．彼の数学研究は他のテーマも持っていた．「幾何学」の中にも，曲線への接線，法線問題の処理が記されている（第2巻）．[38] ただ，その

---

[35]「方法序説」第4部で，デカルトは神の存在と関連づけて次のように述べている．

> 私の理解していたところでは，それ〔幾何学者が対象としているもの〕は一つの連続した物体である．すなわち，長さと幅と高さ，あるいは深さにおいて限りなく延長した一つの空間であり，様々な形と大きさを持ち得る，様々な形に分割可能であり，あらゆる仕方で動かされ置き換えられるものである．〔中略〕すべての人がこれらの証明に帰属させるあの大きな確実性は，私が先ほど述べた規則にしたがって明証的に理解される，ということにのみ基づいていることに私は気がついていた．だが，同時にまた，その証明においてはその対象の存在を私に保証するものは，まったく何もないことに私は気がついていた．というのは，例えば一つの三角形を想定した場合，その三つの角の和は2直角に等しくなければならないことを私はよく見てとったが，しかしだからといって世界のうちに何らかの三角形が存在することを私に保証するものは，何も見当たらなかったからである（〔　〕内は引用者による補足）．

このコメントは方程式論を見据えていたかは不明である．ただ数学的対象の存在と証明の確実性や明証性が異なるレヴェルでとらえられていることが興味深い．*Ibid.*, p.36，邦訳[デカルト 2010]，61f頁．

[36]ライプニッツがデカルトの「幾何学」に対してい抱いた批判とライプニッツ自身による方程式論については，[林 2009b]参照．

[37][Bos 2001]がデカルトを通じて生じた変化を強調するのに対して，[Panza 2011]はその説を受け入れつつも，理論上の「厳密さ」（exactness）をどう設定するかという観点から，デカルト「幾何学」が持つ学問的保守性の部分にも着目する．

[38][Descartes 1996]，VI, pp.413–423，邦訳[デカルト 2001]，32-38頁．ある曲線の接線，あるいは法線を考える作業は，直接微分学の確立につながるテーマである．デカルト自身による問題解決の方法と（[Maronne 2010]は参考になる），後進が引き継いで進展させていった事柄については，また日を改めて論じることにしたい．

対象となる曲線は代数曲線に限られる．古代ギリシア人も研究した螺線や円積線は排除される．[39] その一方で，著作として形にはならなかったが，書簡を通じてデカルトが対数曲線などの超越曲線への関心を持ったことも確認できる．[40]

4 まとめ（ヴィエト，デカルトの方程式論と代数的思考様式）

デカルトの「幾何学」は，通常数学史研究において，記号代数の手法を確立した著作としての評価は定まっているように見える．それ自体はあえて覆すには及ばない．ただ，デカルトの著作が刊行にされる以前の 16 世紀から，ヴィエト等によって記号代数は徐々に発展していた（3.1 節参照）．方程式記述のために必要な記号の導入（等号あるいは不等号，未知量・既知量の表記，累乗の表記）という観点から見ても様々な試行錯誤がくり返されていた．またデカルトの同時代にもデカルトとは独立にその領域に貢献する人々もいた．例えばイギリスにおける代数学の進展を見逃すことはできない（ハリオット，オートリッド，ウォリス，ニュートン等がその担い手である）．[41] しかしわれわれが，ヴィエト，デカルトの著作の歴史的意義をことさらに強調するのは理由がある．単により洗練された記号を導入することにのみに関心がとどまっていないからである．彼らの数学の意義はもっと違った次元に存する．導入された記号を用いて方程式を解くことに対し，従来ない一般的考察が加えられている．つまり，数学上の問題の立て方に変化が生じたのである．新たな問題設定，すなわち個々の問題の中に横たわるある種のメタ・レヴェルの問題，例えば，方程式を通じて解析概念を変えたことや構造的な問題（方程式の根の種類と存在条件に関する考察）をも視野に入れるようになった．もちろん方程式を解くための技術的側面の開発も行われた（補助方程式の導入などによって方程式の次数を下げることなど）．ただそれだけでないより広い思考一般の形式的変化にも寄与するところがあったと捉えることができる．数学史家マホーニィが「代数的思考様式」と称した，この時代の思想史的変革である．

ここで繰り返し掲げてきた「代数的思考様式」について述べることにしよう．数学史家マホーニィは，17 世紀中に起きた数学的業績の中でもっとも重要な側面は，

<u>幾何学的思考様式から代数的思考様式への移行</u>

---

[39] *Ibid.*, p.390, 邦訳，17 頁．

[40] ド・ボーヌの問題と称される対数曲線への接線問題，あるいは対数らせんの問題が代表例である．メルセンヌ宛書簡（1638 年 9 月 12 日付），1645 年 6 月（？）書簡（宛先不明）にデカルトの記述がある．[Descartes 1996], Ⅱ, p.360, Ⅳ, pp.229f. これらの問題についての分析は，[Vuillemin 1987], pp.13–25, 35–55 を参照．

[41] 17 世紀イングランドにおいて記号代数は，大陸側の展開とは独立して発展していた．その意味で，記号代数とそれに結びついた方程式論は，同時代的における数学研究者の関心の的であったと言える．ハリオット，オートリッド等による独自の研究については，[Stedall 2002]参照．

であるとする．後者の具体的内容（特に17世紀において作り上げられた基本的特徴）は次のとおりである．[42]

1) 真の演算的記号法を持った量の代数が見いだせること，
2) 諸量間の関係としての代数方程式の構造が調べられること，
3) 物理的存在からの解放が見られること．

これらが備わったとき，思考の様式，スタイルとして確立したと位置づけられる．ヴィエト，デカルトはその代表的な担い手だったことになる．ヴィエトの方程式論は，確かに1)と2)の要素を含んでいる．またデカルトには全要素が揃っているのをわれわれはすでに見た．以上の3点は，ギリシア数学の特性（＝幾何学的思考様式）と鮮明に対立する．すなわち，古代ギリシアにおける数学の特徴は次の通りである．

- ギリシア数学には記号が見い出せない
- ギリシア数学の課題は，幾何学的な図形や単位の集成としての数に固有な性質を発見することに限られる
- ギリシア数学は物理的存在論に強く従属する

である．3番目の点については，三つの線を越える線の乗法が実際に想定されないことを思い出せばよいだろう（[林 2008]，[林 2010]で見たユークリッド，アルキメデスが好例）．古代ギリシアの成果に異なる内容が加わることで数学は研究の場を確実に広げていくことになる．17世紀ヨーロッパはまさに数学的革新の時代だった．[43]

特にデカルトに関していま一度おさらいすると，「幾何学」において，1)についてはa^3等の簡便な記号法を編み出した．さらに幾何学的描像を線分に一元化し，量を抽象化してとらえ，代数的操作の対象とした．また2)については，個別の方程式の解法についてそのテクニックを述べてもいるが，方程式の根にかかわる一般論（符号法則）や方程式の次数に応じて問題を類型化していた（問題の名称として平方的，立方的と名づける）．3)についても，虚根が方程式から理論的に生じる可能性に言及している．これは自らが行う線分による量の表示とは完全にかけ離れた対象である．ただしその線分表示こだわるがゆえに，3)については不十分なところに留まったようにも見える．デカルトの熱心な読者の一人であった，ライプニッツが批判点として着眼したことは，デカルトの3)に関する不徹底さである．17世紀前半に生じたこの記号代数の展開を受けて，同じ世紀の後半には曲線への接線問題を皮切りに無限小解析（＝微分積分学）が新たな発展の領域の場になる．ライプニッツは数学研究に取り組む以前から，他の学問分野の中で記号がもたらす可能性一般について思いをめぐらせていた．そして彼なりにデカルトの成果を乗り越えようしたのだった．

---

[42] [マホーニィ 2007]，204–215頁．特に208頁．

[43] マホーニィは，代数的思考様式への移行が生み出された原因を数学内部にのみ求めるのではなく，広いコンテクストにおいて捉えようとする．16世紀の思想家ペトルス・ラムスの教育法，あるいは普遍記号法に注目している．[マホーニィ 2007]，215–227頁．

冒頭に引用したプルーストは，代数の一つの本質を言い当てている．代数の論理の展開は，ユークリッド『原論』の証明のように対話に根差したと考えられる議論構成に由来していない．記号が表現する方程式を形式的に処理することを最大限に活かす方法論である．プルーストが描くように「授業に出ていてもたいして分か」らなくとも，自分で「本を読んでも簡単にわかる」のである．いわばダイアローグによって成立した学問からモノローグによっても成り立つ領域が生成されたともいえる．[44] また記号代数と方程式論が整ったことは，数学における問題設定のあり方にも変化をもたらしたのである．その意味で，代数は単なる「気のふさぎを紛らわせてくれる」だけのものではない．デカルトが開いた道をさらに進んでいくと，形式化・抽象化をより進めていくことになる．概念的に実在から自由になることを存分に活用して，数学自体の応用の範囲を飛躍的に豊富にすることができるのである．18 世紀の数学者はその成果を堪能した．だがつねに「失われた直観的描像を求めて」，数学は抽象から具象へと結びつきを取り戻そうとする．[45] こうした進展については，また機会を改めて論じたいと思う．

文　献

1 次資料（翻訳も含む）

[Descartes 1659–61] Renati Des-Cartes, *Geometria in linguam Latinam versa, et commentaris illustrata*, operá atque studio Francisci À Schooten (Amstelaedami, 1659–1661).

[Descartes 1996] *Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (1897–1913₁) (Paris: J. Vrin, 1996) (rep.).

[Descartes 2009] Descartes, René, *Œuvres complètes*, Ⅲ, *Discours de la Méthode et Essais*, sous la direction de Jean- Marie Beyssade et Denis Kambouchner (Paris: Gallimard, 2009).

[Proust 1988] Proust, Marcel, *À la recherche du temps perdu*, Ⅲ, édition publiée sous la direction de Jean- Yves Tadié (Paris: Gallimard, 1988).

[Viète 2001] *François Viète Opera Mathematica* (1646₁), recognita Francisci À Schooten, Vorwort und Register von Joseph E. Hofmann (Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 2001) (rep.).

[Viète 2006] Viète, François, *The Analytic Art*, translated by T. Richard Witmer (1983₁), (Mineola: Dover Publications Inc., 2006) (rep.).

[デカルト 1974] デカルト，ルネ，『精神指導の規則』野田又夫訳（1950 年₁）（岩波文庫，1974 年）（改訳）．

[44] 前注 43 で指摘した，16 世紀の思想家ラムスをめぐって，オングはその著作[Ong 1983]で新教育がもたらした「対話の衰退」について論じている．これは今回のわれわれの議論の背景として着目すべき事柄である．

[45] 17 世紀後半からさらに 18 世紀以降への代数の進展については多くの研究が行われている．代表的な文献として，[Wussing 1984]，[Pycior 1997]，[Kleiner 2007]，[Lubet 2010]を挙げる．

［デカルト 2001］『デカルト著作集』1『幾何学』他 原亨吉 他訳（1973 年₁）（白水社，2001 年）（増補復刊）．

［デカルト 2010］デカルト，ルネ，『方法序説』山田弘明訳（ちくま学芸文庫，2010 年）．

［プルースト 2006］『失われた時を求めて』8，第四篇『ソドムとゴモラ』Ⅱ，鈴木道彦訳（集英社文庫，2006 年）．

［ユークリッド 2010］斎藤憲・高橋憲一訳・解説『エウクレイデス全集』第 4 巻「デドメナ/オプティカ/カトプトリカ」（東京大学出版会，2010 年）．

2 次文献

[Beyssade 2001] Beyssade, Jean- Marie, *Études sur Descartes: L'histoire d'un esprit* (Paris: Éditions du Seuil, 2001).

[Bockstaele 2009] Bockstaele, Paul, "Between Viète and Descartes: Adriaan van Roomen and the *Mathesis Universalis*," *Archive for History of Exact Sciences*, **63** (2009), pp.437–470.

[Bos 2001] Bos, Henk J. M., *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (New York etc.: Springer-Verlag, 2001).

[Broughton and Carriero 2011] *A Companion to Descartes*, edited by Janet Broughton and John Carriero (The Atrium: John Wiley & Sons, 2011).

[Cuomo 2000] Cuomo, Serafina, *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 2000).

[Garber 1992] Garber, Daniel, *Descartes' Metaphysical Physics* (Chicago: University Press of Chicago, 1992).

[Gaukroger 1995] Gaukroger, Stephen, *Descartes: An Intellectual Biography* (Oxford: Clarendon Press, 1995).

[Jullien 1996] Jullien, Vincent, *Descartes La Géométrie de 1637* (Paris: Presses Universitaires de France, 1996).

[Klein 1968] Klein, Jacob, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, translated by Eva Brann (1968₁) (New York: Dover Publications Inc., 1992) (rep.).

[Kleiner 2007] Kleiner, Israel, *A History of Abstarct Algebra* (Boston: Birkhäuser, 2007), 邦訳『抽象代数の歴史』斎藤正彦訳（日本評論社，2011 年）．

[Lubet 2010] Lubet, Jean- Pierre, "Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy," *Revue d'histoire des mathématiques*, **16** (2010), pp.63–131.

[Lützen 2010] Lützen, J., "The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle," *Centaurus*, **52** (2010), pp.4–37.

[Mancosu 1996] Mancosu, Paolo, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century* (New York, Oxford: Oxford University Press).

[Maronne 2010] Maronne, Sébastien, "The Ovals in the *Excerpta Mathematica* and the Origins of Descartes' Method of Normals," *Historia Mathematica*, **37** (2010), pp.460–484.

[Molland 1976] Molland, A. G., "Shifting the Foundations: Descartes' Transformation of Ancient Geometry," *Historia Mathematica*, **3** (1976), pp.21–49.

[Ong 1983] Ong, Walter J., *Ramus Method, and the Decay of Dialog: From the Art of Discource to the Art of Reason* (1958_1) (Cambridge, London: Harvard University Press, 1983).

[Otte and Panza 1997] *Analysis and Synthesis in Mathematics*, edited by Michael Otte and Marco Panza (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997).

[Panza 2007] Panza, Marco, "What Is New and What Is Old in Viète's *Analysis restituta* and *Algebra nova*, and Where Do They Come From?: Some Reflections on the Relations between Algebra and Analysis before Viète," *Revue d'histoire des mathématiques*, **13** (2007), pp.85–153.

[Panza 2011] Panza, Marco, "Rethinkng Geometrical Exactness," *Historia Mathematica*, **38** (2011), pp.42–95.

[Pycior 1997] Pycior, Helena M., *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

[Rabouin 2009] Rabouin, David, *Mathesis Universalis: L'idée de mathématique universelle d'Aristotle à Descartes* (Paris: Presses Universitaires de France, 2009).

[Rabouin 2010] Rabouin, David, "What Descartes Knew of Mathematics in 1628," *Historia Mathematica*, **37** (2010), pp.428–459.

[Rastopoulos 2003] Rastopoulos, Athanassios, "Cartesian Analysis and Synthesis," *Studies in History and Philosophy of Science*, **34** (2003), pp.265–308.

[Rodis-Lewis 1971] Rodis-Lewis, Geneviève, *L'œuvre de Descartes*, tome Ⅰ, Ⅱ (Paris: J. Vrin, 1971). (抄訳, 小林道夫・川添信介訳『デカルトの著作と体系』(紀伊国屋書店, 1990年)).

[Serfati 1998] Serfati, Michel *et al.*, "Pour Descartes: Mathématiques et physique cartesiennes," *Revue d'histoire des sciences*, **51** (1998).

[Stedall 2002] Stedall, Jacqueline A., *A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685* (Oxford etc.: Oxford University Press, 2002).

[Vuillemin 1987] Vuillemin, Jules, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* (2^e éd.) (Paris: Presses Universitaires de France, 1987).

[Wussing 1984] Wusing, Hans, *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*, translated by Abe Shenitzer (1984_1) (Mineola: Dover Publications Inc., 2007) (rep.)

[伊東他 1987] 伊東俊太郎編『数学の歴史』Ⅱ,『中世の数学』(共立出版, 1987年).

[小林 1995] 小林道夫『デカルト哲学の体系：自然学・形而上学・道徳論』(勁草書房,

1995 年).
[小林 1996] 小林道夫『デカルトの自然哲学』(岩波書店, 1996 年).
[小林 2006] 小林道夫『デカルト入門』(ちくま新書, 2006 年).
[佐々木 2003] 佐々木力『デカルトの数学思想』(東京大学出版会, 2003 年).
[武田 2009] 武田裕紀『デカルトの運動論：数学・自然学・形而上学』(昭和堂, 2009 年).
[谷川 1995] 谷川多佳子『デカルト研究：理性の境界と周縁 』(岩波書店, 1995 年).
[中村 1980] 中村幸四郎『近世数学の歴史：微積分の形成をめぐって』(日本評論社, 1980 年).
[林 2003] 林知宏『ライプニッツ：普遍数学の夢』(東京大学出版会, 2003 年).
[林 2008] 林知宏「数学史講義 (第 2 回)：ユークリッド『原論』, 論証学問の成立」,『学習院高等科紀要』**6**, 23–52 頁.
[林 2009 a] 林知宏「数学史講義 (第 3 回)：パリ時代 (1672–1676) のライプニッツ」,『学習院高等科紀要』**7**, 31–73 頁.
[林 2009 b] 林知宏「ライプニッツの数学：方程式論と代数的思考様式」, 酒井潔・佐々木能章編『ライプニッツを学ぶ人のために』(世界思想社, 2009 年) 所収, 37–56 頁.
[林 2010] 林知宏「数学史講義 (第 4 回)：アルキメデスの求積法」,『学習院高等科紀要』**8**, 11–33 頁.
[マホーニィ 2007] マホーニィ, マイケル・S.『歴史の中の数学』佐々木力編訳 (ちくま学芸文庫, 2007 年).
[ラーシェド 2004] ラーシェド, ロシュディー『アラビア数学の展開』三村太郎訳 (東京大学出版会, 2004 年).